

HB 6909  
HC 793717

# MODELES MATHEMATIQUES EN HYDROGEOLOGIE

PAR

J. P. SAUTY\*

## INTRODUCTION

L'objet de cette conférence est de faire rapidement le point sur l'état présent des techniques de simulation — ce que l'on appelle les modèles — qui peuvent être utilisées pour l'étude et l'évaluation des ressources en eau souterraine.

Actuellement, la plupart des grandes études hydrogéologiques, qu'elles soient entreprises en vue de projets d'aménagement hydro-agricole, de distribution d'eau urbaine ou industrielle, ou de grands travaux souterrains, font appel à ces techniques qui jouent un rôle de plus en plus important car elles permettent à l'hydrogéologue d'aller plus au devant des préoccupations et des besoins d'éléments de décision des projeteurs d'aménagement.

Le plan adopté est le suivant :

1. Rappels sur la finalité des modèles, leur historique. Quelques détails sur les problèmes à traiter
2. Les principaux types de simulateurs existants
3. Les domaines pratiques d'utilisation des modèles
4. Esquisse d'une méthodologie d'emploi des simulateurs. Leur rôle dans les études d'aménagement
5. Conclusions : quelques tendances modernes.

La présentation orale de quelques exemples d'application illustrera cet aide-mémoire.

## 1. RAPPEL DE QUELQUES GENERALITES

### 1.1. Position du problème.

L'accroissement des besoins en eau, s'il implique la nécessité de poursuivre la recherche de ressources nouvelles partout où on peut l'envisager, entraîne également, et de plus en plus, l'obligation de sauvegarder les potentiels existants déjà démontrés et d'en optimiser l'exploitation.

En matière d'eaux souterraines, l'hydrogéologie, qui par le passé, a surtout eu affaire à des problèmes de prospection, se trouve actuellement de

---

\* Ingénieur au Bureau de Recherches Géologiques et Minières (France).

plus en plus fréquemment confrontée à des problèmes quantitatifs qui lui sont posés par des responsables d'aménagement :

- Effets d'une exploitation intensive de nappe
- Incidence d'aménagements superficiels sur le régime des eaux souterraines
- Reconstitution du potentiel perdu par suite d'une surexploitation
- Sauvegarde de la qualité des eaux
- Utilisation rationnelle du milieu aquifère en tant que conduite et réservoir naturels venant s'intercaler dans un schéma de circulation de l'eau complexe
- Enfin coût de l'eau souterraine et définition d'une politique optimale d'exploitation

Pour résoudre de tels problèmes, il faut évidemment bien connaître le milieu aquifère auquel on s'intéresse, à savoir sa configuration, son extension, ses propriétés physiques, son environnement, toutes choses que la géologie et les techniques annexes d'investigation du sous-sol permettent d'obtenir aisément. Mais il faut en outre définir précisément le mécanisme physique de la circulation de l'eau que renferme ce milieu et surtout être apte à prévoir les changements que provoqueront les contraintes nouvelles imposées par les aménagements.

Dans ce but, l'hydrogéologie moderne pour être à la hauteur de ses responsabilités devra donc s'appuyer sur les techniques offertes par la physique et les mathématiques.

Parmi ces techniques une des plus puissantes est ce que l'on désigne sous le terme général de « simulateur d'écoulement » ou « modèles ».

## 1.2. Qu'est ce qu'un modèle.

A ce stade de l'exposé il faut rentrer quelque peu dans le détail.

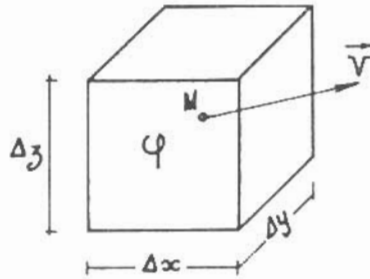
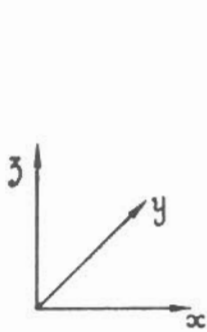
Malgré la diversité d'énoncés des problèmes pratiques que l'on peut rencontrer ils se ramènent tous à analyser le phénomène d'écoulement à une certaine échelle d'espace et de temps. On sait qu'on possède pour ce faire des lois physiques nécessaires. Ces lois qui s'expriment à l'échelle infinitésimale mais qui peuvent être étendues par intégration — ou en procédant par sommation de différences finies — à toutes les échelles voulues, sont :

- la loi de conservation qui exprime la conservation de la masse fluide à l'intérieur du système aquifère.
- la loi de Darcy qui exprime la relation dynamique entre les forces agissant sur le fluide et le mouvement engendré. Leur combinaison (selon la démarche résumée fig. 1) conduit à l'équation générale du mouvement qui dans sa forme différentielle s'écrit :

$$\operatorname{div}(\vec{K} \operatorname{grad} \phi) = \frac{S \partial \phi}{\partial t}$$

Ψηφιακή Βιβλιοθήκη "Θεόφραστος" - Τμήμα Γεωλογίας, Α.Π.Θ.

### A. Données du problème à l'échelle infinitésimale



Données au point M :

Porosité  $\omega$

Masse spécifique  $\rho$

Perméabilité K

Charge piézométrique  $\phi$

Vitesse de DARCY  $\vec{V}$

### B. Lois fondamentales

Expression différentielle

Expression par différences finies

#### 1<sup>o</sup> Loi de conservation

$\Sigma$  flux entrant = variation de masse

$$\operatorname{div} \rho \vec{V} = - \frac{\partial (\rho \omega)}{\partial t} = \frac{S}{\rho} \frac{\partial \phi}{\partial t} \quad \sum_i Q_i = S \frac{\Delta \phi}{\Delta t} \quad (i \text{ indice des faces du cube})$$

#### 2<sup>o</sup> Loi de DARCY

$$\vec{V} = -K \operatorname{grad} \phi$$

$$Q_i = K \Delta \phi_i$$

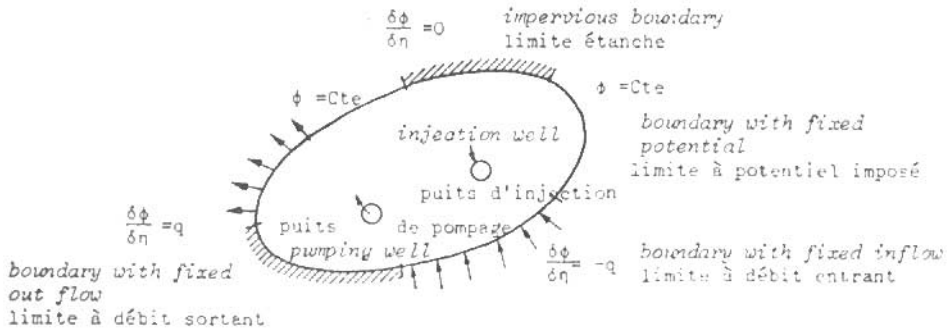
#### 3<sup>o</sup> Equation générale

$$\operatorname{div} (K \operatorname{grad} \phi) = S \frac{\partial \phi}{\partial t}$$

$$\Sigma K \Delta \phi_i = S \frac{\Delta \phi}{\Delta t}$$

Fig. 1. Les lois fondamentales de l'écoulement en milieu poreux.

En termes mathématiques, il s'agit d'une équation aux dérivées partielles de type parabolique. On sait qu'une telle équation possède la propriété fondamentale d'être intégrable dans tout domaine d'espace (et de temps) dès que l'on connaît : la forme du domaine, toutes les conditions aux limites et la répartition dans le domaine des paramètres  $K$  (perméabilité) et  $S$  (emmagasinement).



En pratique on peut appeler simulateur d'écoulement ou «modèle» toute technique permettant de déterminer la solution  $\phi$  (elle est unique) correspondant à des conditions aux limites et une répartition des paramètres fixés. Il en existe deux sortes : les modèles analogiques — les modèles mathématiques.

## 2. DESCRIPTION DES PRINCIPAUX TYPES DE SIMULATEURS EXISTANTS

### 2.1. Les modèles analogiques.

Les simulateurs (ou modèles) analogiques sont basés sur le fait que les équations qui régissent l'écoulement d'un courant électrique dans un milieu conducteur sont identiques à celles énoncées ci-dessus pour les écoulements en milieu poreux (on dit qu'il y a identité formelle). Les principales relations d'analogie sont rappelées tableau I.

Cette justification théorique fondamentale étant posée, la mise en œuvre des méthodes de simulation analogiques ne soulève plus que les difficultés d'ordre technologique que peut susciter la réalisation des différentes manipulations en laboratoire nécessaires :

- construction de milieux conducteurs présentant à une échelle réduite une géométrie et des caractéristiques analogues à celles des systèmes aquifères à simuler
- imposition des conditions électriques

Principaux paramètres physiques	Domaine électrique	Domaine poreux
$x, y, z$ $\vec{i}(x, y, z)$	variables spatiales vecteur courant électrique (Ampères/m <sup>2</sup> )	$X, Y, Z$ (idem) $\vec{V}(X, Y, Z)$ vecteur vitesse macroscopique $L T^{-1}$ (m/s)
$I = \int_S \vec{i} \cdot \vec{n} ds$	intensité électrique (Ampères)	$Q = \int_S \vec{V} \cdot \vec{n} ds$ débit volumique $L^3 T^{-1}$ (m <sup>3</sup> /s)
$\sigma(x, y, z)$	conductivité électrique $\equiv 1/\epsilon$ (résistivité) <sup>-1</sup>	$K(X, Y, Z)$ perméabilité de DARCY
$C(x, y, z)$	(mho/cm pour $\sigma$ , ohm x cm pour $\rho$ ) capacité électrique (farad)	$S(X, Y, Z)$ coefficient d'emmagasinement (s. d.)
$t_e$ $V(x, y, z)$	temps électrique potentiel électrique (volts)	$t_r$ temps réel $H(X, Y, Z)$ potentiel hydraulique ou charge $\equiv \frac{p}{\rho g} + z$ $L$ (m)
Equations fondamentales	<p style="text-align: center;"><b>E quation de conservation</b></p> $\text{div} \cdot \vec{i} = 0$ <p style="text-align: center;"><b>E quation fondamentale de la dynamique</b></p> $\vec{i} = -\sigma \text{grad } V$ <p style="text-align: center;"><b>E quation du mouvement en régime permanent</b></p> forme générale : $\text{div}(\sigma \text{grad } V) = 0$ forme de deux dimensions : $\frac{\partial}{\partial x} \left( \sigma \frac{\partial V}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \sigma \frac{\partial V}{\partial y} \right) = 0$	<p style="text-align: center;"><b>E quation de conservation</b></p> $\text{div} \cdot \vec{V} = 0$ <p style="text-align: center;"><b>E quation du mouvement en régime permanent</b></p> $\vec{V} = -K \text{grad } H$ $\text{div}(K \text{grad } H) = 0$ $\frac{\partial}{\partial X} \left( K \frac{\partial H}{\partial X} \right) + \frac{\partial}{\partial Y} \left( K \frac{\partial H}{\partial Y} \right) = 0$

—mesure des paramètres et grandeurs électriques; en particulier mesure des potentiels électriques (analogues des charges piézométriques  $\phi$ )

Les seuls calculs consistent à déterminer les rapports d'analogie permettant de transformer les résultats (mesures en unités électriques) en termes d'écoulement en milieu poreux.

En principe le domaine d'application de l'analogie électrique se confond donc avec celui de la loi de Darcy.

En pratique il est bien évident que le champ d'action d'une technique analogique particulière dépendra étroitement :

- des caractéristiques du milieu conducteur utilisé
- des possibilités du montage électrique mis en œuvre

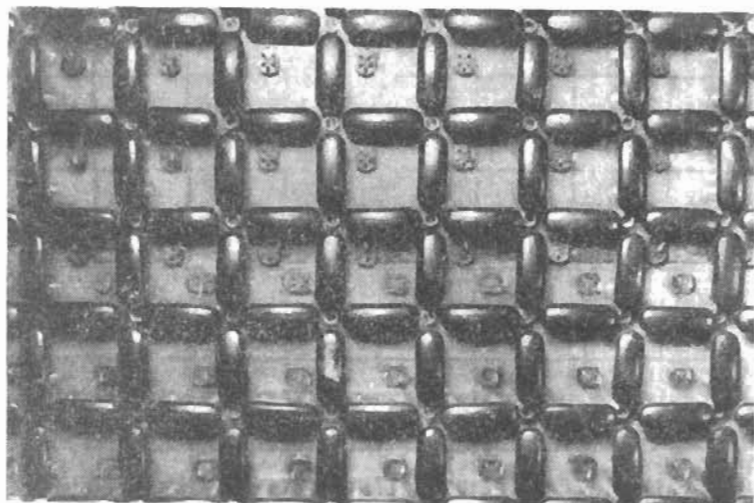


Fig. 2. Modèle analogique électrique : résistances élémentaires montées sur cavaliers enfilables.

En ce qui concerne les milieux conducteurs trois sont quasi exclusivement employés, principalement à cause de la relative constance de leurs propriétés électriques :

- . le papier graphité (encore dit papier conducteur ou «Télédelto»)
- . l'eau
- . les résistances linéaires

Ces milieux sont utilisés pour leurs propriétés de conductivité. Quand il est besoin de mettre en jeu des propriétés capacitives on leur adjoint dans tous les cas des capacités calibrées (composants électroniques classiques). La tendance moderne est d'utiliser presque exclusivement des composants

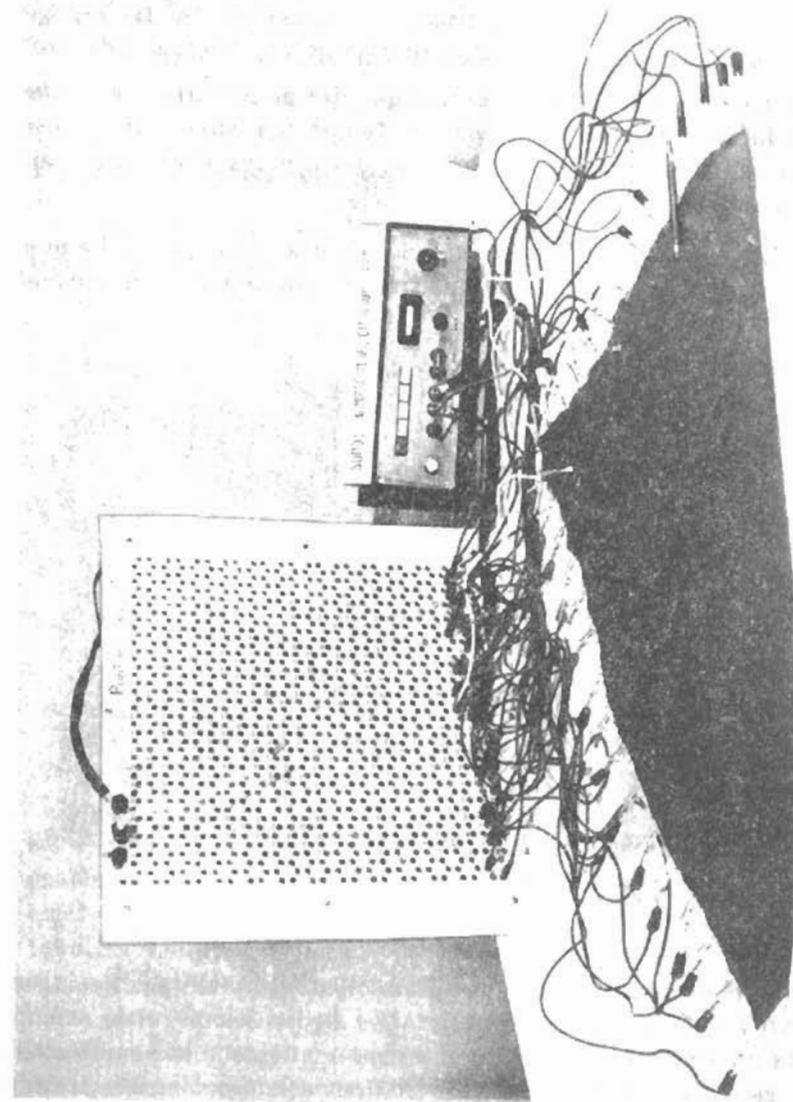


Fig. 3. Vue générale d'un montage «Télédelto».

électroniques (résistances et capacités) montés sur cavaliers enfichables sur des panneaux supports en circuits imprimés. On atteint ainsi le maximum de souplesse d'emploi en rendant très rapides toutes les opérations de construction et de modification du réseau (fig. 2).

Les montages peuvent être classés en deux grands groupes :

- ceux qui ne peuvent mettre en œuvre que des paramètres électriques (potentiels, intensités) constants dans le temps (en alternatif ou continu)
- ceux qui peuvent générer et enregistrer des signaux électriques variables dans le temps.

Les premiers sont limités à la simulation des seuls écoulements permanents, mais ils sont d'une très grande simplicité et peuvent être

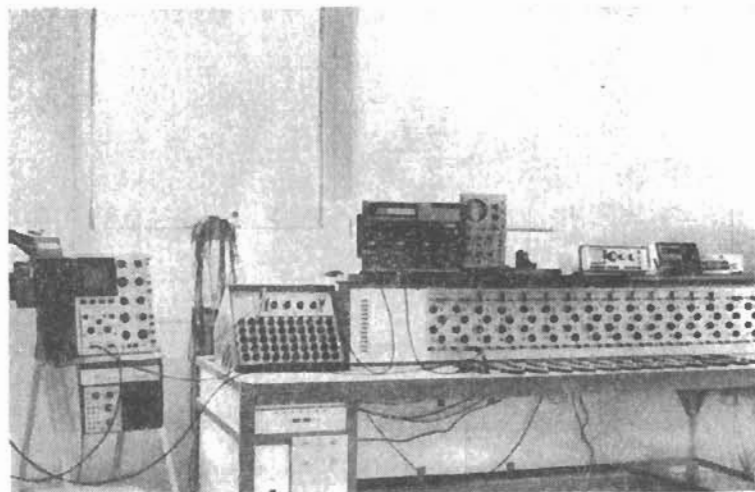


Fig. 4. Laboratoire d'analogie électrique.

réalisés sous une forme très compacte aisément utilisable par les ingénieurs d'études sur les lieux mêmes du projet. (La figure 3 montre un exemple de ce type de montage utilisant comme milieu conducteur le papier graphité).

Les seconds permettent la simulation des écoulements transitoires mais en revanche impliquent le recours à des équipements électroniques beaucoup plus complexes, qui ne peuvent être réunis qu'au sein d'un laboratoire spécialisé plus difficilement déplaçable. (La figure 4 montre quelques aspects d'un tel laboratoire).

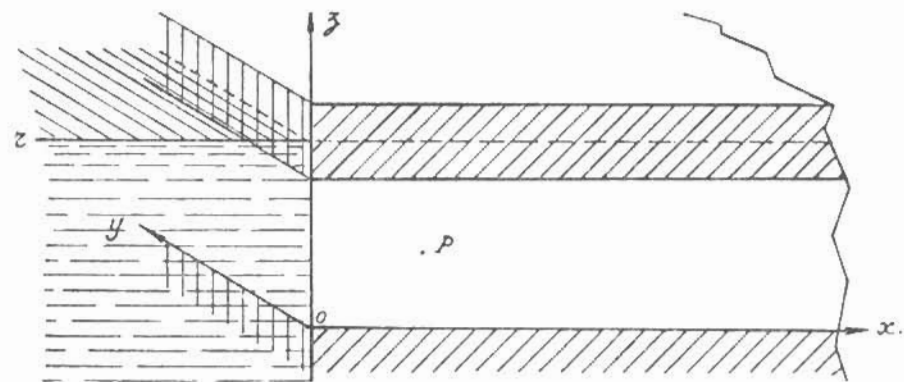
## 2.2. Les modèles numériques.

Nous avons vu que l'on peut désigner sous le terme de « modèle mathématique » toute méthode permettant d'obtenir une solution particulière de l'équation parabolique régissant le phénomène d'écoulement, ce qui laisse une gamme de possibilités assez étendue.

Toutefois ces méthodes peuvent être regroupées en deux grandes familles :

### 2.2.1. Les modèles analytiques.

Ils sont basés sur la manipulation numérique d'une équation analytique de forme explicite ( $y = f(\dots)$ ) solution particulière de l'équation



différentielle fondamentale. On connaît actuellement un nombre non négligeable de ces solutions particulières qui s'expriment à l'aide de fonctions algébriques élémentaires aisément calculables ou sont données sous forme tabulées. De plus du fait de la linéarité de l'équation parabolique on peut, à partir d'un catalogue de toutes les solutions particulières élémentaires connues, correspondant à un certain nombre de conditions, construire par combinaisons linéaires, un grand nombre de solutions nouvelles qui correspondent aux mêmes combinaisons linéaires des conditions aux limites.

Un exemple illustrera mieux la méthode : soit à étudier la propagation dans un milieu aquifère de l'influence d'une variation de niveau d'un plan d'eau libre adjacent à cet aquifère selon le schéma ci-dessous.

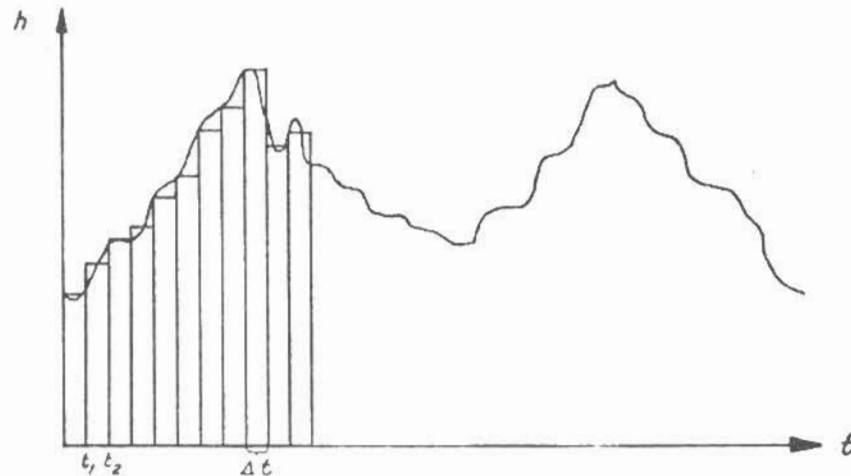
On sait que la solution de ce problème pour le cas où la variation de niveau dans le cours d'eau se fait par un saut brusque (de la cote 0 à la cote  $h_0$ ) s'écrit :

$$h(x, t) = h_0 \operatorname{erfc} \left( \frac{x}{2\sqrt{\frac{T}{S}t}} \right)$$

où le symbole  $\operatorname{erfc}$  représente la fonction erreur complémentaire définie par l'intégrale suivante :

$$\operatorname{erfc}(u) = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^u e^{-x^2} dx$$

Par ailleurs le théorème de superposition nous permet de faire la somme d'autant d'échelons que l'on désire pour obtenir la réponse de la nappe à une variation de niveau plus complexe.



Aussi le résultat précédent peut être directement étendu au cas réel de marées ou de crues de rivière. Il suffit de substituer à l'hydrogramme naturel autant d'échelons que l'on désire, ou tout au moins autant que la densité des points de mesure le montre utile. Le schéma ci-dessus permet de mieux comprendre cette substitution.

La précision de la coïncidence entre les deux représentations dépend de la régularité de la courbe et de la dimension des intervalles  $\Delta t$  choisis. Ce pas de temps  $\Delta t$  pourra d'ailleurs être pris aussi petit que l'on veut.

La superposition des effets des échelons élémentaires de (0) à (t) permettra de calculer la charge piézométrique à la distance  $x$  et à l'instant  $t$ .

$$h(x, t) = h_0 \operatorname{erfc} \left( \frac{x}{2\sqrt{\frac{T}{S}t}} \right) + \sum_{i=1}^{i=n/\Delta t} \Delta h_i \operatorname{erfc} \left( \frac{x}{2\sqrt{\frac{T}{S}(t-t_i)}} \right)$$

où

$$\Delta h_i = h_i - h_{i-1}$$

Ces calculs et le tracé des courbes qui en résultent peuvent être programmés et le «modèle analytique» ainsi constitué peut être utilisé pour étu-

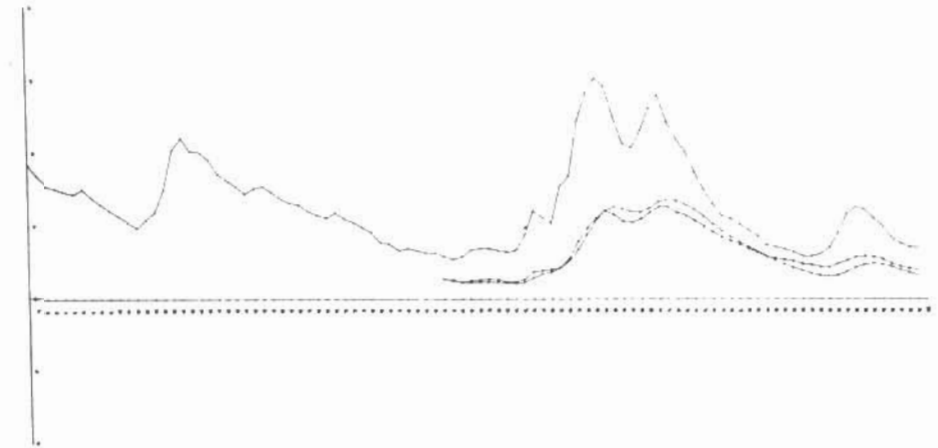


Fig. 5. Simulation des fluctuations d'une nappe alluviale par modèle mathématique analytique.

Abscisse en jours, ordonnées en mètres, R (+) niveau du cours d'eau, HM (X) niveau piézo mesuré, HC (triangle) niveau piézo calculé.

dier une gamme étendue de problèmes de propagation d'influences en nappes alluviales ou côtières.

La figure 5 donne un exemple de résultats obtenus avec un modèle de ce type.

On conçoit qu'il est possible d'imaginer une quantité quasi illimitée de modèles semblables en combinant les diverses solutions classiques de l'équation fondamentale de l'hydrodynamique (modèles d'interférences entre puits, d'analyse de l'effet barométrique sur les nappes etc...).

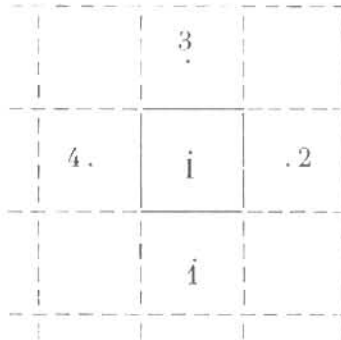
L'inconvénient de ces modèles est que chacun d'eux ne s'applique qu'à un type très bien défini de problèmes et à lui seul.



### 2.2.2. Les modèles maillés.

Ils sont basés sur l'intégration directe de l'équation différentielle du mouvement des fluides en milieu poreux par une méthode aux différences finies, au autrement dit sur un assemblage de volumes élémentaires auxquels on applique simplement les lois fondamentales qui régissent ces écoulements (conservation de la matière, loi de Darcy).

Soit par exemple pour un écoulement à deux dimensions en régime permanent (un maillage carré régulier) :



Pour la maille I noyée dans le réseau, le bilan s'écrit en fonction des valeurs dans les 4 mailles adjacentes (1, ..., J, 4)

$$Q_i = \sum_{j=1}^{J=4} T_i^j (H_i - H_j)$$

avec

$T_i^j$  transmissivité moyenne entre I et J  
 $H_i, H_j$  charges aux points I et J

En écrivant ce bilan pour chaque maille interne du domaine, à l'exclusion des mailles aux limites où sont affichées des conditions connues, on obtient un système linéaire qui s'écrit sous forme matricielle :

$$\|T\| \cdot |H| = |S.M.|$$

avec

$\|T\|$  matrice des transmissivités  
 $|H|$  vecteur colonne des charges piézométriques inconnues  
 $|S.M.|$  vecteur colonne second membre où figurent les débits imposés et les conditions aux limites

On pourra étudier Ann. 1 les modalités de constitution de ces différents éléments linéaires à partir d'un maillage.

Le vecteur  $|H|$  cherché s'obtient par :

$$|H| = \|T\|^{-1} \times |S.M.|$$

En termes d'analyse numérique on est ramené à un problème d'inversion de matrice (la matrice  $\|T\|$ ), sans entrer dans le détail, nous dirons que c'est un problème dont la complexité dépend :

- de la taille du système c'est-à-dire du nombre de mailles du réseau
- du conditionnement de la matrice  $\|T\|$  (place respective des termes nuls et non nuls), lui-même lié à la forme et au mode de juxtaposition des mailles élémentaires (le cas conduisant au meilleur conditionnement étant celui des mailles carrés régulièrement assemblées).

En régime transitoire le problème est plus compliqué car il faut discrétiser à la fois l'espace et le temps. On trouvera en annexe le rappel de quelques notions théoriques fondamentales et en particulier l'introduction de certains termes très couramment employés par les spécialistes de modèles mathématiques et qui ne devraient pas, nous le pensons, demeurer totalement obscurs aux yeux des maîtres d'œuvres, car ils permettent souvent de définir assez bien les performances et les limitations des méthodes proposées.

### 2.2.3. Performances des modèles mathématiques.

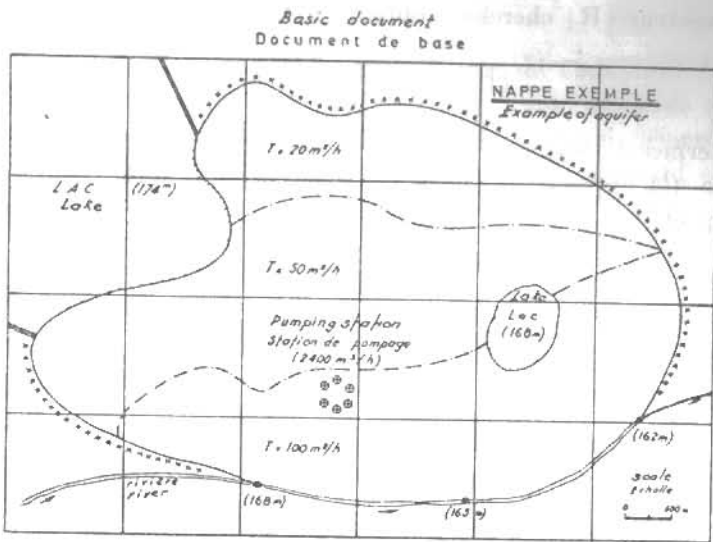
En théorie on voit peu de limitations au champ d'action des modèles mathématiques. Ils permettent de s'adapter à tout problème d'écoulement pour lesquels on dispose de lois élémentaires connues et à tous les types de conditions aux limites à partir du moment où on peut les exprimer en termes logiques (voir chapitre 5.). La principale limitation pratique vient du nombre de place disponible dans les mémoires de l'ordinateur employé qui entraîne une contrainte sur le nombre de mailles que l'on peut prendre pour discrétiser le domaine d'écoulement.

Actuellement avec les grands ordinateurs (IBM 360, CDC 6 600 par ex.) des modèles de plusieurs milliers de mailles sont réalisables sans difficulté. Le millier paraît, quand c'est possible, être un optimum.

D'autre part, la simulation de phénomènes transitoires compliqués et longs s'avère parfois coûteuse du fait de la nécessité d'avoir recours à un découpage très fin du temps.

En définitive, ces derniers temps, l'effort des concepteurs de modèle a porté sur :

— l'amélioration de la commodité d'emploi



Présentation du problème

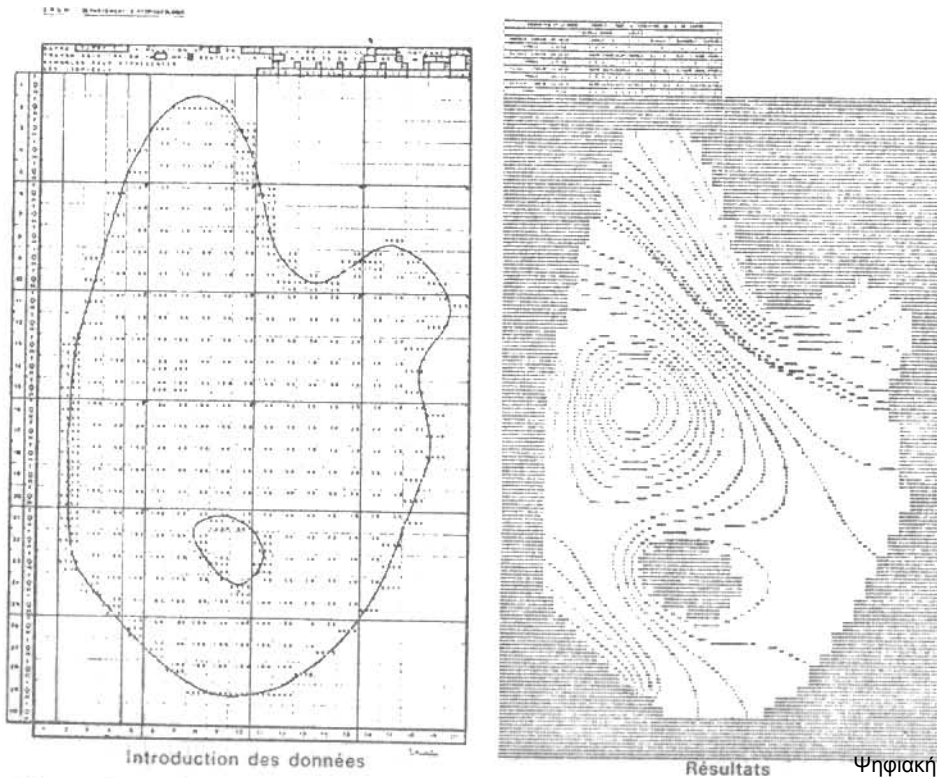


Fig. 6. Exemple d'emploi d'un modèle mathématique aux différences finies pur le traitement d'un problème d'hydrogéologie.

Elle a pu être obtenue par :

- . la mise au point de procédures standards d'introduction des données qui permettent le traitement par un même «modèle général» de tous les cas particuliers par simple changement des cartes de données
  - . l'utilisation de sous-programmes de présentation des résultats (graphiques, tableaux, cartes, etc...). La figure 6 résume les différentes étapes du traitement d'un problème hydrogéologique par un tel modèle.
- L'économie du temps de calcul

C'est un objectif plus difficile à atteindre. On peut y parvenir par plusieurs voies dont, essentiellement :

- . la réduction du nombre de mailles au strict minimum nécessaire, ce qui peut être atteint soit en utilisant des maillages irréguliers plus ou moins denses selon les zones du domaine, soit en réalisant des maillages emboîtés qui permettent de suivre les phénomènes à diverses échelles.
- . la recherche de méthodes numériques plus performantes.

### 2.3. Comparaison entre modèles.

Une comparaison générale entre modèles analogiques et modèles mathématiques peut être rapidement esquissée en se basant sur différents critères tels que :

—L'étendue des possibilités théoriques

Nous avons noté que le domaine d'application des modèles analogiques est à peu près strictement restreint à celui de la loi de Darcy tandis que celui des modèles mathématiques est plus vaste. Nous y reviendrons encore au chapitre suivant.

—La taille des problèmes (défini par le nombre de mailles)

Il est certain que les modèles analogiques n'admettent pas de limitation sur ce point. On a vu des modèles de plusieurs dizaines de milliers de mailles (mais est-ce bien indispensable, ceci est une autre question). Pour les modèles mathématiques on est limité par la place disponible dans les mémoires de l'ordinateur sur lequel se fait les calculs.

Actuellement toutefois, avec les grands ordinateurs de la 3ème génération, des modèles de plusieurs milliers de mailles sont aisément réalisables sans difficulté.

—La commodité d'emploi pour les utilisateurs

Les réseaux analogiques modernes (c'est-à-dire sur circuits imprimés modulables, et à éléments enfichables) présentent une grande souplesse pour

l'introduction des données. Celle-ci est peut-être encore plus grande pour les modèles mathématiques qui ne nécessitent que la manipulation de cartes perforées.

De ce point de vue, les M.M. présentent également l'avantage de mieux se prêter à une dissémination géographique : ils peuvent être exploités en tout où on peut trouver un ordinateur assez puissant et en particulier aussi près que possible du lieu de séjour de l'équipe travaillant à l'étude du projet dans le cadre duquel il est mis en œuvre.

Au contraire les modèles analogiques ne peuvent être mis en œuvre que dans des laboratoires spécialisés.

—L'économie de réalisation et d'exploitation

Les deux méthodes de simulation nécessitent des investissements généraux non négligeables : en « matière grise » et matériel pour le montage d'un laboratoire d'analogie électrique, en matière grise principalement (il est difficile de prendre en compte le matériel informatique amortissable sur un plan plus général) pour la mise au point des programmes. Au stade de la réalisation d'un modèle particulier les frais de construction sont plus élevés en analogie (matériel consommable, mains d'œuvre pour le montage) qu'en mathématique (simple perforation de cartes).

En revanche l'exploitation des modèles analogiques est très peu onéreuse tandis que l'exploitation de certains modèles mathématiques compliqués peut entraîner des frais de calculs très élevés.

### 3. LES DOMAINES D'APPLICATION

Il semble d'après ce qui précède, que les méthodes de simulation permettent théoriquement de traiter tous les problèmes d'écoulement en milieu poreux.

En pratique il faut être plus nuancé car les difficultés de réalisation et de mise en œuvre des modèles et donc leur possibilité d'emploi dépendent quand même de la nature exacte du problème. De ce point de vue, on peut aisément établir la liste des principaux domaines d'application des techniques de simulation et apprécier pour chacun d'eux les difficultés que l'on rencontre et les limitations qui en découlent.

Dans le cadre des projets d'aménagement on se préoccupe en général d'abord de l'étude des grands réservoirs à eau douce pouvant constituer une source d'approvisionnement. Aussi un des domaines d'application les plus importants est celui de :

#### 3.1. La simulation des écoulements monophasiques à eau douce.

Dans cette famille le cas le plus simple et encore assez fréquent est celui de la nappes captive monocouche. C'est-à-dire le cas

de l'écoulement bidimensionnel sans variation des paramètres hydrauliques en fonction de la charge.

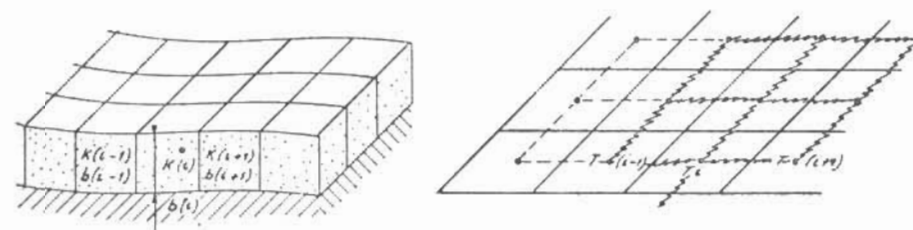
Il correspond tout à fait à l'échelle macroscopique au schéma présenté fig. 1 pour le cube microscopique élémentaire en remplaçant selon le schéma d, fig. 7 ce cube par un carré et la perméabilité  $K$  par la transmissivité  $T$  (avec  $T = Kb$ ,  $b$  épaisseur de l'aquifère).

La simulation d'un tel système ne présente plus aucune difficulté ni par modèle mathématique, ni par modèle analogique.

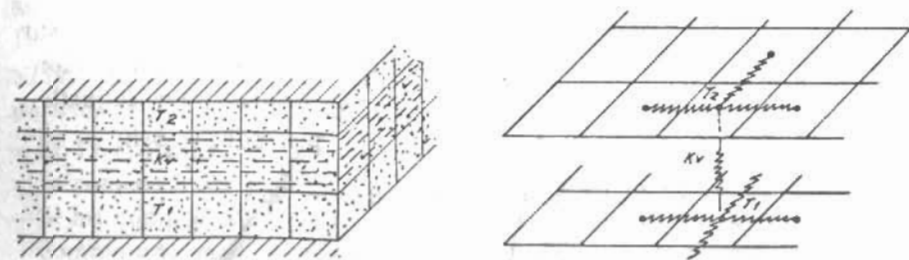
De la même façon, la simulation des systèmes captifs multicouches constitués par un empilement de couches aquifères réparées par des ensembles semi-perméables et que l'on rencontre assez fréquemment dans les grands bassins artésiens ne présente guère plus de difficultés, si ce n'est qu'on est alors conduit à concevoir des réseaux à grand nombre de mailles qui exigent le recours à des ordinateurs puissants si l'on veut opérer par simulation mathématique.

Enfin, toujours dans ce domaine des écoulements monophasiques, un cas très important et très souvent rencontré dans le cadre des études hydro-agricoles est celui des nappes phréatiques à surface libre.

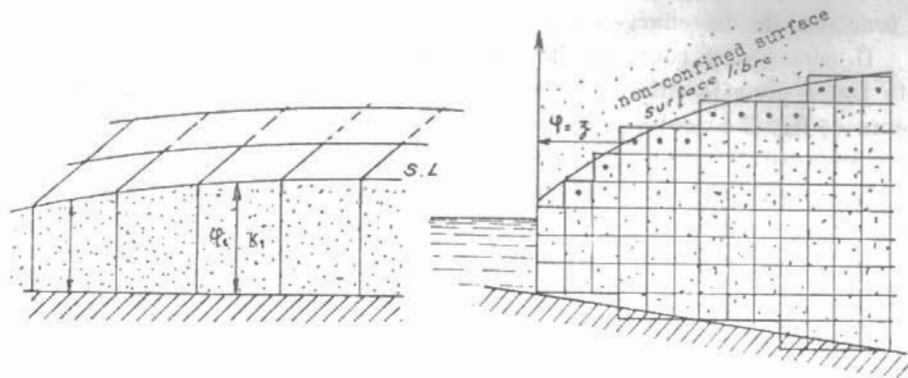
Ces nappes peuvent constituer soit une source d'alimentation, soit un domaine à assainir par drainage pour permettre une mise en valeur agricole.



a) Représentation d'un monocouche



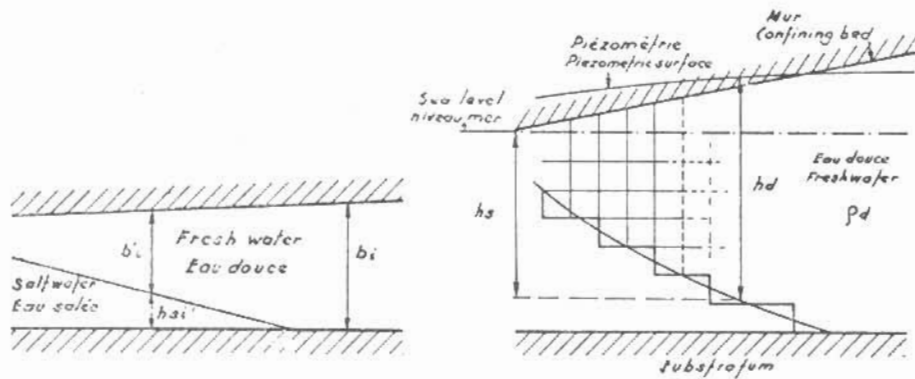
b) Représentation d'un multicouche



Surface libre peu inclinée: en chaque maille  $T_i = K_i H^i$  (hypothèse du Dupuit)

Surface libre inclinée (et substratum): on recherche sur un maillage bi- ou tridimensionnel la surface étanche pour laquelle  $H = z$

c) Représentation d'un écoulement à surface libre



biseau peu incliné: en chaque maille:  $T_i = K_i b_i$   
ou  $T_i = K_i (b_i - h_{s1})$

biseau incliné: on recherche sur un maillage bi-ou tridimensionnel la surface pour laquelle:  $p = \phi d h_d = \phi s h_s$

d) Représentation d'un biseau salé

Fig. 7. Les différents cas usuellement traités par modèle mathématique. - Ηλεκτρονική Βιβλιοθήκη "Θεόφραστος" - Τμήμα Γεωλογίας Α.Π.Θ.

Leur simulation est plus compliquée car alors les propriétés du milieu aquifère varient avec la hauteur de la surface libre, c'est-à-dire en fonction de la charge hydraulique, comme indiqué fig. 7c.

Selon les cas, on peut mettre en œuvre une des deux approches suivantes (illustrées également fig. 7c):

1. Si les conditions d'écoulement sont telles que les gradients verticaux restent toujours faibles (hypothèse de Dupuit) on exprimera que l'écoulement est bidimensionnel (dans un plan x,y), mais dans un milieu à transmissivité variable linéairement avec la charge en chaque point.

2. Si l'hypothèse de Dupuit ne peut être retenue il faudra simuler la surface libre comme un front mobile assujéti à vérifier une condition de charge (sur la surface libre on a:  $p=0$ , donc  $\phi = z$ ; fig. 7c).

Quelle que soit l'approche que l'on doit adopter on est conduit à utiliser une procédure itérative pour laquelle les modèles mathématiques sont les mieux adaptés. Toutefois cette nécessité se traduit par un accroissement des temps de calcul qui peuvent devenir très importants dans les cas les plus complexes. Heureusement ces derniers ne se présentent en général qu'au stade des études de détail (projets de systèmes de drainage par exemple) et n'intéressent que des domaines d'espace limités.

### 3.2. La simulation des écoulements diphasiques.

Pour certaines études on est conduit à envisager des écoulements diphasiques où l'eau douce constitue une des deux phases, la seconde pouvant être: soit de l'eau salée, soit de l'air.

#### 3.2.1. Les écoulements diphasiques eau douce - eau salée.

On a fréquemment à s'en préoccuper dans le cadre des projets d'aménagement des plaines côtières continentales, ou des îles de surface limitée côtières. Ils apparaissent au niveau du débouché des mers, des nappes à eau douce.

Leur étude est très importante en pratique, le phénomène d'intrusion saline est souvent une limitation à l'exploitation des aquifères à eau douce. Dans l'hypothèse où on admet que le contact entre l'eau douce et l'eau salée se fait par un interface net sans frange de diffusion on a affaire à un problème de front que l'on peut traiter comme celui de la surface libre:

- Si l'hypothèse de Dupuit est vérifiée (faible inclinaison du front) on se ramène à un problème monophasique avec variation de transmissivité.
- Si les composantes verticales ne sont pas négligeables, on traite l'interface comme une surface mobile assujéti à vérifier une condition sur la charge (voir fig. 7) et on procède par itération.

Pratiquement on a recours le plus souvent à des modèles mathématiques.

### 3.2.2. Les écoulements air-eau.

Ils se rencontrent dans la zone non saturée du sol qui surmonte toute nappe phréatique. Leur étude est très utile quand on veut déterminer avec précision l'influence d'un projet de drainage (désaturation des sols) ou celle d'un système d'irrigation.

Il faut toutefois bien reconnaître qu'au stade actuel la simulation de ces phénomènes présente bien des difficultés et que l'on n'y a qu'exceptionnellement recours.

## 4. LA METHODOLOGIE D'EMPLOI DES MODELES HYDROGEOLOGIQUES DANS LE CADRE D'UNE ETUDE D'AMENAGEMENT

### 4.1. Organisation générale d'une étude par modèles.

Selon une analyse désormais classique, on sait que le déroulement d'une étude par modèle peut se décomposer en 3 phases :

#### 4.1.1. La phase de collecte des données.

Elle consiste à faire la synthèse de toutes les connaissances acquises sur les ressources en eau souterraine du domaine à aménager :

— données géologiques  $\left\{ \begin{array}{l} \text{de surface} \\ \text{d'après des sondages} \\ \text{d'après la géophysique} \end{array} \right.$

Elles permettent de définir la nature et la géométrie du (ou des) système(s) aquifère(s) présentant une importance pour le projet. Ce système peut être composé de plusieurs aquifères de nature géologique différente dont on recherchera éventuellement les communications.

— données hydrodynamiques  $\left\{ \begin{array}{l} \text{mesures piézométriques} \\ \text{(cartes et historiques)} \\ \text{pompages d'essai} \end{array} \right.$

Elles permettent de définir les écoulements qui se produisent dans le système et les caractéristiques hydrodynamiques des aquifères (emmagasinement, perméabilité).

— données climatologiques et hydrologiques  $\left\{ \begin{array}{l} \text{précipitations} \\ \text{températures} \\ \text{jaugeages etc....} \end{array} \right.$

Leur étude a essentiellement pour but de définir les phénomènes d'échange entre les écoulements souterrains et l'atmosphère, (infiltration, évapotranspiration) ou les écoulements superficiels.

— données sur les régimes d'exploitation des nappes

Leur inventaire est évidemment nécessaire car les débits extraits constituent une des conditions aux limites importantes du système hydrodynamique.

— données concernant les objectifs d'utilisation (ou d'aménagement) de la ressource

La phase de collecte doit déboucher sur une analyse du problème permettant de définir le type de modèle à utiliser. En général, plusieurs modèles seront indispensables.

La phase de collecte doit se terminer par une analyse précise du système étudié qui permette de définir un schéma hydrodynamique susceptible d'une représentation par modèles. Nous disons : modèles (au pluriel) car en général la représentation détaillée de l'ensemble du schéma exigera le recours à plusieurs types de modèles plus ou moins indépendants, chacun intéressant une partie du système ou un aspect de son comportement. Nous appellerons ces modèles : modèles d'études.

#### 4.1.2. La phase de calage.

Après la phase de collecte on se trouve en présence de données de nature et de valeur inégale :

— d'une part des données caractéristiques du système géométrie, conditions aux limites, paramètres hydrodynamiques, etc... qui sont sans doute insuffisantes pour définir totalement le système et très souvent plus ou moins incohérentes du fait des erreurs de mesure ou d'interprétation.

— d'autre part des données concernant le comportement du système. En général elles sont incomplètes mais il est indispensable de les supposer suffisantes et faiblement entachées d'erreurs.

En effet le calage des modèles d'étude consistera à rechercher une bonne concordance entre les comportements observés et les comportements calculés en tâtonnant sur la valeur des paramètres caractéristiques (selon leur ordre de fiabilité).

Cette opération fondamentale exige l'emploi de modèles très souples faciles à mettre en œuvre et économiques (un grand nombre de passages est souvent nécessaire). On utilise donc le plus souvent des modèles généraux de

bibliothèque (voir Annexe 1). Il faut de plus que s'instaure un très bon dialogue entre les modélistes et les hydrogéologues qui ont travaillé sur le terrain; ceux-ci doivent en effet guider les opérations de tâtonnement qui permettront d'obtenir des modèles calés c'est-à-dire représentatifs. C'est encore un argument en faveur des techniques de mise en œuvre aisée et aussi décentralisables que possible.

#### 4. 1. 3. La phase d'élaboration d'un modèle de gestion. Son utilisation.

La finalité d'une étude par modèle est de permettre la prévision des influences que pourront avoir sur le système aquifère tous les aménagements envisagés dans le cadre du projet; et, en retour, d'en déduire le meilleur dispositif en regard des possibilités en ressources souterraines. Il faut donc disposer d'un modèle qui soit représentatif — c'est à dire qui ait été calé — et qui intéresse l'ensemble des ces ressources. On veut également dans la plupart des cas que ce modèle puisse être évolutif, c'est à dire que, laissé aux exploitants de l'aménagement dans le cadre duquel il a été conçu, il puisse être utilisé par la suite, pour étudier toute nouvelle modification des dispositifs d'exploitation de la ressource. On appelle généralement un tel modèle : « modèle de gestion ». Il est conçu par l'assemblage et la mise sous une forme aisément exploitable des divers modèles d'études utilisés pendant la phase de calage. Ainsi, il est assuré de présenter la meilleure représentativité possible et les responsables du projet d'aménagement, puis ensuite les responsables de la gestion de l'aménagement, pourront l'utiliser — et au besoin l'améliorer — afin de traiter tous les problèmes qui pourront se présenter, tels que par exemple :

— Définition d'un plan d'exploitation rationnelle des ressources en eau souterraine : ce plan peut avoir comme objectif l'exploitation maximale des ressources d'une nappe en tant que réservoir naturel alimenté par les eaux météoriques. Dans ce cas, l'objectif sera de déterminer les zones les plus favorables à l'implantation des captages, compte tenu de toutes les contraintes d'interférence.

Dans d'autres cas, le milieu aquifère peut être considéré comme un réservoir qui se remplit pendant les périodes d'hiver et se trouve encore plein lorsque le réseau superficiel est à l'étiage parce que l'eau s'écoule moins vite dans le milieu souterrain qu'en surface. L'objectif sera alors d'exploiter pendant les périodes sèches cette réserve disponible tout en tenant compte de certaines contraintes telles que, par exemple, maintenir le débit d'étiage de fleuves riverains du système au minimum nécessaire pour que ceux-ci restent solubles.

- Problèmes d'assainissement : dans certaines régions une nappe peut avoir tendance à affleurer pendant certaines périodes et un des buts de l'aménagement peut être d'assainir ces zones au moyen d'un dispositif approprié.
- Protection contre la pollution : certaines activités prévues au plan d'aménagement peuvent risquer de polluer des nappes et il faut étudier les moyens d'éviter toute propagation de pollution au sein d'un réservoir aquifère dont on veut utiliser l'eau par ailleurs. Ce type de problème se rencontre de plus en plus souvent dans les aménagements hydro-agricoles où on voit apparaître des pollutions non négligeables par les pesticides.

#### 5. CONCLUSIONS. QUELQUES TENDANCES ACTUELLES

Cet exposé a montré, du moins était-ce son but, que les modèles sont aujourd'hui un auxiliaire indispensable de toute étude d'aménagement hydro-agricole faisant appel à -ou devant avoir une influence sur - des ressources d'eau souterraine, c'est-à-dire la grande majorité. Etant donné la grande variété de problèmes qu'ils peuvent aborder dans des conditions de commodité d'emplois et d'économie très acceptables, les modèles permettent, en effet, de prévoir toutes les conséquences qu'aura un projet, sur l'ensemble du système hydrogéologique qu'il peut influencer à des titres divers.

La plus grande difficulté à laquelle se heurte l'équipe — hydrogéologues et hydrodynamiciens spécialistes de simulation — chargée de livrer aux responsables du projet d'aménagement d'abord puis ensuite éventuellement aux gestionnaires, un modèle réellement utilisable, est d'assurer la représentativité par un bon calage préliminaire. Cette recherche d'une représentativité aussi parfaite que possible exige assurément et exigera toujours le recueil de mesures physiques suffisamment précises et nombreuses par un travail d'opérations sur le terrain qui devrait être conduit dans la perspective d'un recours ultérieur aux modèles et guidé au moins quant à ses objectifs par un spécialiste de l'emploi des modèles. En effet, le volume, la précision, la nature même des mesures nécessaires évoluent sans cesse avec les perfectionnements des techniques de simulation.

Ainsi actuellement, nous avons vu que la recherche de représentativité des modèles, se fait par une procédure empirique, par essai et erreur. Une telle procédure exige quant aux mesures à la fois des données concernant le comportement des systèmes (historiques de piézométrie et débits essentiellement) et des données concernant ses caractéristiques physiques; quant aux techniques de simulation, elle nécessite des outils commodes et économiques. C'est une des tendances modernes de vouloir satisfaire ces dernières exigences en perfectionnant sans cesse les qualités des simulateurs classiques mathé-

matiques ou analogiques, voire de tenter de cumuler les avantages des deux techniques dans des montages «hybrides».

Une autre tendance, tout à fait différente, est de rechercher à mettre au point des techniques dites «inverses» dont l'objectif est d'identifier les paramètres caractéristiques des systèmes aquifères par la seule connaissance de données de comportement et d'assurer ainsi automatiquement le calage des modèles directs. On conçoit que l'avantage de telles méthodes serait de minimiser le nombre des mesures directes des «paramètres caractéristiques» dont l'acquisition est la plus coûteuse ou la plus difficile (perméabilité, emmagasinement, infiltration par exemple). Les recherches dans ce domaine n'en sont qu'à leurs débuts mais ont déjà donné quelques résultats prometteurs.

Enfin, il est évident que les modèles de simulation physique qui viennent d'être présentés permettent, (étant définie une politique de gestion des ressources en eau), de vérifier qu'elle est techniquement satisfaisante et d'en chiffrer le coût, (voire par tâtonnement, de rechercher parmi un ensemble de possibilités une solution relativement optimale). Il serait très souhaitable de disposer également de modèles à fondements plus économiques qui, sans négliger les données physiques, permettraient de déterminer directement quelle est la meilleure politique de gestion des eaux d'un bassin.

C'est la mise au point de tels modèles que s'attaquent actuellement la plupart des organismes spécialisés dans l'hydrologie quantitative. Mais il faut bien souligner que les modèles, pourrait-on dire classiques, qui viennent d'être rapidement évoqués ici, constituent un acquis fondamental et seront toujours nécessaires pour les études précises de prévision.

#### L I T É R A T U R E

- BRUCE, S. P. - CLARK, R. H. 1966.— *Introduction to Hydrometeorology*. Pergamon Press, London.
- CHOW, V. T. 1964.— *Handbook of applied Hydrology*. McGraw-Hill, New York.
- LINSLEY, R. K. - KOHLER, M. A. - PAULHUS, J. L. H. 1949.— *Applied Hydrology*. McGraw-Hill, New York.
- LINSLEY, R. K. - KOHLER, M. A. - PAULHUS, J. L. H. 1958.— *Hydrology for engineers*. McGraw-Hill, New York.
- WILSON, E. M. 1969.— *Engineers Hydrology*. Macmillan, London.
- WEATHER BUREAU 1967.— *Office of Hydrology: Elements of River Forecasting* Washington, D. C., October, 1967.
- WORLD METEOROLOGICAL ORGANIZATION.— *Guide to Hydrometeorological Practices*. No 168 TP. 82 Geneva 1970.
- WORLD METEOROLOGICAL ORGANIZATION.— *Hydrological Forecasting*. No 228. TP. 122, Geneva 1969.

## ANNEXE I

UN EXEMPLE DE POLITIQUE D'EMPLOI DES MODELES MATHEMATIQUES  
PAR UN SERVICE PUBLIC D'HYDROGEOLOGIE :

## LES MODELES DU B. R. G. M.

Dans le cadre du développement très rapide des applications des techniques de l'informatique aux diverses branches de la géologie appliquée, le B.R.G.M. qui dispose d'un centre de calcul propre et d'un département d'informatique spécialisé, a au cours des dernières années, élaboré une bibliothèque de programmes variés utilisables en hydrogéologie et comportant un ensemble complet de modèles mathématiques généraux. La conception et l'utilisation de ces modèles comme celle de l'ensemble du «software» employé par les hydrogéologues sont décentralisées :

Au département Géologie de l'aménagement qui est responsable de l'hydrogéologie au sein du Service géologique national, une équipe spécialisée dans les problèmes d'informatique spécifiques à ce département étudie et met au point une bibliothèque de programmes généraux dont les entrées-sorties sont suffisamment simples et explicites pour qu'elle puisse être utilisée par des ingénieurs non spécialisés en informatique. De plus, les programmes sont écrits en langage FORTRAN (le plus répandu en programmation scientifique) de niveau basique (donc compatible avec les divers types d'ordinateurs).

Dans les Services géologiques régionaux, des hydrogéologues de terrain sont capables, dans la plupart des études locales faisant appel à un traitement informatique standard, de réaliser eux-mêmes leurs modèles en faisant passer les programmes généraux sur un ordinateur (ou un terminal) implanté à proximité, avec le conseil, si besoin, d'un ingénieur hydraulicien du siège, plus spécialisé.

La conception et la mise en œuvre des modèles d'étude des problèmes posés par la dynamique des écoulements souterrains nécessite une collaboration particulièrement étroite entre hydrogéologues, hydrauliciens et numériciens. C'est pourquoi il a été jugé préférable de confier la réalisation et la maintenance du software spécifique aux problèmes d'hydrogéologie, plutôt à des physiciens et naturalistes (hydrauliciens, hydrogéologues) qu'à des mathématiciens purs.

Les principaux développements de l'informatique dans ce domaine, concernent les modèles mathématiques de simulation des écoulements. Pour conserver à ces modèles toute leur souplesse et leur mobilité qui constituent leurs principaux avantages par rapport aux modèles analogiques, c'est-à-dire en assurer la plus large diffusion auprès des utilisateurs sans pour autant



imposer à ceux-ci qu'ils deviennent des spécialistes en calcul numérique, le B.R.G.M. a travaillé avec l'organisation suivante :

a) Etude et mise au point au centre scientifique (Orléans) des principales méthodes numériques utilisables pour les simulations physiques. Actuellement sont utilisés de façon courante les programmes de base qui permettent de traiter les écoulements monophasiques à deux ou trois dimensions en régime permanent ou transitoire, en nappe libre ou captive.

Un certain nombre de programmes sont opérationnels et des recherches se poursuivent pour simuler les écoulements diphasiques (biseaux salés, propagation et dispersion d'un mélange polluant, milieux non saturés) les écoulements en milieux fissurés et les phénomènes de transferts thermiques et hydrodynamiques couplés.

b) Elaboration et diffusion auprès des hydrogéologues utilisateurs de modèles généraux aux performances volontairement limitées (quoique suffisantes pour couvrir un domaine d'applications pratiques étendu) mais peu coûteux et d'une utilisation très simple, surtout en ce qui concerne la préparation des données.

Ces programmes sont généraux : on passe d'un cas particulier à un autre par simple changement des cartes paramètres, sans modifier en rien la programmation. Par ailleurs, la procédure d'introduction des données est standardisée et autant que possible commune à plusieurs programmes. Elle se matérialise par des bordereaux préimprimés sur lesquels il suffit de reporter les données correspondant à chaque cas. De plus, la conception de la plupart de ces programmes est modulaire : on peut traiter des problèmes de dimensions variables en assemblant plusieurs bordereaux soit en plan, soit par superposition (systèmes multicouches).

Ainsi, il est aisé de traiter un problème de simulation à l'aide de programmes de plus en plus raffinés en gardant un même jeu de données de base comme nous le montrons ci-après dans une description rapide des programmes disponibles actuellement.

## 1. Modèles à maillage régulier pour les études de nappes.

### 1.1. Le modèle élémentaire DROUS.

Ce modèle permet la simulation des écoulements permanents bidimensionnels (hypothèse de Dupuit) en milieu hétérogène. Il a été conçu pour être mis en œuvre sur un ordinateur de très faible capacité (IBM 1130) mais n'en permet pas moins de traiter jusqu'à 600 mailles.

### 1.2. Les modèles permanents dérivés de DROUS.

Le modèle DRPER s'applique à la même classe d'écoulements que DROUS, mais il permet l'assemblage de plusieurs modules élémentaires de 600 mailles (4 modules tiennent dans une mémoire de 68 K octets) afin d'obtenir une discrétisation plus fine.

Le modèle DRPLIBY est une extension des modèles précédents qui prend en compte les variations de transmissivité induites par de fortes variations du niveau piézométrique dues à l'exploitation intensive d'une nappe libre ou localement dénoyée. Il faut toutefois introduire des données supplémentaires : cotes du substratum et du toit de l'aquifère en chaque maille.

L'adjonction du sous-programme BISEAU permet d'étendre les applications de DRPLIBY au traitement des intrusions salines en bordure de mer (en hypothèse de Dupuit).

### 1.3. Les modèles transitoires.

Le modèle DRTRA sert à simuler les écoulements transitoires bidimensionnels en milieu hétérogène mais à transmissivité indépendante du temps. Par rapport aux précédents, il nécessite l'introduction de données supplémentaires : emmagasinement, évolution dans le temps des pompages et des conditions aux limites. Cependant, la procédure d'introduction des données a été autant que possible conservée, et les dimensions du module de base ont été réduites (300 mailles au lieu de 600) afin de permettre une plus grande variété de formes et de dimensions des domaines.

Le modèle DRAQUA a est une extension de DRTRA à des problèmes transitoires non linéaires. Il permet en particulier :

- . un substratum de forme quelconque
- . des variations de position des limites à flux nul au cours du temps (assèchement local et temporaire de la nappe en période de basses eaux)
- . des dénoyages ou mises en charge locaux de la nappe avec leurs conséquences sur la valeur des transmissivités
- . des affleurements locaux et momentanés de la nappe (lac, rivière, gravière, réseau de drainage etc.).

## 2. Modèles d'écoulement au voisinage des singularités.

A côté de ces modèles prévus essentiellement pour la simulation d'écoulements monophasiques dans des domaines assez vastes (systèmes aquifères) il faut pouvoir disposer de modèles permettant des études plus détaillées à

grande échelle au voisinage des singularités : fouilles, puits, ouvrages d'art etc. C'est un domaine qui est commun à l'hydrogéologie et à la géotechnique.

Ces modèles exigent un mode de discrétisation très souple afin d'obtenir une bonne définition au voisinage des singularités (zones à fort gradient), tout en ayant des mailles de taille raisonnable au loin.

Dans ce cas, on utilise généralement un modèle par éléments finis qui est basé sur une discrétisation par triangles de tailles irrégulières. En contrepartie, on ne peut plus représenter directement la géométrie du maillage sur un bordereau standard tel que celui présenté avec le programme DROUS. Toutefois, la procédure de définition du maillage, d'introduction et de vérification des données est tout à fait automatisée par recours au lecteur et au traceur de courbes; c'est le cas du programme ELFES élaboré au B.R.G.M., qui dispose par ailleurs des programmes par éléments finis mis au point à l'Université de Californie : CONFINE (calcul des écoulements permanents et transitoires en plan horizontal par la méthode des éléments finis) et WELLHYD pour l'hydraulique des puits.

Un autre procédé consiste à mettre en œuvre des modèles gigognes qui détaillent le champ des pressions autour des singularités.

### 3. Modèles à front pour l'étude des écoulements diphasiques.

Ils traitent les écoulements à front mobile (surface libre, biseaux salés et fronts de pollution).

CAID qui calcule en régime permanent les interfaces eau douce-eau salée et air-eau en coupe verticale par une méthode aux différences finies.

ELFES, déjà cité, résout les mêmes problèmes mais par la méthode des éléments finis qui, moyennant une préparation des données plus laborieuse, apporte une plus grande précision dans les résultats. Dans ce programme, le nombre de mailles livrées à l'écoulement de l'eau douce reste constant; on déforme le maillage au cours de l'itération, sans enlever de maille.

Les programmes FREESURF I et FREESURF II élaborés par l'Université de Californie réalisent les mêmes calculs pour des régimes permanent et transitoire, avec des directions principales du tenseur de perméabilité qui peuvent être obliques.

CELT résout les problèmes d'écoulements avec surface libre de la même façon que CAID, mais en prenant en compte les trois dimensions de l'espace. Les cartes piézométriques calculées sont présentées par plans horizontaux et coupes verticales.

POPOF traite l'évolution d'un front de pollution dans un écoulement hydraulique permanent, simulé par le modèle DRPER ou DRPLIBY auquel POPOF s'enchaîne : Il fournit les positions du front moyen à des instants

successifs et, pour un point donné de la nappe, l'évolution dans le temps des concentrations en polluant sous l'effet de la convection et de la dispersion.

### 4. Autres calculs numériques appliqués à l'hydrodynamique.

Bien souvent, lorsqu'un calcul doit être répété systématiquement pour un grand nombre de données différentes, il est avantageux d'écrire un programme une fois pour toutes.

C'est ainsi que :

- la série des programmes PUIITS calcule les rabattements créés par un champ de forages de disposition quelconque en tout point d'un milieu homogène et isotrope, infini ou limité par deux droites parallèles (application répétée de la formule de Theis avec une série d'images).
- les programmes HYGP 1 et HYGP 2 identifient les paramètres régissant la propagation d'une influence à partir d'un plan d'eau libre (généralement une rivière) puis servent d'outil de prévision.

En ce qui concerne les pompages d'essai, le traitement automatique des mesures ne poserait a priori aucun problème sur le plan purement numérique. Mais l'expérience a prouvé que la plupart des pompages d'essai doivent être considérés comme des cas particuliers difficilement réductibles à des stéréotypes; c'est pourquoi, au B.R.G.M. tout au moins, leur interprétation reste du domaine «manuel». L'hydrogéologue est cependant aidé dans sa tâche par un programme de tracé automatique de courbes sur papier transparent, à l'échelle des abaques, en axes cartésiens semi-log ou log-log.

### 5. Modèles économiques.

En ce qui concerne les calculs économiques liés à l'utilisation des ressources en eaux souterraines, le B.R.G.M. a avancé dans deux voies :

- a) Calcul du coût d'exploitation pour un équipement donné : prise en compte du coût du forage, du coût de l'énergie des débits d'exhaure, des rabattements (calculés pour un modèle hydrodynamique classique)...
- b) Mise en œuvre de méthodes automatiques de recherche d'une exploitation optimale.

Les développements en cours d'élaboration visent à déterminer par le calcul l'implantation optimale des captages et la répartition des débits, par des méthodes de programmation en variables mixtes et de programmation non-linéaire.

TABLEAU I

Schéma d'une stratégie d'emploi des modèles de la bibliothèque BRGM pour l'établissement de modèles de gestion de nappe.

Phase d'étude	Echelle	Opération	Modèles utilisés
1ère phase Recherche d'un (ou de) modèle(s) représenta- tif(s)	Petite (l'ensemble de la nappe)	Calage en région per- manent (reproduction d'états piézométriques stabilisés)	DRPER (ou PETRI si multicouche)
		Calage en régime transi- toire (reproduction d'évolutions piézomé- triques sur des courtes périodes)	DRTRA
	Grande (voisinage singularité)	Calage au voisinage de singularités existantes où l'on dispose d'obser- vations	Modèles DRPER ou DRTRA inscrits dans le modèle général (mo- dèles gigognes) ou modèles CAID ou ELFES
2ème phase Prévision	Petite	Prévision d'états finaux (régime permanent)	DRPER (rabattements faibles) DRPLIBY (forts rabat- tements)
		Prévision d'évolutions (régime transitoire)	DRTRA (rabattements faibles) DRAQULA (forts ra- battements)
		Evolution de front	POPOF
	Grande (Etudes détaillées au voisinage des ouvrages)	Surfaces libres au voi- sinage de singularités	ELFES ou CAID
		Ecoulements tridimen- sionnels	PETRI, DROPP
		Biseau salé	ELFES
		Espacement de puits	PUITS

D'ores et déjà des outils généraux utilisant la programmation linéaire ont atteint le stade opérationnel. Ils permettent de déterminer, pour une implantation connue des captages, le débit maximal que l'on peut extraire de la nappe par ce dispositif sans dépasser des rabattements extrêmes fixés par l'utilisateur en certains points névralgiques. Une autre version de ces programmes permet de chercher la répartition des débits conduisant au coût d'exploitation minimal pour un débit d'exhaure fixé et des rabattements limites à ne pas dépasser.

Il s'agit des programmes PLV et OPPER, qui doivent être liés à un programme de simulation linéaire tel que DRPER.

#### 6. Stratégie d'emploi de la bibliothèque B. R. G. M. pour la mise au point de modèles de gestion.

La disponibilité immédiate de la gamme des modèles permet la mise en œuvre rapide et économique d'une stratégie progressive d'étude des nappes par modèle, allant depuis les phases de calage jusqu'à une phase de prévision d'influence d'ouvrages nouveaux sur un ou des modèles jugés représentatifs, c'est-à-dire la mise en place de modèles de gestion. Le tableau ci-contre résume les différentes étapes de cette stratégie avec en regard les outils disponibles pour le cas le plus fréquent d'un aquifère monocouche (sauf peut-être localement dans certaines zones de son bassin).

Il est évident que toutes les étapes indiquées ne sont pas indispensables pour chaque nappe. Le schéma proposé constitue une synthèse enveloppant la plupart des éventualités.

A l'inverse, il peut se trouver certains cas nécessitant des opérations non prévues et le recours à des phases de mise au point de modèles plus spécifiques dont il ne faut pas alors se détourner. Au contraire, nous pensons que l'acquis actuel en «programmes généraux» permet de minimiser le nombre de ces opérations dans une étude complète et donc d'y consacrer toute l'attention nécessaire.

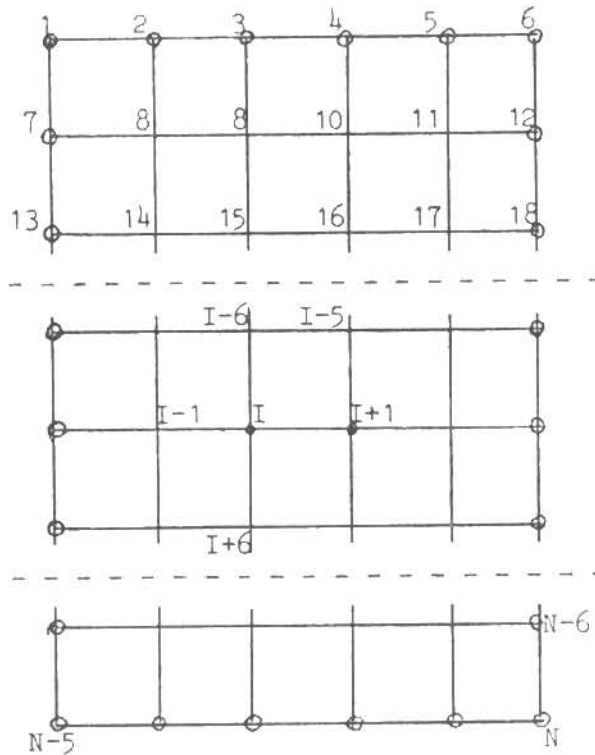
## ANNEXE II

GENERALITES THEORIQUES SUR LES MODELES  
MATHEMATIQUES AUX DIFFERENCES FINIES

## 1. EN REGIME PERMANENT

Montrons comment à partir de la formulation de l'équation du bilan appliquée à chaque maille (voir p. § 2.2.2.) on peut obtenir une équation matricielle valable pour l'ensemble du domaine.

Soit par exemple le réseau schématisé suivant constitué par  $N$  noeuds avec une condition de pression imposée sur la limite ( $H_1, H_2, \dots, H_6, H_7, \dots, H_{12}, H_{N-5}, \dots, H_N$  fixés, soit  $N_1$  points à condition imposée).



O : points à pression imposée.

Dans ces conditions et avec le système de numérotation choisi on a si on admet, pour simplifier, le milieu homogène le système d'équations suivant :

$$\begin{aligned} -4H_8 &+ H_9 + H_{14} &= (q_8 - H_2 - H_7)/T \\ -4H_9 &+ H_{10} + H_{15} + H_8 &= (q_9 - H_3)/T \\ \dots &\dots &\dots \\ -4H_I &+ H_{I-6} + H_{I+1} + H_{I+6} + H_{I-1} &= q_I/T \\ -4H_{N-7} &+ H_{N-13} &+ H_{N-8} = (q_{N-7} - H_{N-6} - H_{N-1})/T \end{aligned}$$

Soit  $N-N_1$  equation ( $N$  nombre de noeuds,  $N_1$  nombre de points à charge imposée)  
ou encore en écriture matricielle

$$\begin{pmatrix} -4 & +1 & 0 & 0 & 0 & 0 & +1 \\ +1 & -4 & +1 & 0 & 0 & 0 & 0 & +1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & +1 & -4 & +1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & +1 & 0 & 0 & 0 & 0 & +1 & -4 \dots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} H_8 \\ H_9 \\ H_{10} \\ H_{11} \\ H_{14} \\ H_{15} \\ \dots \\ \dots \\ H_1 \\ \dots \\ \dots \\ H_{N-7} \end{pmatrix} = \frac{1}{T} \begin{pmatrix} q_8 - H_2 - H_7 \\ q_9 - H_3 \\ \dots \\ \dots \\ q_1 \\ \dots \\ \dots \\ q_{N-7} - H_{N-6} - H_{N-1} \end{pmatrix}$$

Soit  $\|A\| \cdot |H| = |S.M.|$

avec

$\|A\|$  matrice pentadiagonale représentant la perméabilité du réservoir (en milieu hétérogène on aurait des valeurs de  $T$  au lieu des chiffres  $-4, +1$ )

$|H|$  vecteur colonne piézométrie

$|S.M.|$  matrice rectangulaire chargée avec les débits en chaque noeud et les potentiels imposés.

Pour trouver  $|H|$  (piézométrie) connaissant  $\|A\|$  (transmissivité du réservoir, ici supposée homogène) et  $|S.M.|$  (débits et conditions aux limites) il suffit d'écrire

$$|H| = \|A\|^{-1} \cdot |S.M.|$$

On est donc ramené à un problème d'inversion de matrice. C'est à ce niveau qu'on entre dans le domaine des techniques du calcul numérique.

Sans entrer dans le détail nous dirons seulement que pour réaliser cette inversion on peut utiliser

- soit une méthode directe qui nécessite l'emploi de gros ordinateur et des matrices de faible dimension (moins de 1000 noeuds) mais ne pose pas de problèmes de convergence
- soit une méthode itérative qui s'accommode mieux de petits ordinateurs et de matrices de grande taille mais pose en revanche des problèmes de convergence.

Quoiqu'il en soit la simulation des écoulements permanents est assez simple et ne fait appel qu'à des techniques très classiques du calcul numérique.

## 2. EN REGIME TRANSITOIRE

Le problème est plus complexe car il faut discrétiser à la fois l'espace et le temps.

Dans ce cas il vaut mieux partir de l'équation de base :

$$\operatorname{div}(\vec{T} \operatorname{grad} H) = S \frac{\partial H}{\partial t} + Q$$

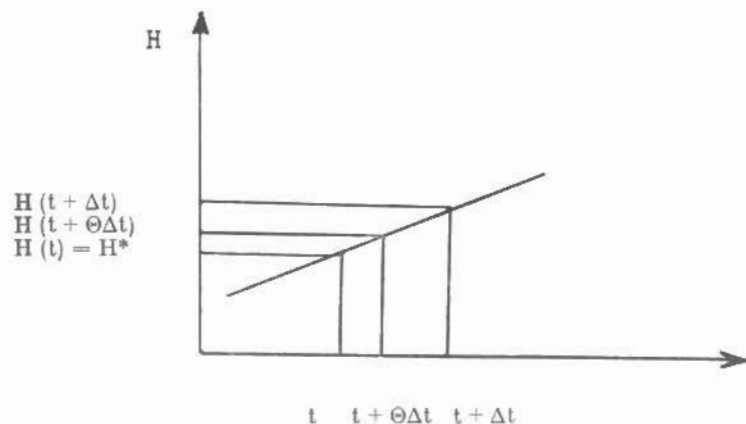
Pour simplifier l'exposé plaçons nous dans le cas d'un écoulement unidimensionnel. On a alors :

$$\frac{\partial^2 H}{\partial x^2} = S \frac{\partial H}{\partial t} + Q$$

Posons

$$\begin{aligned} H(t) &= H^* \quad (\text{connu}) \\ H(t + \Delta t) &= H \quad (\text{inconnu}) \end{aligned}$$

Avec la définition du paramètre  $\Theta$  ( $0 < \Theta < 1$ ) explicité par la figure ci-dessous



on a :

$$\frac{\partial^2 H}{\partial x^2}(t + \Theta \Delta t) = S \frac{(H - H^*)}{\Delta t} + Q(t + \Theta \Delta t)$$

soit pour le premier membre

$$\frac{2H(x, t + \Theta \Delta t) - H(x + \Delta x, t + \Theta \Delta t) - H(x - \Delta x, t + \Theta \Delta t)}{\Delta x^2} = S.M.$$

Mais on a (Th. de Thalès)

$$H(x^*, t + \Theta \Delta t) = \Theta H(x, t + \Delta t) + (1 - \Theta) H(x, t)$$

Soit en prenant la notation simplifiée pour H

$$\begin{aligned} H \cdot \left( \frac{2\Theta}{\Delta x^2} + \frac{S}{\Delta t} \right) - \left[ (H(x + \Delta x) + H(x - \Delta x)) \frac{\Theta}{\Delta x^2} \right] = \\ = - \frac{SH^*}{\Delta t} + Q + (\text{terme en } H^*) (1 - \Theta) \end{aligned}$$

Pour résoudre le système d'équations obtenu en écrivant cette relation pour chaque point de l'espace discrétisé ( $x = x_1, x_2 \dots x_n$ ) deux méthodes :

### A. Méthode explicite

Si on fait dans l'expression ci-dessus  $\Theta = 0$  il vient pour chaque point une expression de la forme  $H(x) = \text{second membre connu}$ .

La méthode est donc très simple; la valeur de H en chaque point se calcule explicitement en fonction des valeurs  $H^*$  (connues) du pas de temps précédent.

Mais la méthode est instable si on prend un pas de temps  $\Delta t$  trop grand : il faut  $\Delta t < \frac{1}{2} \frac{S}{T} \Delta x^2$

La précision est inconnue.

### B/ Méthode implicite

Si on fait  $\Theta \neq 0$

on a une méthode implicite : la valeur de H en chaque point s'exprime en fonction des valeurs également inconnues de H aux points adjacents. On est ramené à un système de forme semblable à celle obtenue pour le régime permanent. La résolution implique donc une inversion de matrice.

Les méthodes implicites sont convergentes si  $\frac{1}{2} < \Theta < 1$

Pour  $\Theta = 1$  la méthode est dite totalement implicite.

Pour  $\Theta = \frac{1}{2}$  la méthode est dite de Crank - Nicholson.