ΧΡΗΣΙΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΟΜΟΙΩΜΑΤΩΝ ΚΑΙ ΗΛΕΚΤΡΟΝΙΚΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ ΕΙΣ ΤΗΝ ΥΔΡΟΛΟΓΙΑΝ

ΥΠΟ

Θ. Σ. ΞΑΝΘΟΠΟΥΛΟΥ *

1. ΕΠΙΦΑΝΕΙΑΚΗ ΥΔΡΟΛΟΓΙΑ

1.1. Στατιστικὴ ἐπεξεργασία βροχομετρικῶν δεδομένων.

1.1.1. Συγκέντρωσις καὶ κατάταξις δεδομένων.

Ἡ ἀνάγκη μιᾶς σοβαρᾶς στατιστικῆς ἐπεξεργασίας τῆς «πληροφορίας» ἐν τῇ Ὑδρολογίᾳ, ἤτοι τῶν ὑπαρχόντων ὑδρολογικῶν δεδομένων, εἶναι πλέον ἢ ἀπαραίτητος διὰ τὴν ἔστω καὶ στοιχειώδη ἐκτίμησιν τῶν πάσης φύσεως ἀπορροῶν ἰδίως διὰ τὸ πτωχὸν καὶ εἰς πυκνότητα ἀλλὰ καὶ εἰς ἀξιόπιστα στοιχεῖα ὑδρολογικὸν δίκτυον τῆς Ἑλλάδος.

Ὁ συνηθέστερος καὶ ἀφθονώτερος τύπος τοῦ ὑδρολογικοῦ δεδομένου εἶναι ὡς γνωστὸν ἡ καταγεγραμμένη βροχόπτωσις. Κατὰ τὴν στατιστικὴν ὁρολογίαν ἡ καταγραφὴ τῇ βοηθείᾳ ὀργάνου τινὸς τοῦ ὕψους βροχῆς εἴς τι σημεῖον μιᾶς λεκάνης ἀπορροῆς ἀποτελεῖ τὸ χαρακτηριστικὸν μέγεθος τῆς πληροφορίας «βροχόπτωσις» ἤτοι τὴν πρὸς ἀνάλυσιν στοχαστικὴν μεταβλητὴν (σ.μ.), «βροχομετρικὸν δεδομένον».

Ἡ βασικὴ παραδοχὴ διὰ τὴν στατιστικὴν μελέτην τῶν βροχοπτώσεων, προϋποθέτει ὅτι τὸ φαινόμενον τῆς βροχῆς ἐμφανίζεται ὡς ἀνεξάρτητος στοχαστικὴ μεταβλητή. Συνεπῶς, τὸ χαρακτηριστικὸν γεγονὸς «ὕψος βροχῆς h», μιᾶς βροχοπτώσεως διαρκείας t, (π.χ. t = 1h), κατὰ μίαν ὡρισμένην χρονικὴν περίοδον, (π.χ. τὴν Δευτέραν 22-10-68), ἐξαρτᾶται μὲν ἀπὸ τὸ κλῖμα καὶ τὴν ἐποχήν, θεωρεῖται ὅμως τελείως ἀνεξάρτητον τῶν ὁμοειδῶν γεγονότων «h» τὰ ὁποῖα ἔλαβον χώραν προηγουμένως ἢ θὰ λάβουν χώραν ἐν συνεχείᾳ. Ἡ ἀξία τῆς ὑποθέσεως ταύτης εἶναι σχετική, δυνάμεθα ὅμως νὰ θεωρήσωμεν ὅτι ἐπαληθεύεται ἱκανοποιητικῶς διὰ τὰς βροχὰς μικρᾶς ἕως μέσης διαρκείας, ὡς εἶναι αἱ τῶν μεσογειακῶν κλιμάτων.

Ἡ φύσις τῶν ὀργάνων μετρήσεως τοῦ h καὶ δὴ τὸ περιωρισμένον τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ συλλέγοντος τὴν βροχὴν κυλίνδρου ὁδηγεῖ ἀναγκαστικῶς εἰς τὴν καταγραφὴν τῆς πληροφορίας «σημειακὸν ὕψος βροχῆς h», ἡ δὲ φυσικὴ διαδικασία τῆς σημειακῆς μετρήσεως τοῦ h παρουσιάζει ὡρισμένα χαρακτηρι-

---

* Θ. Σ. ΞΑΝΘΟΠΟΥΛΟΣ, Τακτικὸς Καθηγητὴς Ἕδρας Ὑδραυλικῆς Πολυτεχνικῆς Σχολῆς Παν/μίου Θεσσαλονίκης.

στικά, τὰ ὁποῖα καθορίζουν ἀντιστοίχως καὶ τοὺς κανόνας τῆς ἐγκαταστάσεως τῶν ὀργάνων.

Τὰ σημαντικώτερα σφάλματα εἰς τὴν τελικὴν ἐκτίμησιν τῶν βροχοπτώσεων ὀφείλονται τουλάχιστον διὰ τὰς Ἑλληνικὰς συνθήκας, εἰς τὴν ἔλλειψιν εὐσυνειδησίας τῶν παρατηρητῶν κατὰ τὰν συγκέντρωσιν τῶν ἀρχικῶν δεδομένων καὶ δὴ τῶν ἀμέσων μετρήσεων εἰς τὰ βροχόμετρα καὶ τοὺς βροχογράφους.

Ἡ σύγκρισις τῶν παρατηρήσεων μεταξὺ δύο πλησίον ἀλλήλων τοποθετημένων ὀργάνων καὶ δὴ ὁ συνδυασμὸς βροχομέτρου - βροχογράφου, ἐξασφαλίζει ἕνα βασικὸν ἔλεγχον τῆς ἀξιοπιστίας των καὶ κατὰ τὴν γνώμην μας, δὲν νοεῖται σήμερον ἐγκατάστασις βροχογράφου ἄνευ τῆς παραπλεύρου ἐγκαταστάσεως ἁπλοῦ τινος βροχομέτρου. Ἐξ ἄλλου ἐνδείκνυται ἡ παρ' ἕκαστον ὄργανον διάθεσις πλήρους σειρᾶς ἀνταλλακτικῶν διὰ τὴν ἄμεσον ἀντικατάστασιν ἑνὸς τυχόντος τμήματος εἰς περίπτωσιν ἀνάγκης.

Μία καλὴ ὀργάνωσις τῶν ὑπηρεσιῶν συλλογῆς τῆς ἀκατεργάστου πληροφορίας «μέτρησις βροχοπτώσεων» θὰ ἐπέτρεπε τὸν οὐσιαστικὸν συγκριτικὸν ἔλεγχον αὐτῆς, πρὸ τῆς ἐπισήμου καταχωρήσεως ἢ δημοσιεύσεώς των. Δυστυχῶς, ὁ ἐν λόγῳ ἔλεγχος ἀφίεται συνήθως εἰς τὴν καλὴν διάθεσιν τοῦ μελετητοῦ ὁ ὁποῖος κάποτε θὰ χρησιμοποιήσῃ τὰ δεδομένα. Τοιουτοτρόπως, ἐλάχιστα μόνον, χονδροειδῆ σφάλματα, γίνονται τελικῶς ἀντιληπτά, διότι ἡ χρονικὴ ἀπόστασις ἀλλὰ καὶ ἡ ἔλλειψις οὐσιαστικῆς ἐπαφῆς μὲ τὴν πρώτην πληροφορίαν καθιστοῦν πλέον ἀδύνατον τὴν ἀποκάλυψιν σφαλμάτων, ὀφειλομένων π.χ. εἰς ἀσυνείδητον παρατηρητήν, διαρροὰς ἢ σημαντικὴν ἐξάτμισιν, ἐμφράξεις καὶ ἐκχειλίσεις τῶν ὀργάνων, κακὴν τοποθέτησιν τῶν ὀργάνων, λάθη κατὰ τὴν ἀντιγραφὴν τῶν δελτίων κ.λ.π.

Ἡ ἐφαρμοζομένη συνήθως πρώτη κατάταξις καὶ ἐπεξεργασία τῶν δεδομένων «ἡμερήσια ὕψη βροχῆς», ἔχει ὡς ἀντικείμενον τὴν εὕρεσιν τῶν μηνιαίων καὶ ἐτησίων ὑψῶν βροχῆς. Τὰ νέα αὐτὰ ἀνηγμένα δεδομένα εἶναι οὐσιαστικῶς παράμετροι τῶν προηγουμένων καὶ ἐν συνεχείᾳ κατάταξίς των καὶ μελέτη τῆς στοχαστικῆς διανομῆς των ὁδηγεῖ εἰς τὴν εὕρεσιν ἄλλων παραμέτρων ὡς εἶναι π.χ. ἡ μέση ὑπερετησία βροχόπτωσις σταθμοῦ τινος ἢ μέσον ἐτήσιον ὕψος βροχῆς καὶ ἡ ἐν συνεχείᾳ χάραξις τῶν ἰσοϋετίων καμπύλων.

Κατὰ τὴν σύνταξιν εἰδικῶν ὑδρολογικῶν μελετῶν προκύπτει συνήθως ἡ ἀνάγκη εἰδικῶν ἐπεξεργασιῶν τῶν δεδομένων, τὰ δὲ τελικῶς προκύπτοντα ἀποτελέσματα εἶναι ἐπιδεικτικὰ βελτιώσεως μόνον ἐφ' ὅσον εἶναι εὐκόλως διαθέσιμοι ὡρισμέναι παρατηρήσεις ποιοτικῆς φύσεως κατὰ τὴν διάρκειαν τοῦ ἐνδιαφέροντος τὴν μελέτην φαινομένου.

Ἐν συμπεράσματι ἡ ὀρθολογικὴ συγκέντρωσις καὶ κατάταξις τῶν βροχομετρικῶν δεδομένων πολλαπλασιάζει τὴν ἀξιοπιστίαν των. Ἐκ προσωπικῆς πείρας γνωρίζομεν ὅτι κατὰ τὴν ἐπεξεργασίαν αὐτῶν τὸ οὐσιαστικώτερον ἄγχος τοῦ μελετητοῦ ὀφείλεται ὄχι τόσον εἰς τὴν ἔλλειψιν δεδομένων ἀλλὰ εἰς τὴν διάθεσιν ὅτι σημαντικὸν μέρος αὐτῶν εἶναι κατὰ τὸ μᾶλλον καὶ ἧττον ἀναξιόπιστα.

1.1.2. Συσχετίσεις καὶ προσεγγίσεις.

Ἐκ τοῦ γεγονότος ὅτι εἰς τὸ ὄργανον τῆς συλλογῆς τῆς βροχῆς αἱ συνθῆκαι ἐγκαταστάσεως ἀλλὰ καὶ οἱ παρατηρηταὶ ἀλλάζουν εὐκόλως, τὰ ἐξ αὐτοῦ προκύπτοντα δεδομένα δὲν εἶναι ὁμογενῆ ἀνὰ δεῖγμα, ἤτοι δὲν παριστάνουν μὲ ἀκρίβειαν ἕν δεῖγμα ἐξ ἑνὸς καὶ τοῦ αὐτοῦ «πληθυσμοῦ» ὡς προϋποθέτει ἡ θεωρία τῆς στατιστικῆς.

Κατὰ μείζονα λόγον κατὰ τὴν εὕρεσιν τῶν μέσων τινῶν βροχοπτώσεων μιᾶς λεκάνης ἀπορροῆς, βάσει τῶν δεδομένων Ν σταθμῶν, ὡρισμένοι ἐξ αὐτῶν ἔχουν διαφόρους χρονικὰς περιόδους λειτουργίας, ἢ καὶ διάφορον ἀξιοπιστίαν τῆς τῶν ὑπολοίπων.

Συνεπῶς προκύπτει ἡ ἀνάγκη , πρῶτον μιᾶς κατ' ἀρχὴν ὁμογενοποιήσεως καὶ δὴ ἐλέγχου καὶ διορθώσεως τῆς ὑπαρχούσης πληροφορίας καὶ δεύτερον μιᾶς γενικωτέρας ὁμογενοποιήσεως διὰ τῆς ὁποίας ἐπιδιώκεται πλέον ὁ προσδιορισμὸς Ν δειγμάτων, ἤτοι σειρῶν δεδομένων, τῆς αὐτῆς διαστάσεως ὡς πρὸς τὴν χρονικὴν διάρκειαν καὶ κατὰ τὸ δυνατὸν ὁμογενῶν ἀνὰ δεῖγμα. Ἐξ αὐτῆς προκύπτει ὡς ἄμεσος συνέπεια ἡ μεγιστοποιησις τῶν μικρῶν δειγμάτων καὶ δὴ ἡ τεχνητὴ βελτίωσις τῶν δεδομένων των. Παρατηροῦμεν δὲ ὅτι ἐνῷ αἱ διὰ τῆς βελτιώσεως προκύπτουσαι νέαι παράμετροι (π.χ. μέσαι τιμαί), δὲν παρουσιάζουν πάντοτε σημαντικὰς διαφοράς, συγκρινόμεναι μετὰ τῶν κατὰ ἁπλοϊκωτέραν μέθοδον εὑρεθεισῶν, ἐν τούτοις ὁδηγοῦν εἰς πολὺ ἀκριβέστερα συμπεράσματα ὅσον ἀφορᾷ τὰ ὅρια καὶ τὰ διαστήματα ἐμπιστοσύνης των δι' ἕναν ἐπιθυμητὸν βαθμὸν ἐμπιστοσύνης καὶ αὐτὸ κυρίως ἐπιδιώκομεν εἰς ἕν γενικώτερον σχέδιον ὑδρολογικῆς ἀξιοποιήσεως μιᾶς περιοχῆς, (ἴδε καὶ σχ. 6, σελ. 530).

Αἱ ἀνομοιογένειαι τῶν δεδομένων ὀφείλονται συνήθως εἰς ἔλλειψιν δεδομένων, ἐσφαλμένα δεδομένα, μετάθεσιν ὀργάνων μετρήσεως καὶ ἀλλαγὴν ὑδρολογικοῦ περιβάλλοντος.

Τὸ πρῶτο καὶ στοιχειωδέστερον βροχομετρικὸν στοιχεῖον σταθμοῦ τινὸς εἶναι τὸ ἐτήσιον ὕψος βροχῆς. Δεδομένου δὲ ὅτι ἀποτελεῖ τὴν βάσιν διὰ τὸ πλῆθος στατιστικῶν ἀναλύσεων ἀπαιτεῖται εἰς κατ' ἀρχὴν ἔλεγχος τῆς ὁμογενείας τοῦ δείγματος, «σημειακὰ ἐτήσια ὕψη βροχῆς», ἤτοι, «ἐτήσια ὕψη βροχῆς σταθμοῦ τινος, εὑρισκομένου μονίμως εἴς τι σημεῖον τῆς λεκάνης ἀπορροῆς».

Ὁ ἔλεγχος οὗτος ἐπιτυγχάνεται εὐκόλως εἰς τὴν περίπτωσιν γειτονικῶν σταθμῶν εὑρισκομένων ὑπὸ συγγενεῖς ὑδρολογικὰς συνθήκας, στηρίζεται δὲ εἰς τὰς ἀκολούθους ἀρχάς:

α) Τὸ ἐτήσιον ὕψος βροχῆς εἶναι ἐν γένει ἄθροισμα 365 στοχαστικῶν μεταβλητῶν (τῶν 365 ἡμερησίων ὑψῶν βροχῆς), ἑκάστη τῶν ὁποίων ἀκολουθεῖ τυχόντα νόμον κατανομῆς. Ἐὰν αὗται αἱ 365 στοχαστικαὶ μεταβληταὶ ἦσαν ἀνεξάρτητοι, τότε συμφώνως πρὸς τὸ θεώρημα τοῦ κεντρικοῦ ὁρίου, τὸ ἐτήσιον ὕψος βροχῆς θὰ ἠκολούθει νόμον Gauss, λόγῳ τοῦ μεγάλου ἀριθμοῦ τῶν ἡμερησίων ὑψῶν βροχῆς. Εἰς τὴν πραγματικότητα τὰ ἡμερήσια ὕψη βροχῆς δὲν εἶναι τελείως ἀνεξάρτητα, δεδομένου ὅτι ἐπηρεάζονται ἀπὸ κυκλικὰς ἐποχιακὰς διακυμάνσεις. Ἐν τούτοις ὅλαι αἱ δοκιμαὶ ἐκτιμήσεως τῆς καταλληλότητος δίδουν ἄριστα ἀποτελέσματα διὰ τὸν κανονικὸν νόμον τοῦ Gauss, καὶ πιστεύομεν ὅτι, παρὰ μίαν ἐλαφρὰν τινὰν ἀσυμμετρίαν τοῦ νόμου κατανομῆς τῶν ἐτησίων ὑψῶν βροχῆς διὰ μεγάλας περιόδους παρατηρήσεων, αἱ ἀνάγκαι τῶν μελετῶν ὑδραυλικῶν ἔργων καλύπτονται ἱκανοποιητικώτατα μὲ τὴν ἐφαρμογὴν τοῦ ὡς ἄνω κανονικοῦ νόμου.

β) Τὰ ἐτήσια ὕψη βροχῆς γειτονικῶν σταθμῶν ὑπὸ συγγενεῖς ὑδρολογικὰς συνθήκας δὲν εἶναι ἀνεξάρτητοι στοχαστικαὶ μεταβληταὶ ἀλλὰ ἀντιθέτως εὑρίσκονται εἰς λίαν στενὴν στοχαστικὴν ἐξάρτησιν, ἥτις εἶναι ἐπὶ πλέον γραμμική, λόγῳ τοῦ ὅτι ἕκαστον ἐξ αὐτῶν ἀκολουθεῖ νόμον Gauss. Συνεπῶς, κατὰ μείζονα λόγον τὸ αὐτὸ θὰ ἰσχύῃ καὶ διὰ τὰ ἀθροιστικὰ ἐτήσια ὕψη βροχῆς διότι ταῦτα ἀποτελοῦν ἁπλοῦν γραμμικὸν συνδυασμὸν τῶν ἐτησίων ὑψῶν, ὅστις, λόγῳ τοῦ χαρακτῆρος του (ἄθροισις), περιορίζει σημαντικῶς τὴν διασποράν.

Βάσει τῶν ἀνωτέρω, ἐφαρμόζεται μία ἁπλῆ μέθοδος ἐλέγχου καλουμένη μέθοδος τῆς διπλῆς ἀθροιστικῆς καμπύλης. Δι' αὐτῆς ἐντοπίζεται ἡ ὕπαρξις συστηματικοῦ σφάλματος εἰς σταθμὸν τινὰ ποσοστικῶς καὶ χρονικῶς ὁπότε κατάλληλος ἔρευνα εἶναι δυνατὸν νὰ ἐξηγήσῃ πλήρως τὴν αἰτίαν τοῦ σφάλματος.

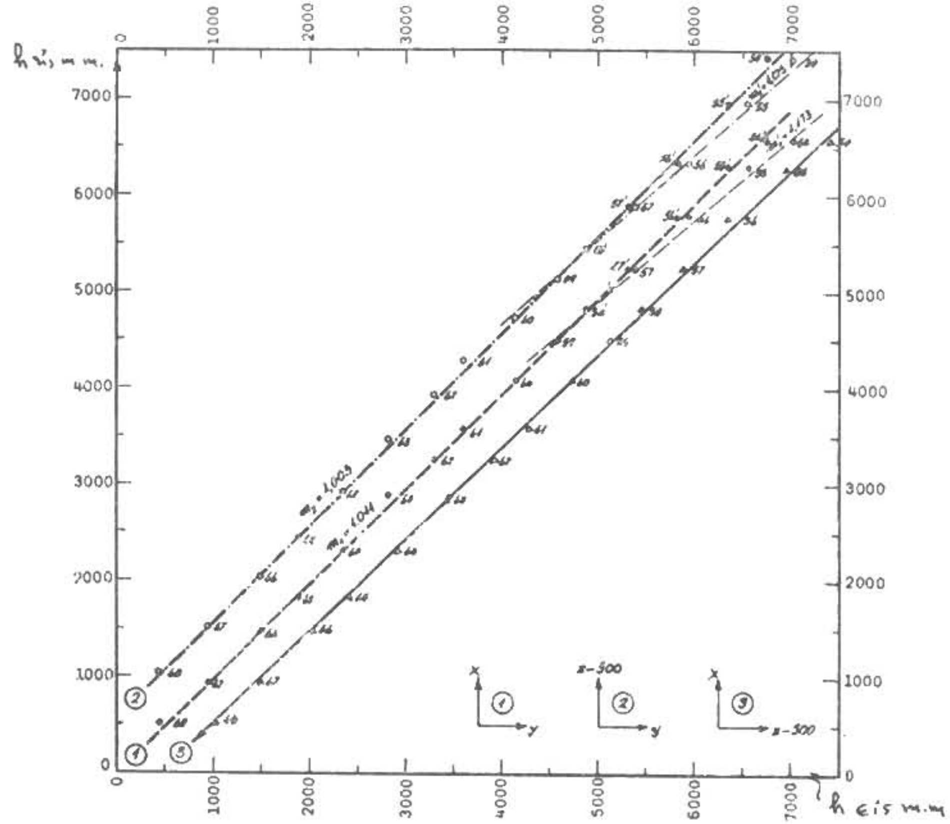
Διὰ τὸν ἔλεγχον πολλῶν βροχομετρικῶν σταθμῶν δὲν λαμβάνονται συνήθως οἱ συνδυασμοὶ ὅλων τῶν σταθμῶν ἀνὰ δύο ἀλλὰ ἐκλέγονται εἷς ἢ περισσότεροι σ τ α θ μ ο ὶ β ά σ ε ω ς οἵτινες δέον ὅπως παρουσιάζουν τὴν μακροτέραν δυνατὴν περίοδον συγχρόνων παρατηρήσεων μὲ τοὺς περισσοτέρους τῶν ἄλλων σταθμῶν.

Ἐφαρμογαὶ τῆς ὡς ἄνω μεθόδου εἰς πλῆθος βροχομετρικῶν σταθμῶν τῆς Βορείου Ἑλλάδος ἐνετόπισαν μὲ ἱκανοποιητικὴν ἀκρίβειαν ὑπάρχοντα συστηματικὰ σφάλματα εἰς τὴν καταγραφὴν τῶν δεδομένων, (σχ. 1).

Μετὰ τὸν ὡς ἄνω ἔλεγχον ἀκολουθεῖ ἡ κυρίως ὁ μ ο γ ε ν ο π ο ί η σ ι ς κ α ὶ μ ε γ ι σ τ ο π ο ί η σ ι ς τ ῶ ν ἐ τ η σ ί ω ν β ρ ο χ ο μ ε τ ρ ι κ ῶ ν δ ε δ ο μ έ ν ω ν. Τὸ σύνηθες πρόβλημα τίθεται ὡς ἑξῆς : Εἰς λεκάνην τινα ἀπορροῆς ὑπάρχουν τὰ ἐτήσια ὕψη βροχῆς S τὸ πλῆθος σταθμῶν, ἕκαστος τῶν ὁποίων ἔχει διάφορον περίοδον λειτουργίας. Ζητεῖται ἡ ἐκλογὴ τῆς μακροτέρας δυνατῆς εὐνοϊκῆς περιόδου τ α υ τ ο χ ρ ό ν ο υ λ ε ι τ ο υ ρ γ ί α ς ὅλων τῶν σταθμῶν, δ ι ὰ σ υ μ π λ η ρ ώ σ ε ω ς τ ῶ ν ἐ λ λ ε ι π ο υ σ ῶ ν τ ι μ ῶ ν τ ῶ ν β ρ α χ υ χ ρ ό ν ω ν σ τ α θ μ ῶ ν μὲ τὸν μικρότερον δυνατὸν κίνδυνον σφάλματος.

Μετὰ τὸν ἔλεγχον τῆς ὁμογενείας τῶν δεδομένων τῶν σταθμῶν διὰ τὰς κοινὰς περιόδους τῶν παρατηρήσεων καὶ τῶν σχετικῶν διορθώσεων προσδιορίζεται ἡ κοινὴ περίοδος λειτουργίας, καὶ εὑρίσκονται οἱ μέσοι ὅροι καὶ τυπικαὶ ἀποκλίσεις ὅλων τῶν σταθμῶν. Βάσει τῆς γραμμικῆς συσχετίσεως ἐ

ἐν συνεχείᾳ αἱ παρατηρήσεις τοῦ πτωχοτέρου σταθμοῦ βάσει τοῦ πλησιεστέρου τοιούτου. Συνεχίζοντες οὕτω συμπληρώνονται ὀλίγον κατ' ὀλίγον τὰ δεδομένα ὅλων τῶν σταθμῶν διὰ τὴν κοινὴν περίοδον τῶν N ἐτῶν παρατηρήσεων. Τὰ κριτήρια ἐκλογῆς τῆς πορείας τῆς ὅλης ἐργασίας συνοψίζονται ἐξ ἄλλου εἰς :



Σχ. 1. Ἔλεγχος ὁμογενείας σταθμῶν βάσεως μείζονος Θεσσαλονίκης διὰ τῆς μεθόδου τῆς διπλῆς ἀθροιστικῆς καμπύλης καὶ διόρθωσις δεδομένων σταθμοῦ Πανεπιστημίου Θεσσαλονίκης.

α) τ ὴ ν ἔ ν τ α σ ι ν τ ῆ ς σ υ σ χ ε τ ί σ ε ω ς μ ε τ α ξ ὺ τ ῶ ν σ τ α θ μ ῶ ν,

β) τ ὰ ς μ ε τ α ξ ὺ τ ω ν ἀ π ο σ τ ά σ ε ι ς καὶ

γ) τ ὸ ν π ε ρ ι ο ρ ι σ μ ὸ ν τ ο ῦ ὄ γ κ ο υ τ ῶ ν σ χ ε τ ι κ ῶ ν ὑ π ο λ ο γ ι σ μ ῶ ν.

Ἡ μέθοδος αὕτη τῆς ὁμογενοποιήσεως μετὰ συγχρόνου μεγιστοποιήσεως δύναται νὰ ἐ π ε κ τ α θ ῇ κ α ὶ δ ι ὰ τ ὰ ἐ π ο χ ι α κ ά, ἢ τ ὸ π ο λ ὺ μ η ν ι α ῖ α, ὕ ψ η β ρ ο χ ῆ ς ὑπὸ τὰς ἀκολούθους ὑποδείξεις :

α) Σπανίως ή κατανομὴ τῶν μηνιαίων ὑψῶν βροχῆς (π.χ. τοῦ μηνὸς Φεβρουαρίου διὰ 30 ἔτη παρατηρήσεων) ἀκολουθεῖ νόμον Gauss. Συνεπῶς ἡ συσχέτισις μεταξὺ δεδομένων μηνιαίων ὑψῶν δύο γειτονικῶν σταθμῶν δὲν εἶναι συνήθως γραμμική, ὁπότε δὲν ἐφαρμόζονται αἱ γραμμικαὶ σχέσεις ἐπεκτάσεως.

β) Ἐπεκτείνονται κατ' ἀρχὴν ἀναλυτικῶς τὰ δεδομένα τῶν *ἐτησίων ὑψῶν βροχῆς* ὡς προηγουμένως ἀνεπτύχθη. Εὑρίσκονται ἐν συνεχείᾳ γραφικῶς αἱ συσχετίσεις μεταξὺ τῶν ἐποχιακῶν ἢ μηνιαίων ὑψῶν βροχῆς καὶ ἐκτιμῶνται αἱ ἐλλείπουσαι τιμαὶ ἐκ τῶν διαγραμμάτων.

γ) Ἐλέγχονται αἱ ἐπιτευχθεῖσαι οὕτω ἐπεκτάσεις, δι' ἀθροίσεως τῶν ἐποχιακῶν ἢ μηνιαίων τιμῶν ἀνὰ ἔτος καὶ συγκρίσεως τούτων μὲ τὰς ἐξ ἀρχῆς ἀναλυτικῶς ὑπολογισθείσας τιμὰς τῶν ἐτησίων ὑψῶν βροχῆς.

δ) Τέλος, διορθοῦνται ἀναλογικῶς αἱ ἐποχιακαὶ ἢ μηνιαῖαι τιμαί.

1.1.3. Ἐκλογὴ καὶ προσαρμογὴ νόμων κατανομῆς.

Εἰς τὴν ὑδρολογίαν, τὸ πρὸς ἐπεξεργασίαν δεῖγμα πληθυσμοῦ τινος περιέχει συνήθως περιωρισμένον ἀριθμὸν γεγονότων. Συνεπείᾳ τούτου, εἰς δείγματα μικροῦ εὔρους μὲ σημαντικὰς τυπικὰς ἀποκλίσεις εἶναι δυνατὸν νὰ προσαρμοσθῇ ὁ οἱοσδήποτε νόμος πιθανότητος καὶ μόνον ὁ διπλασιασμὸς ἢ τριπλασιασμὸς τοῦ εὔρους τοῦ δείγματος ἐπιτρέπει τὴν ἐπαλήθευσιν τῆς καταλληλότητος ἢ μὴ ἑνὸς προσαρμοσθέντος νόμου. Πράγματι, ἀπὸ δείγματα περιέχοντα 10, 20 ἢ ἔστω καὶ 30 ἔτη παρατηρήσεων καλούμεθα νὰ ἀποκομίσωμεν συμπεράσματα διὰ μίαν ἑκατονταετίαν ἢ χιλιετίαν. Ἡ προέκτασις αὕτη εἶναι τοσοῦτον μᾶλλον ἐπικίνδυνος καθ' ὅσον οἱ διάφοροι νόμοι κατανομῆς ἀποκλίνουν συνήθως σημαντικώτατα μεταξύ των διὰ μικρὰς συχνότητας. Κατὰ συνέπειαν ὑπάρχει πάντοτε μία πιθανότης, ὅτι ὁ ἐκλεγεὶς θεωρητικὸς νόμος κατανομῆς τοῦ συνόλου τῶν γεγονότων τοῦ πληθυσμοῦ βάσει δείγματος τινος δὲν εἶναι ὁ *καταλληλότερος* ἤτοι, δὲν εἶναι ὁ ἀποδίδων κατὰ τὸν καλλίτερον τρόπον τὴν πραγματικὴν κατανομὴν τῶν γεγονότων τοῦ πληθυσμοῦ. Ἀπαιτεῖται ἑπομένως εἷς *ἔλεγχος*, ἤτοι μία ἐκτίμησις τῆς καταλληλότητος ἢ μή, τοῦ ἐκλεγέντος θεωρητικοῦ νόμου κατανομῆς διὰ τὰ γεγονότα πληθυσμοῦ τινος βάσει ἑνὸς δείγματος. Ἐκ τοῦ ἐλέγχου, δέον ὅπως προκύψῃ ποίαν πιθανότητα ἔχει ὁ ἐκλεγεὶς νόμος διὰ τὴν ὀρθὴν ἀναπαράστασιν τοῦ πραγματικοῦ νόμου κατανομῆς, βάσει πάντοτε τοῦ ὑπάρχοντος δείγματος.

Ὁ συνηθέστερος τρόπος ἐλέγχου τῆς ὡς ἄνω καταλληλότητος τοῦ ἐκλεγέντος νόμου στηρίζεται εἰς τὴν δοκιμὴν τοῦ χ^2.

Ὡς γνωστὸν ἡ μεταβλητὴ τοῦ χ^2 εἶναι συνάρτησις τῶν ἐμπειρικῶν τιμῶν, μέσου ὅρου καὶ τυπικῆς ἀποκλίσεως τοῦ δείγματος, ἀκολουθεῖ δὲ μὲ ἱκανοποιητικὴν προσέγγισιν τὸν γενικὸν νόμον τῆς στοχαστικῆς μεταβλητῆς χ^2 τοῦ Pearson μὲ $N-1$ βαθμοὺς ἐλευθερίας. Σχετικὴ μεθοδολογία ἐφαρμογῆς εὑρίσκεται εἰς τὰ στοιχειώδη ἐγχειρίδια στατιστικῆς.

Μετὰ τὸν ἔλεγχον τῆς καταλληλότητος τοῦ ἐκλεγέντος νόμου κατανομῆς ἀπαιτεῖται ἡ *ἐκτίμησις τῶν παραμέτρων αὐτοῦ*, ἤτοι τῶν συν-

τελεστῶν διὰ τῶν ὁποίων ὁ νόμος προσαρμόζεται καὶ ποσοτικῶς εἰς τὸ ὑπάρχον ὑδρολογικὸν δεῖγμα. Δι' ὅλους τοὺς ἐφαρμοζομένους σήμερον νόμους ἐν τῇ ὑδρολογίᾳ ἔχουν εὑρεθῆ αἱ προσδιορίζουσαι τὰς παραμέτρους βέλτιστοι ἐμπειρικαὶ σχέσεις συναρτήσει τῶν δεδομένων τοῦ δείγματος. Δέον ὅμως νὰ τονισθῇ, ὅτι τρεῖς εἶναι αἱ γενικαὶ μέθοδοι ἐκτιμήσεως τῶν παραμέτρων καὶ δὴ ἡ μέθοδος

α) *τοῦ μεγίστου τῆς ἀληθοφανείας*,

β) *δι' ὑπολογισμοῦ τῶν ροπῶν* καὶ

γ) *ἡ γραφική*.

1.1.4. Ὅρια καὶ ζῶναι ἐμπιστοσύνης.

Ἀφ' ἧς στιγμῆς ἐπελέγη εἷς θεωρητικὸς νόμος κατανομῆς δι' ἓν δεῖγμα, ἠλέγχθη ἡ καταλληλότης του καὶ ἐξετιμήθησαν αἱ παράμετροι αὐτοῦ γεννᾶται τὸ ἑξῆς βασικὸν πρόβλημα: *Ποῖος ὁ νόμος διανομῆς τῆς δειγματοληψίας δι' ἑκάστην παράμετρον*, ἤτοι πῶς μεταβάλλεται ἀπὸ δεῖγμα εἰς δεῖγμα ἑκάστη παράμετρος, θεωρουμένη τώρα αὐτὴ ταύτη σ.μ. χαρακτηρίζουσα ὁλόκληρο τὸ ὑπάρχον δεῖγμα.

Ἀποδεικνύεται ὅτι δι' οἱονδήποτε νόμον κατανομῆς τῆς σ.μ. x., μία ἐμπειρικὴ (ἐκτιμηθεῖσα ἐκ τοῦ δείγματος) ροπὴ τούτου μ'_k (ἢ m'_k) τάξεως k, ἀκολουθεῖ νόμον κατανομῆς Gauss, ἐφ' ὅσον ἐπαληθεύονται αἱ ὑποθέσεις τοῦ θεωρήματος τοῦ κεντρικοῦ ὁρίου, καὶ κυρίως διὰ N ἀρκούντως μέγα. Ὑφίστανται δὲ καὶ εἰδικαὶ θεωρίαι διὰ τοὺς νόμους διανομῆς τῶν παραμέτρων δειγμάτων μικροῦ εὔρους δεδομένου ὅτι εἰς τὰς ἐφαρμογὰς καὶ ἰδίως ἐν Ἑλλάδι τὰ γεγονότα ἑκάστου δείγματος εἶναι περιωρισμένα ὡς πρὸς τὸ πλῆθος.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συνάγεται ὅτι δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν τὸν νόμον διανομῆς τῆς δειγματοληψίας παραμέτρου τινος τοῦ ἐκλεγέντος νόμου, θὰ ἴδωμεν δὲ ὅτι διὰ δεῖγμα ἱκανοῦ εὔρους ὁ νόμος οὗτος συμπίπτει μὲ τὸν νόμον Gauss. Συνεπῶς δυνάμεθα νὰ προσδιορίσωμεν καὶ τὸ *ὅριον ἀβεβαιότητος* τὸ ὁποῖον ὑφίσταται πέριξ τῆς προσδιορισθείσης βάσει τοῦ δείγματος τιμῆς τῆς παραμέτρου *μὲ μίαν ὡρισμένην πιθανότητα ἐμφανίσεως*. Ἐδῶ ἀκριβῶς ὑπεισέρχονται αἱ ἔννοιαι τοῦ *βαθμοῦ ἐμπιστοσύνης*, *τοῦ διαστήματος ἐμπιστοσύνης* καὶ τῶν *ὁρίων ἐμπιστοσύνης*.

Πράγματι, ὑποτεθείσθω ὅτι ἐπιθυμοῦμεν νὰ ἔχωμεν βαθμὸν ἐμπιστοσύνης 95 % ἤτοι ὁλικὴν πιθανότητα 95 %, ἵνα δι' οἱονδήποτε δεῖγμα ἡ παράμετρος εὑρίσκεται ἐντὸς ἑνὸς προσδιοριστέου διαστήματος τιμῶν, πέριξ τῆς ἐκτιμηθείσης ἐμπειρικῆς τιμῆς της ἐκ τοῦ ὑπάρχοντος δείγματος. Ὑπολογίζομεν τότε τὸν ἐμπειρικὸν μέσον ὅρον καὶ τὴν ἐμπειρικὴν τυπικὴν ἀπόκλισιν τῆς παραμέτρου, εὑρίσκομεν δὲ ἐκ τῶν πινάκων τοῦ Gauss, ἐφ' ὅσον τὸ δεῖγμα εἶναι εὐρύ, ἢ ἐξ ἄλλων ἀντιστοίχων πινάκων διὰ μικρὸν δεῖγμα, εἰς ποίαν ἀπόλυτον τιμὴν ἀντιστιχεῖ ἡ συχνότης ὑπερβάσεως $F_1 = 0{,}025$. Προσδιορίζομεν οὕτω τὰς δύο ὁριακὰς τιμὰς τοῦ μέσου ὅρου ἢ τυπικῆς ἀποκλίσεως, ἤτοι τὰς συμμετρικάς, ἐφ' ὅσον ὁ νόμος εἶναι συμμετρικός, πέριξ τῆς εὑρεθείσης ἐκ τοῦ δείγματος τιμῆς, (ἴδε καὶ σχ. 6, σελ. 530).

Τὸ προσδιορισθὲν διάστημα τιμῶν καλεῖται διάστημα ἐμπιστοσύνης μὲ βαθμὸν ἐμπιστοσύνης ἢ ὁλικὴν πιθανότητα 95%, αἱ δὲ εὑρεθεῖσαι ὁριακαὶ τιμαὶ τοῦ διαστήματος ὅρια ἐμπιστοσύνης μὲ βαθμὸν ἐμπιστοσύνης 95%.

Τὰ ἀνωτέρω ἰσχύουν διὰ σημαντικὸν ἢ μὴ εὖρος δείγματος, καὶ συνεπῶς καὶ διὰ τὰ μικρὰ δείγματα, μὲ μόνην διαφορὰν ὅτι οἱ νόμοι διανομῆς τῆς δειγματοληψίας τῶν παραμέτρων δὲν εἶναι πλέον οἱ νόμοι Gauss.

1.1.5. **Ἐφαρμογαὶ καὶ συμπεράσματα.**

1.1.5.1. Ἐπεξεργασία σημειακῶν βροχοπτώσεων.

Αἱ ἐφαρμογαὶ τῆς ὡς ἄνω ἀναπτυχθείσης στατιστικῆς μεθοδολογίας εἰς τὸ φαινόμενον τῶν βροχοπτώσεων διακρίνονται εἰς δύο μεγάλας κατηγορίας:

α) Διανομὴ βροχοπτώσεων μικρᾶς διαρκείας.

Πρόκειται περὶ τῆς εὑρέσεως τοῦ νόμου διανομῆς τῆς σ.μ. «σημειακὸν ὕψος βροχῆς h», μιᾶς μικρᾶς καὶ ὡρισμένης χρονικῆς διαρκείας ,π.χ. μιᾶς ὥρας. Τὸ πρὸς ἀνάλυσιν δεῖγμα περιέχει ἑπομένως ὅλα τὰ τμήματα βροχῶν διαρκείας μιᾶς ὥρας τὰ ὁποῖα κατεγράφησαν κατὰ τὴν διάρκειαν τῶν N ἐτῶν παρατηρήσεων. Τὸ ὅλον πρόβλημα ἀντιμετωπίζεται συνήθως κατὰ δύο μεθόδους, ὡς ἀκολούθως :

— Εἰς πολλὰς περιπτώσεις, (π.χ. ὑπολογισμὸς διατομῶν δικτύου ἀποχετεύσεως ὀμβρίων) ἐνδιαφερόμεθα μόνον διὰ τὴν διανομὴν τῶν ἰσχυροτέρων βροχοπτώσεων διαφόρων διαρκειῶν (π.χ. 5′, 10′, 30′, 1 ὥρας κ.λ.π.) μιᾶς ὡρισμένης περιοχῆς. Ἐκ τῶν ὑπαρχόντων στοιχείων λαμβάνομεν τότε τὰ σχετικὰ δείγματα ἐκ βροχοπτώσεων τῶν ζητουμένων διαρκειῶν. Ἕκαστον δεῖγμα περιέχει n τιμὰς ἑκάστη τῶν ὁποίων παριστᾷ τὴν ἰσχυροτέραν βροχόπτωσιν ἑνὸς ἑκάστου ἔτους, ἐκ τῆς σειρᾶς τῶν n ἐτῶν παρατηρήσεων. Εἰς τὰ ληφθέντα οὕτω δείγματα προσαρμόζεται ὁ κατάλληλος νόμος ἀκραίας κατανομῆς καὶ δὴ ὁ νόμος Gumbel ἢ καὶ ὁ νόμος Fréchet διὰ μεγάλας περιόδους ἐπαναφορᾶς. Ἡ ἐμπειρία δεικνύει ἐξ ἄλλου ὅτι πολλάκις εἶναι ἐπιτυχὴς καὶ ἡ χρησιμοποίησις ἑνὸς νόμου Pearson III.

Ἐνίοτε ἀναζητεῖται ἡ διανομὴ τοῦ συνόλου τῶν βροχοπτώσεων μιᾶς ὡρισμένης διαρκείας καὶ συνηθέστερον τῶν ὑπερβαινουσῶν ἕν ὡρισμένον ἐλάχιστον ὕψος h_0, (π.χ. $h_0 = 4$ mm). Κατατάσσομεν τότε ὅλας τὰς μεγαλυτέρας τοῦ h_0 βροχοπτώσεις εἰς κλάσεις ὑψῶν βροχῆς, εἰς τρόπον ὥστε ὅλαι αἱ κλάσεις νὰ περιέχουν ἱκανὸν ἀριθμὸν γεγονότων, π.χ. ἀνὰ 10 mm διὰ $h_0 < h < 100$ mm, ἀνὰ 25 mm διὰ $100 < h < 150$ mm κ.ο.κ.

Ἐν συνεχείᾳ προσαρμόζεται ὁ κατάλληλος νόμος κατανομῆς ,(π.χ. νόμος Galton) ἢ καὶ ὁ ἀντίστοιχος ἀκρωτηριασμένος νόμος, ἐφ' ὅσον θεωρηθῇ ὅτι ἀναλύονται ὅλαι αἱ ἡμέραι καταγραφῆς, ὁπότε ἡ συνάρτησις κατανομῆς λαμβάνει μὲ πιθανότητα F(o) τὴν σταθερὰν τιμὴν $h = 0$.

β) Διανομὴ ἐτησίων καὶ ἐποχιακῶν ὑψῶν βροχῆς.

Ὡς καὶ εἰς παράγραφον 1.1.2. ἀναφέρεται, τὰ ἐτήσια ὕψη βροχῆς ἀκολουθοῦν κατὰ τὴν ἱκανοποιητικὴν προσέγγισιν τὸν νόμον κανονικῆς κατανομῆς τοῦ Gauss. Ἡ μελέτη αὐτῶν ἀπαιτεῖ βεβαίως ὅλην τὴν ἀναφερθεῖσαν διαδικασίαν καὶ δὴ τοῦ ἐλέγχου τῆς ὁμογενείας τοῦ δείγματος καὶ τὴν ἐν συνεχείᾳ μεγιστοποίησιν τούτου βάσει πληρεστέρων στοιχείων ἄλλων σταθμῶν, ἐφ' ὅσον βεβαίως ὑπάρχουν.

Τὰ ἐποχιακὰ ὕψη βροχῆς δὲν ἀκολουθοῦν πάντοτε τὴν κατανομὴν τοῦ Gauss, καὶ συνεπῶς ἀπαιτεῖται ὁπωσδήποτε ἡ δοκιμὴ καταλληλότητος τοῦ χ^2.

1.1.5.2. Ἑνοποίησις δειγμάτων διὰ τῆς μεθόδου τῶν σταθμῶν - ἐτῶν.

Ὅταν ζητοῦνται στοιχεῖα βροχοπτώσεων διὰ μεγάλας περιόδους ἐπαναφορᾶς, π.χ. κατὰ τὸν ὑπολογισμὸν τῆς κρισίμου βροχῆς μιᾶς μικρᾶς λεκάνης ἀπορροῆς διὰ $T = 50$ ἢ 100 ἔτη, ἀπαιτεῖται μιὰ τεχνητὴ διεύρυνσις τοῦ ὑπάρχοντος δείγματος, τὸ ὁποῖον εἶναι συνήθως μικρόν. Αἱ ἐπεκτάσεις τῆς καμπύλης ὕψους - περιόδου ἐπαναφορᾶς γίνονται οὕτω ὀλιγώτερον αὐθαίρετοι.

Ἡ μέθοδος τῶν σταθμῶν - ἐτῶν δίδει ἀκριβῶς τὴν ἐπιθυμητὴν διεύρυνσιν διὰ τῆς συνενώσεως καὶ ἀνακατατάξεως τῶν δεδομένων περισσοτέρων σταθμῶν, ὡς ἐὰν ἀνῆκον ταῦτα εἰς ἕνα καὶ μόνον σταθμόν. Δημιουργεῖται οὕτω ἕν νέον δεῖγμα μὲ πλῆθος γεγονότων ἴσον πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν γεγονότων τῶν ἐπὶ μέρους σταθμῶν. Τὸ ἐπιτρεπτὸν τῆς συνενώσεως τῶν σταθμῶν καθορίζεται ἐξ ἄλλου ἀπὸ τὴν πλήρωσιν τῶν ἀκολούθων συνθηκῶν:

α) Οἱ πρὸς συνένωσιν σταθμοὶ δέον ὅπως εἶναι μετεωρολογικῶς ὁμογενεῖς καὶ δὴ οἱ καθορίζοντες τὸ φαινόμενον «βροχόπτωσις» φυσικοὶ συντελεσταὶ ἑκάστου σταθμοῦ δέον ὅπως ἀκολουθοῦν τοὺς αὐτοὺς βασικοὺς νόμους. Στατιστικῶς ἡ συνθήκη αὕτη ἑρμηνεύεται ἀπὸ τὴν ταύτισιν τῶν συναρτήσεων κατανομῆς h(T) τῶν σταθμῶν διὰ μεγάλας τιμὰς τοῦ T, (π.χ. $T = 500$).

β) Οἱ πληθυσμοὶ (π.χ. ὕψη βροχῆς διαρκείας μιᾶς ὥρας), τοὺς ὁποίους ἐκφράζουν οἱ πρὸς συνένωσιν σταθμοί, δέον ὅπως ἱκανοποιοῦν τὰς συνθήκας τῆς στατιστικῆς ἀνεξαρτησίας.

Ἐν συμπεράσματι, οἱ ὡς ἄνω περιορισμοὶ ἀποκλείουν συνήθως τὴν χρησιμοποίησιν τῆς μεθόδου, ὅταν ὁ ἀναζητούμενος νόμος στατιστικῆς κατανομῆς ἀφορᾷ βροχοπτώσεις διαρκείας μεγαλυτέρας τῆς 24ώρου τοιαύτης, ἀπαιτεῖται δὲ ὁπωσδήποτε ὁ ἔλεγχος τῆς στατιστικῆς ἀνεξαρτησίας.

1.1.5.3. Μεθολογία ὑπολογισμοῦ μέσων βροχοπτώσεων.

Ὁ ὑπολογισμὸς τῆς μέσης βροχοπτώσεως μιᾶς ὡρισμένης περιοχῆς ἀκολουθεῖ κατ' ἀρχὴν τὴν γενικὴν μεθοδολογίαν τῆς εὑρέσεως τῶν μέσων τιμῶν φαινομένου τινος ἐπὶ δεδομένης ἐπιφανείας βάσει ὡρισμένων σημειακῶν τιμῶν. Εἰς ὅλα τὰ ἀνάλογα προβλήματα δύο εἶναι αἱ συνήθεις μέθοδοι ἐπιλύσεως καὶ δὴ εἴτε, α) ὑπολογίζεται ὁ ἀριθμητικὸς μέσος ὅρος τῶν σημειακῶν τιμῶν, ἐκλομέγενης καὶ μιᾶς σειρᾶς συντελεστῶν βάρους πρὸς καλλιτέραν ἀξιολόγησιν τῶν σημειακῶν δεδομένων, εἴτε

β) χαράσσονται αἱ καμπύλαι τῶν ἴσων τιμῶν τοῦ πρὸς εὕρεσιν μέσου ὅρου καὶ ὁλοκληροῦται ἐν συνεχείᾳ γραφικῶς ἡ ὅλη περιοχὴ ἀνὰ ζώνας. Ἡ ἐφαρμογὴ τῆς πρώτης μεθόδου εἰς τὸ πρόβλημα τῆς παρούσης παραγράφου δίδει τὴν γνωστὴν ὡς «μέθοδον τῶν πολυγώνων Thiessen» ἐνῶ ἡ δευτέρα μέθοδος ὁδηγεῖ εἰς τὴν χάραξιν τῶν ἰσοϋετίων καμπυλῶν.

1. 1. 5. 4. Διανομὴ βροχοπτώσεων συναρτήσει βρεχομένης ἐπιφανείας.

Ἡ μεθοδολογία τῆς προηγουμένης παραγράφου ἐπιτρέπει τὸν προσδιορισμὸν τῆς μέσης τιμῆς μιᾶς συγκεκριμένης βροχοπτώσεως ἐπὶ ἐπιφανείας τινος, ἐφ' ὅσον ὑπάρχουν τὰ κατάλληλα σημειακὰ δεδομένα.
Πολλάκις ὅμως ἐμφανίζονται ἐν τῇ πράξει καὶ κατὰ τὸν ὑπολογισμὸν τῶν πλημμυρικῶν ἀπορρῶν τὰ κάτωθι προβλήματα:

— Εὕρεσις τῆς μέσης τιμῆς βροχοπτώσεως ἐπὶ δεδομένης ἐπιφανείας διὰ τὴν ὁποίαν ὑφίσταται μόνον ἕνας σταθμὸς παρατηρήσεων.

— Εὕρεσις τῆς μέσης τιμῆς τιμῆς βροχοπτώσεως ἐπὶ ἐπιφανείας μετὰ περισσοτέρων σταθμῶν ἀλλὰ διὰ μεγάλην περίοδον ἐπαναφορᾶς T, οὐδόλως καλυπτομένην ἐκ τῆς περιόδου τῶν παρατηρήσεων.

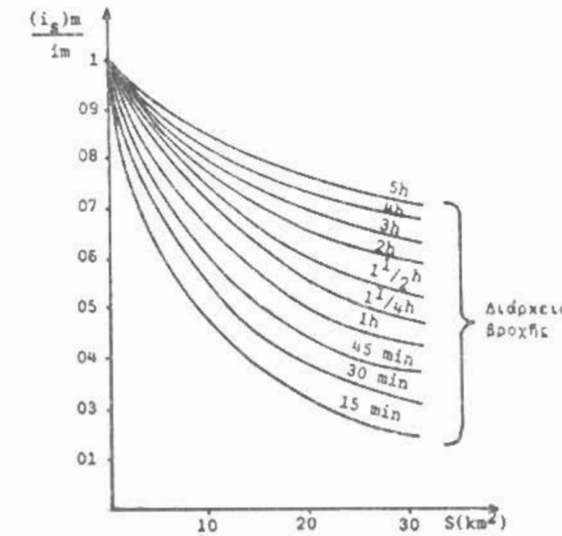
Τὰ ὡς ἄνω προβλήματα συνοψίζονται εἰς τὴν διατύπωσιν τῆς ἀκολούθου προτάσεως: «Ἐὰν μία σημειακὴ βροχόπτωσις διαρκείας t καὶ εἰς τυχὸν σημεῖον μιᾶς ἐπιφανείας S λαμβάνει τὴν τιμὴν h διὰ μίαν περίοδον ἐπαναφορᾶς T, ποία εἶναι ἡ τιμὴ h_m τῆς μέσης βροχοπτώσεως ἐπὶ τῆς S διὰ τὰς αὐτὰς τιμὰς τῶν t καὶ T;»
Ἡ ἐμπειρία ἀλλὰ καὶ ἡ κοινὴ λογικὴ δεικνύουν ὅτι ὁ λόγος $\frac{h_m}{h}$ καλούμενος καὶ συντελεστὴς μειώσεως εἶναι φθίνουσα συνάρτησις τοῦ ἐμβαδοῦ τῆς ἐπιφανείας καὶ τῆς ραγδαιότητος τῆς βροχῆς. Διὰ τὰ μεσογειακὰ κλίματα καὶ διὰ $t > 24$ώρου ὁ συντελεστὴς οὗτος τείνει πρὸς τὴν μονάδα. Συνεπῶς ἡ ἀναζήτησίς του δὲν ἔχει νόημα διὰ βροχὰς μεγαλυτέρας τῆς 24ώρου διαρκείας. Τέλος αἱ μετρήσεις ἐπὶ πραγματικῶν λεκανῶν δίδουν ὅτι ἡ μορφὴ τῆς καμπύλης $\frac{h_m}{h} = f(S)$ ὁμοιάζει περισσότερον πρὸς τὴν παραβολήν. Πάντως ἡ θεωρητικὴ ἐπίλυσις τοῦ ὅλου προβλήματος εἶναι ἐξαιρετικῶς δυσχερής.

Στηριζόμενοι εἰς «λογικὰς» ἀλλὰ οὐχὶ ἀποδεδειγμένης ἰσχύος παραδοχάς, ὡρισμένοι ἐρευνηταὶ ἔδωσαν μίαν μεθοδολογίαν ὑπολογισμοῦ δι' ἁπλᾶς περιπτώσεις σημειοσυνόλων, π.χ. δύο σημείων ἀπεχόντων ἀπόστασιν x_{12} ἐπὶ λωριδωτῆς ἐπιφανείς S. Κατωτέρω δίδωμεν, ἐνδεικτικῶς, ὡρισμένα ἀποτελέσματα μιᾶς τοιαύτης μελέτης. Πρόκειται διὰ τὰς βροχὰς 12ώρου διαρκείας τῶν σταθμῶν Γεωργικῆς Σχολῆς τοῦ Υ.Δ.Ε. Θεσ/νίκης καὶ ἀεροδρομίου Μίκρας Θεσσαλονίκης,

ἀπεχόντων περὶ τὰ 3,5 χλμ. Ἡ ἰσοδύναμος ὀρθογωνία περιοχή, ἐμβαδοῦ 25 km^2 περίπου, ἐμφανίζει, συναρτήσει τῆς περιόδου ἐπαναφορᾶς, τὰς ἀκολούθους τιμὰς συντελεστοῦ μειώσεως h_m / h :

Περίοδος ἐπαναφορᾶς, T	1	5	10	50
Σημειακὴ βροχόπτωσις, $h = \frac{h_1 + h_2}{2}$ (mm)	25	38	46	61
Μέση βροχόπτωσις, h_m (mm)	23,5	35,5	42	54
Συντελεστὴς μειώσεως, $\frac{h_m}{h}$	0,94	0,93	0,92	0,89

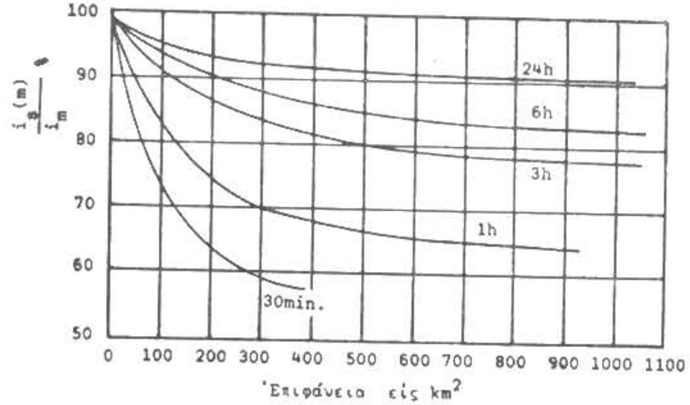
Ἡ ἀξία τῶν ἀνωτέρω ὑπολογισμῶν εἶναι σχετική, προϋποθέτει δὲ ἐκτὸς τῶν ἄλλων ὅτι ὁ συντελεστὴς συσχετίσεως εἶναι ἀνεξάρτητος τοῦ ὕψους τῶν βροχοπτώσεων, γεγονὸς τὸ ὁποῖον ἀποκλείει οὐσιαστικῶς τὰς βροχὰς μικρᾶς ἐντά-



Σχ. 2. Καμπύλαι μειώσεως σημειακῆς βροχοπτώσεως διὰ μικρὰς λεκάνας ἀπορροῆς.

σεως. Συνεπῶς ἡ ὡς ἄνω μέθοδος ἔχει τὴν δυνατότητα ἐφαρμογῆς μόνον εἰς τὰς ἰσχυρὰς βροχοπτώσεις, δηλαδὴ διὰ μεγάλας περιόδους ἐπαναφορᾶς. Διεξάγεται ἐξ ἄλλου καὶ παρ' ἡμῖν ἔρευνα πρὸς βελτίωσιν τοῦ θεωρητικοῦ ὑποβάθρου τῆς μεθόδου.

Εἰς τὴν διεθνῆ βιβλιογραφίαν δίδονται διάφορι σχέσεις καὶ διαγράμματα, συνδέουσαι τὸν συντελεστὴν $\frac{h_m}{h}$ ἢ $\frac{(i_s)_m}{i_m}$, $(i_m = \frac{h}{t})$, μετὰ τῆς βρεχομένης ἐπιφανείας S. Ἡ ἀξιολόγησις των διὰ μίαν ἐφαρμογὴν εἰς συγκεκριμμένας περιπτώσεις ἀπαιτεῖ πάντως ἰδιαιτέραν προσοχήν, (σχ. 2 & 3).



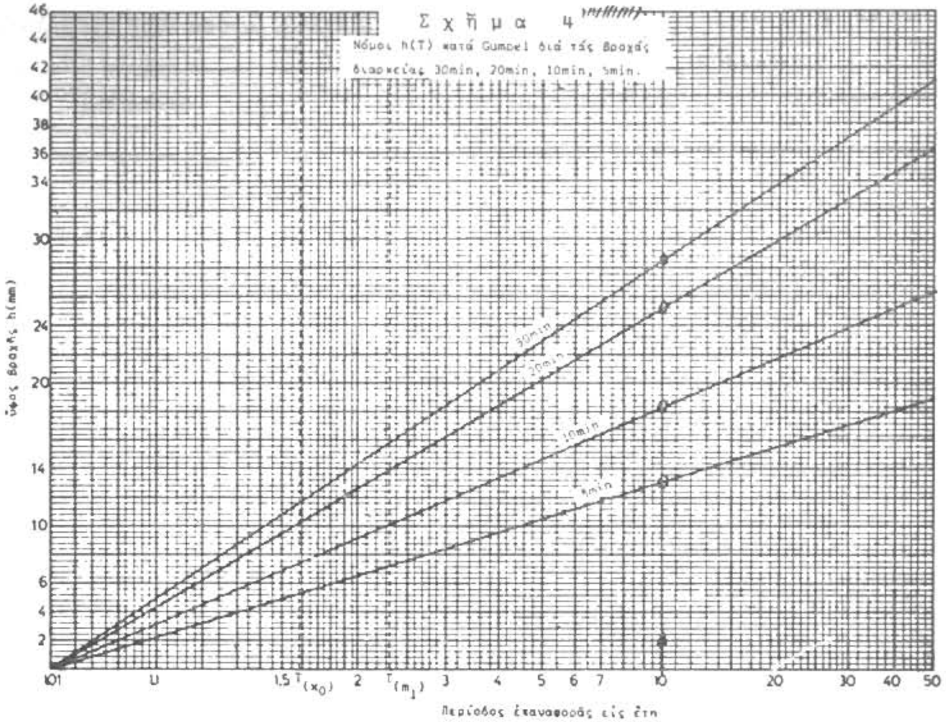
Σχ. 3. Καμπύλαι μειώσεως διὰ μεγάλας λεκάνας ἀπορροῆς.

1.1.5.5. Αἱ σχέσεις ὕψους - διαρκείας καὶ μέσης ἐντάσεως - διαρκείας.

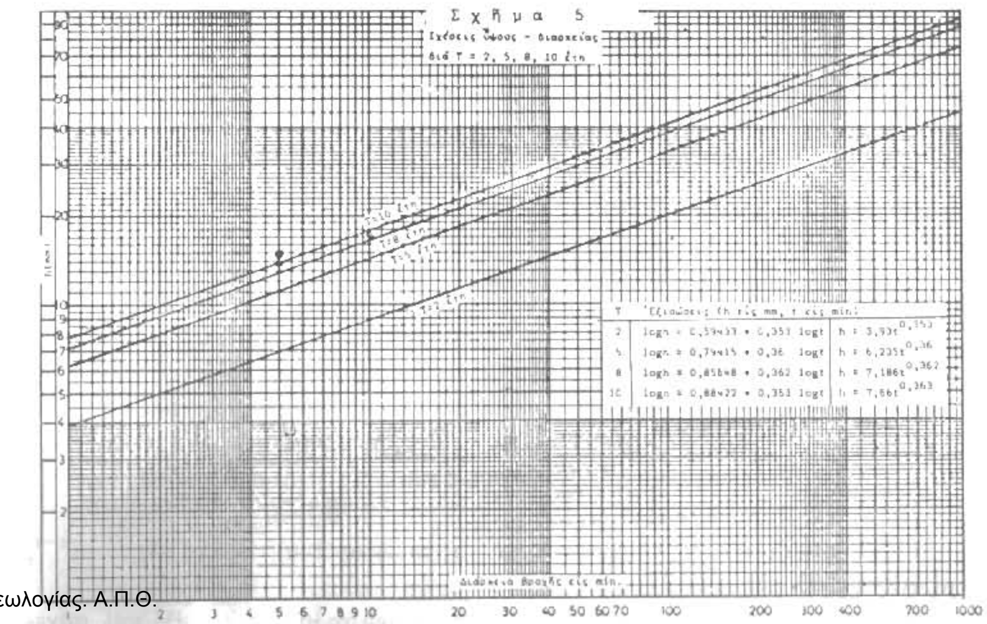
Κατὰ τὴν μελέτην τῶν πλημμυρικῶν ἀπορροῶν ἐνδιαφερόμεθα συνήθως διὰ τὸν ἀναλυτικὸν προσδιορισμὸν τῆς σχέσεως ἡ ὁποία συνδέει τὸ σημειακὸν ὕψος h τῆς βροχῆς, (ἢ τὴν μέσην σημειακὴν ἔντασιν, $i_m = \frac{h}{t}$), μετὰ τῆς διαρκείας ταύτης t, διὰ δεδομένην περίοδον ἐπαναφορᾶς T. Ὑπὸ τὴν θεμελιώδη ὑπόθεσιν «περὶ πλήρους στοχαστικῆς ἀνεξαρτησίας τῶν h ἢ i_m» ἡ ζητουμένη σχέσις h(t) ἢ $i_m(t)$ προσδιορίζεται ὡς ἑξῆς :

α) Ἐκ τῶν εὑρεθέντων, βάσει τῆς στατιστικῆς ἀναλύσεως, νόμων διανομῆς h(T) ἢ $i_m(T)$ διὰ διαφόρους διαρκείας t, π.χ. 15′, 0′, 1 ὥρας κ.ο.κ., εὑρίσκονται διὰ δεδομένην περίοδον ἐπαναφορᾶς T, π.χ. T = 10, τὰ ἀντίστοιχα ὕψη $h_{15'}$, $h_{30'}$, $h_{1\ ὡρ.}$ κ.λ.π. ἢ αἱ ἀντίστοιχαι μέσαι ἐντάσεις i_m. Δι' ἕκαστον T, ὁρίζεται οὕτω ἓν σημειοσύνολον διὰ τὸ ὁποῖον καὶ ζητεῖται ἡ βελτίστη γραφικὴ ἢ ἀναλυτικὴ ἔκφρασις τῶν στοιχείων του συναρτήσει τῶν ἀξόνων τοῦ ἐπιπέδου (h, t) ἢ (i_m, t), (σχ. 4).

β) Χαράσσεται ἐν συνεχείᾳ γραφικῶς ἢ ἀναλυτικῶς ἡ ζητουμένη καμπύλη h(t) ἢ $i_m(t)$, ἕκαστον σημεῖον τῆς ὁποίας δίδει τὴν ζητουμένην ἀντιστοιχίαν ὕψους - διαρκείας ἢ μέσης ἐντάσεως - διαρκείας διὰ τὴν δεδομένην περίοδον T. Εἶναι βεβαίως προφανὲς ὅτι ἡ καμπύλη αὕτη ἐπ' οὐδενὶ λόγῳ παριστάνει μίαν συγκεκριμένην βροχὴν περιόδου ἐπαναφορᾶς T, (σχ. 5 & 6).

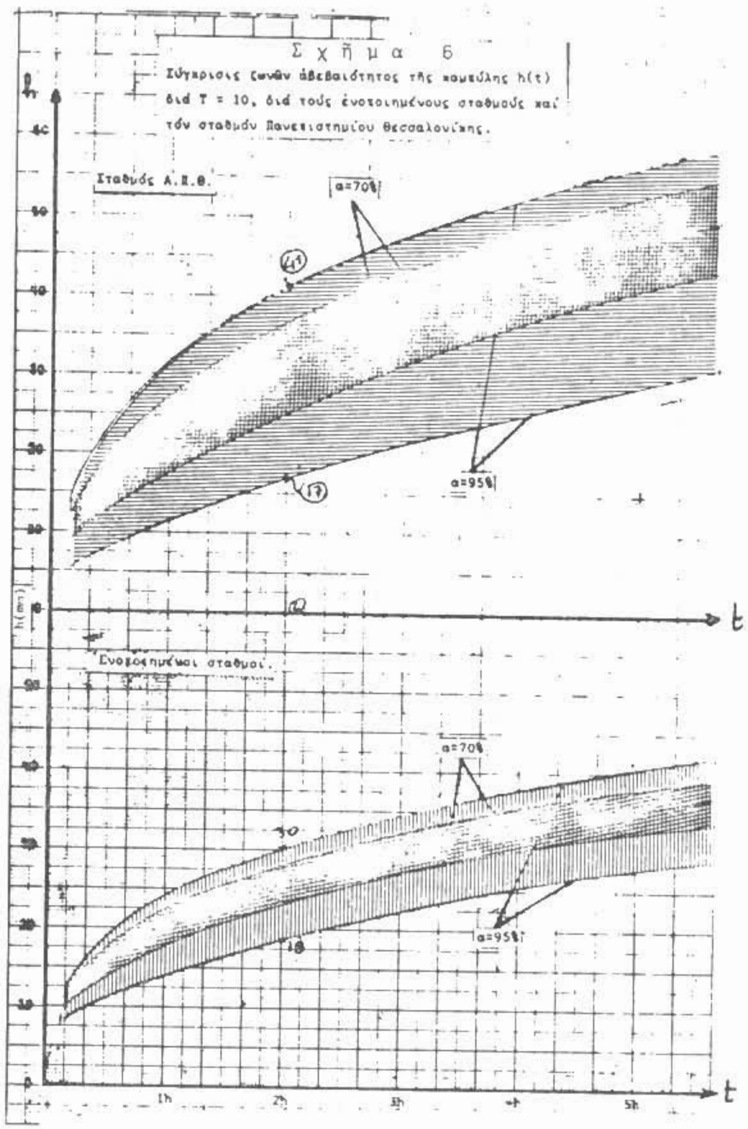


Σχ. 4. Νόμοι h(T) κατὰ Gumbel διὰ τὰς βροχὰς διαρκείας 30 min, 20 min, 10 min, 5 min.



Σχ. 5. **Σχέσεις ὕψους - διαρκείας διὰ T = 2, 5, 8, 10 ἔτη.**

Ἡ συμπάθεια τῶν μελετητῶν πρὸς τὰς ἀναλυτικὰς λύσεις τῶν προβλημάτων δίδει καὶ ἐδῶ μίαν σημαντικὴν ποικιλίαν μορφῶν διὰ τὴν ἔκφρασιν τῆς σχέσεως h(t) ἢ $i_m(t)$. Αἱ συνηθέστεραι ἐξ αὐτῶν κατατάσσονται εἰς δύο κατηγορίας :



Σχ. 6. Σύγκρισις ζωνῶν ἀβεβαιότητος τῆς καμπύλης h(t) διὰ T = 10, διὰ τοὺς ἐνοποιημένους σταθμοὺς καὶ τὸν σταθμὸν Πανεπιστημίου Θεσσαλονίκης.

α) Ἐκθετικαὶ σχέσεις τῆς μορφῆς, (τύπος τοῦ Montana), $h = \alpha t^n$ $i_m = \alpha t^{n-1}$, Ἐμφανίζουν τὰ κάτωθι πλεονεκτήματα :

Γραμμικοποιοῦνται διὰ λογαριθμήσεως, ($\log h = \log \alpha + n \log t$), καὶ συνεπῶς ἁπλοποιοῦνται ἀφ' ἑνὸς μὲν ἡ γραφικὴ των παράστασις καὶ ἀφ' ἑτέρου ὁ

προσδιορισμὸς τῶν συντελεστῶν των διὰ τῆς μεθόδου τῶν ἐλαχίστων τετραγώνων. Οἱ προσδιοριζόμενοι συντελεσταί των (α, n), ἰσχύουν διὰ σχετικῶς εὐρὺ διάστημα χρόνων t, ἐνίοτε εἰς βάρος τῆς μέσης ἀκριβείας. Δύνανται, π.χ. νὰ καλύψουν τὸ διάστημα ἀπὸ 0 ἕως 12 ὡρῶν.

β) Ὑπερβολικαὶ σχέσεις τῆς μορφῆς, (τύποι Talbot, Richards, κλπ.) :

$$i_m = \frac{h}{t} = \frac{\alpha}{b+t}.$$

Τὸ βασικό των πλεονέκτημα εἶναι ὅτι δύνανται νὰ ἀποδώσουν **ἀκριβέστερον** τὴν πραγματικὴν ἀντιστοιχίαν τῶν σημείων (i_m, t), ἐφ' ὅσον ὅμως ἔχουν προσδιορισθῆ πολλὰ ἐξ αὐτῶν εἰς τὸ γενικὸν σημειοσύνολον. Οἱ προσδιοριζόμενοι ἀντιστοίχως συντελεσταὶ α, β, ἰσχύουν ἐξ ἄλλου διὰ μικρότερα διαστήματα χρόνων t, (π.χ. ἀπὸ 0 ἕως 4 ὥρας) καὶ δέον ὅπως ἐπαναπροσδιορίζωνται ἀνὰ κλάσεις διαρκείας.

1. 1. 5. 6. Ἐπεξεργασία δεδομένων δι' ἠλεκτρονικῶν ὑπολογιστῶν.

Ἡ στατιστικὴ ἀνάλυσις δεδομένων ἐν γένει προσφέρεται τὰ μέγιστα εἰς τὴν δι' ἠλεκτρονικῶν ὑπολογιστῶν ἐπίλυσιν τῶν σχετικῶν προβλημάτων. Πράγματι, ὁ ὄγκος τῶν ὑπολογισμῶν καὶ ἡ μαθηματικῶς ἁπλῆ μορφὴ τῶν περισσοτέρων σχέσεων ἐπιβάλλουν τὸν προγραμματισμὸν καὶ τὴν ἐν συνεχείᾳ ἐπίλυσιν δι' ὑπολογιστοῦ. Τὰ συνταχθησόμενα οὕτω προγράμματα δέον ὅπως συνδυάζουν τὴν ἁπλότητα τῆς μορφῆς μετὰ τῆς δυνατότητος πρὸς μίαν γενικωτέραν δυνατὴν ἐφαρμογὴν εἰς ὅλα τὰ ἀνάλογα προβλήματα τῆς πράξεως.

Διὰ τὴν βάσει τῶν ὡς ἄνω ἀρχῶν κατάστρωσιν προγραμμάτων ἀναφέρομεν τὸ προσφάτως ἐκδοθὲν βιβλίον τοῦ συναδέλφου κ. Ἀλεξοπούλου εἰς τὸ ὁποῖον δίδονται τὰ προγράμματα ἐπιλύσεως διὰ τὰς συνήθεις περιπτώσεις.

Εἰς τὴν ὑφ' ἡμᾶς ἕδραν Ὑδραυλικῆς ἔχομεν ἐξ ἄλλου ὁλοκληρώσει τὴν αὐτόματον ἐπίλυσιν πολλῶν προβλημάτων ὡς εἶναι π.χ.,

— ὁ ἔλεγχος ὁμογενείας ἐτησίων ὑψῶν βροχῆς,
— ἡ ὁμογενοποίησις καὶ μεγιστοποίησις ἐτησίων καὶ ἐποχιακῶν ὑψῶν βροχῆς,
ἡ ἀνάλυσις βροχοπτώσεων μικρᾶς διαρκείας βάσει τοῦ νόμου ἀκραίας κατανομῆς τοῦ Gumbel,
— ὁ προσδιορισμὸς ὁρίων, διαστημάτων καὶ ζωνῶν ἐμπιστοσύνης διά τινας παραμέτρους τῶν νόμων Gauss καὶ Gumbel, κ.λ.π.

Ἡ ὡς ἄνω αὐτοματοποίησις εἰς τοὺς ὑπολογισμοὺς ἔδειξεν ὅτι,

— ἦλθον εἰς φῶς διάφορα λογιστικὰ σφάλματα τὰ ὁποῖα ἠλλοίωναν μέχρι ποσοστοῦ 10 % τὰ ἀποτελέσματα διὰ τὰς μεγάλας περιόδους ἐπαναφορᾶς, (π.χ. διὰ T > 10 ἐτῶν),
— ἐμειώθη εἰς τὸ τρίτον περίπου τὸ κόστος ὑπολογισμοῦ διὰ μίαν συνήθη ὑδρολογικὴν ἐφαρμογήν.

1. 2. Μαθηματικὰ ὁμοιώματα ἐπιφανειακῶν ἀπορροῶν.

1. 2. 1. Ροαὶ ἐντὸς φυσικῶν ἢ τεχνητῶν ὑδατορρευμάτων.

Ἡ κατάστρωσις τῶν συνήθων μαθηματικῶν ὁμοιωμάτων ἐπιφανειακῶν ἀπορροῶν στηρίζεται εἰς τὰς ἀκολούθους παραδοχάς:

Ἡ δίαιτα τῆς ροῆς εἶναι τ υ ρ β ώ δ η ς, π λ ή ρ ω ς ἀ ν ε π τ υ γ μ έ ν η, τὰ δὲ φυσικὰ μεγέθη αὐτῆς ἀποδίδονται ἀπὸ τὰς μέσας τοπικὰς τιμὰς αὐτῶν. Ἡ κλῖμαξ τυρβώδους θεωρεῖται ἀπειροστὴ ἐν σχέσει πρὸς τὴν κλίμακα χρονικῶν μεταβολῶν τοῦ φαινομένου εἰς τὴν περίπτωσιν μὴ μονίμου ροῆς. Αἱ ὑποθέσεις αὗται ἰσχύουν σχεδὸν πάντοτε καὶ ἐν τῇ πράξει.

β) Ἡ ροὴ θεωρεῖται μ ο ν ο δ ι ά σ τ α τ ο ς, ὁπότε καταφεύγομεν εἰς τὴν περιγραφὴν τῶν φυσικῶν χαρακτηριστικῶν αὐτῆς τῇ βοηθείᾳ μ έ σ ω ν χ ω ρ ι κ ῶ ν τ ι μ ῶ ν τῶν διαφόρων φυσικῶν μεγεθῶν. Παρ' ὅλον ὅτι ἡ παραδοχὴ αὕτη εἶναι οὐσιαστικῶς χονδροειδής, ὁδηγεῖ εἰς μαθηματικὰ ὁμοιώματα ἀρκούντως ἱκανοποιητικὰ ἀπὸ ἀπόψεως φυσικῆς ἀκριβείας διὰ τὰς συνήθεις ἐν τῇ πράξει ἐφαρμογάς.

γ) Εἰς τὴν περίπτωσιν μὴ μονίμου ροῆς θεωρεῖται ὅτι ἰσχύουν ἀνὰ ὡρισμένα χρονικὰ διαστήματα αἱ ἐμπειρικαὶ σχέσεις γραμμικῶν ἀπωλειῶν τοῦ τύπου Chézy, παρ' ὅλον ὅτι κατεστρώθησαν αὗται διὰ μόνιμον δίαιταν καὶ μόνον.

Παραλείποντες τὰς ἄνευ θεωρητικοῦ ἐνδιαφέροντος περιπτώσεις μονίμου ροῆς (ὁμοιομόρφου ἢ ὁμαλῶς μεταβαλλομένης) περιοριζόμεθα εἰς συνοπτικὴν περιγραφὴν τοῦ γενικοῦ μαθηματικοῦ ὁμοιώματος τῶν μὴ μονίμων ροῶν ὑπὸ τὰς ὡς ἄνω ἐκτεθείσας παραδοχάς. Τὰ χαρακτηρίζοντα τὴν ροὴν μέσα φυσικὰ μεγέθη εἶναι,

— ἡ μέση ταχύτης u ἀνὰ διατομὴν καὶ
— τὸ βάθος y τῆς ροῆς εἰς τὸν ἄξονα τῆς διατομῆς.

Τὰ ὡς ἄνω δύο μεγέθη θεωροῦνται ὡς αἱ πρὸς προσδιορισμὸν ἄγνωστοι ἐξηρτημένοι συναρτήσεις, ἐκφράζονται δὲ τῇ βοηθείᾳ δύο ἀνεξαρτήτων μεταβλητῶν καὶ δή,

— τῆς τετμημένης x κατὰ τὴν διεύθυνσιν τῆς ροῆς,
— τοῦ χρόνου t.

Ἡ μὴ μόνιμος ροὴ προκύπτει ὡς συνέπεια μιᾶς μεταβολῆς τῶν ἀρχικῶν ἢ ὁριακῶν συνθηκῶν κατὰ τὴν διάρκεια τῆς ἐξελίξεως τοῦ ὅλου φαινομένου. Εἰς τὴν περίπτωσιν μιᾶς βραδείας καὶ ὁμαλῆς μεταβολῆς τῶν ὡς ἄνω συνθηκῶν ἡ προκύπτουσα μὴ μόνιμος ροὴ περιγράφεται ἱκανοποιητικῶς ὑπὸ τοῦ μαθηματικοῦ ὁμοιώματος τοῦ Saint - Venant, καταστρωθέντος τὸ πρῶτον τὸ ἔτος 1871. Πράγματι, ὑπὸ τὰς εἰδικωτέρας παραδοχάς,

— διώρυγος μικρᾶς κατὰ μῆκος κλίσεως,
— συνεχῶν μεταβολῶν τῆς διατομῆς,
— σταθερᾶς εἰσόδου ἢ ἐξόδου μιᾶς ἐγκαρσίας παροχῆς q,
— γραμμικῶν ἀπωλειῶν φορτίου,

προκύπτει μεταξὺ τῶν πρὸς εὕρεσιν ἐξηρτημένων συναρτήσεων y(x, t), u(x, t) τὸ κάτωθι σύστημα ἡμιγραμμικῶν διαφορικῶν ἐξισώσεων μετὰ μερικῶν παραγώγων πρώτης τάξεως καὶ ὑπερβολικοῦ τύπου,

$$\begin{aligned} (S \cdot u)_{,x} + S_{,t} &= q \\ u_{,t} + u \cdot u_{,x} + g y_{,x} &= g(S_0 - S_f) \end{aligned} \qquad (1.2.1.\alpha)$$

ἔνθα S ἡ ὑγρὰ διατομή, S_0 ἡ κατὰ μῆκος κλίσις τοῦ πυθμένος καὶ S_f ἡ ὀφειλομένη εἰς τὰς τριβὰς γραμμικὴ ἀπώλεια ἐνεργείας.

Ἅπασαι αἱ μεθοδολογίαι ἐπιλύσεως τῶν μὴ μονίμων ροῶν ἐντὸς ὑδατορρευμάτων στηρίζονται εἰς τὴν ἐπίλυσιν (διὰ προσεγγιστικῆς κλειστῆς λύσεως ἢ δι' ἀριθμητικῆς ἀναλύσεως) τοῦ ὡς ἄνω συστήματος διαφορικῶν ἐξισώσεων. Ἡ θεωρία τῶν χαρακτηριστικῶν δίδει π.χ. τὴν λύσιν στηριζομένη εἰς τὰς φυσικὰς ἰδιότητας διαδόσεως μιᾶς διαταραχῆς καὶ ὁδηγεῖ ἐν συνεχείᾳ εἰς ἀριθμητικὰς λύσεις τῶν ὁποίων τὸ βασικὸν προσὸν εἶναι μία πληρεστέρα φυσικὴ ἐποπτεία. Ἡ ἀπ' εὐθείας ἐπίλυσις τοῦ ὡς ἄνω συστήματος ἐξισώσεων διὰ μιᾶς μεθόδου πεπερασμένων διαφορῶν δίδει ἐπίσης ἱκανοποιητικὰ ἀποτελέσματα. Παρατηροῦμεν τέλος ὅτι ἡ μελέτη διαδόσεως τῶν πλημμυρῶν ἀντιμετωπίζεται πολλάκις διὰ μαθηματικοῦ ὁμοιώματος παραβολικοῦ τύπου, προκύπτοντος δι' ἁπλουστεύσεως τοῦ ὡς ἄνω γενικευμένου ὁμοιώματος τοῦ Saint - Venant.
Εἰς τὸ ἀρχικὸν πρόγραμμα τῆς σειρᾶς τῶν ὁμιλιῶν μου περιελαμβάνετο καὶ μία σύντομος συγκριτικὴ ἀνασκόπισις τῶν συνήθων μεθόδων ἐπιλύσεως τοῦ συστήματος ἐξισώσεων (1. 2. 1. α.) τοῦ Saint - Venant, δεδομένου ὅμως ὅτι παράλληλα θέματα ἀναπτύσσονται καὶ ὑπὸ τῶν λοιπῶν ὁμιλητῶν, περιορίζομαι εἰς τὴν ὡς ἄνω γενικὴν περιγραφὴν καὶ θέσιν τοῦ ὅλου προβλήματος.

1. 2. 2. Μελέτη πλημμυρῶν διὰ τῆς θεωρίας τῶν στοχαστικῶν διαδικασιῶν.

Οἱ ἑρμηνεύοντες τὰς ἀπορροὰς τῶν φυσικῶν ὑδατορρευμάτων μηχανικοί, κατενόησαν ἀπὸ μακροῦ χρόνου τὴν πιθανολογικὴν δομὴν τοῦ φαινομένου τῆς ἀπορροῆς. Πράγματι, ἡ κοινὴ λογικὴ ὁδηγεῖ συντόμως εἰς τὸ συμπέρασμα ὅτι ἡ στιγμιαία παροχὴ ἑνὸς ὑδατορρεύματος δὲν δύναται νὰ ἀποτελῇ ἕνα τυχαῖον γεγονός, ἀλλὰ συνδέεται πιθανολογικῶς μετὰ τῶν παροχῶν μιᾶς ὡρισμένης σειρᾶς προγενεστέρων χρονικῶν στιγμῶν. Παρ' ὅλα αὐτὰ μέχρι τοῦ 1955 οἱ ἐρευνηταὶ ἐβασίζοντο ἐπὶ τῆς θεωρίας τῶν τυχαίων γεγονότων κατὰ τὴν μελέτην τῶν διακυμάνσεων παροχῆς ἢ πλημμυρῶν τῶν ὑδατορρευμάτων.

Ἡ πρώτη εἰσαγωγὴ τῆς θεωρίας τῶν στοχαστικῶν διαδικασιῶν εἰς τὴν μελέτην τῶν ἀπορροῶν, ἀντὶ τῆς κλασσικῆς θεωρίας τῶν τυχαίων γεγονότων, ἤρχισεν μεταξὺ τῶν ἐτῶν 1955 καὶ 1958, ἀνεξαρτήτως εἰς ΗΠΑ καὶ ΕΣΣΔ. Αἱ σχετικαὶ δημοσιεύσεις ἀφεώρουν τὴν βελτιστοποίησιν ρυθμίσεως τῶν ἀπορροῶν [illegible] φραγμάτων, διὰ τῆς ἀναπαραστάσεως τούτων ὑπὸ μιᾶς διακεκριμένης χρονικῆς σειρᾶς Markov. Παρ' ὅλα αὐτὰ ἡ μεθοδολογία ἐφαμογῆς τῶν στοχαστικῶν διαδικασιῶν εἰς τὰς ἀπορροὰς δὲν ἐπεκράτησεν πλήρως μέχρι σήμερον διὰ τοὺς κάτωθι τέσσαρας λόγους :

α) Αἱ ἐπικρατήσασαι ἐν τῇ ὑδρολογίᾳ συνήθεις μέθοδοι τῆς στατιστικῆς ἀναλύσεως δίδουν ἢ νομίζομεν ὅτι δίδουν ἱκανοποιητικὰ ἀποτελέσματα εἰς πολλὰς περιπτώσεις. Τὸ πολύπλοκον τῆς νέας μεθόδου τῶν στοχαστικῶν διαδικασιῶν ἐδυσχέραινε κατὰ συνέπειαν τὴν ἐφαρμογήν της, ἕως ὅτου τελείως διάφοροι τομεῖς τῆς ἐπιστήμης ἐπέβαλον τὴν ἀνάπτυξιν αὐτῆς ὡς εἶναι π.χ. ὁ αὐτοματισμὸς καὶ ἡ ραδιοηλεκτρολογία.

β) Ἀπὸ τοῦ 1950 καὶ μέχρι σήμερον ὑφίσταται ἐν ἐξελίξει ἡ γνωστὴ διαμάχη μεταξὺ στατιστικῶν καὶ γενετικῶν μεθόδων ἐν τῇ ὑδρολογίᾳ. Αἱ γενετικαὶ μέθοδοι στηρίζονται ἀκριβῶς εἰς τὴν βαθεῖαν ἀνάλυσιν τῶν πολυπλόκων φαινομένων καὶ ἀλληλοεπιδράσεων διαφόρων παραγόντων εἰς τὴν ἐξέλιξίν των. Ἡ πρόοδος εἰς τὸν τομέα αὐτὸν ἐπιβάλλει ὁλονὲν καὶ περισσότερον τὴν μεθοδολογίαν τῶν στοχαστικῶν διαδικασιῶν, διὰ τῆς ὁποίας λαμβάνονται ὑπ' ὄψιν τὰ βαθύτερα αἴτια τῶν ἀλληλοεπιδράσεων.

γ) Ὁ τρίτος λόγος ὀφείλεται εἰς τὸ γεγονὸς ὅτι ἡ ἐφαρμογὴ τῶν μαθηματικῶν ὁμοιωμάτων μιᾶς στοχαστικῆς διαδικασίας ἐν τῇ ὑδρολογίᾳ ἀπαιτεῖ ἰσχυρὰ συγκροτήματα ἠλεκτρονικῶν ὑπολογιστῶν, ἡ ἔλλειψις τῶν ὁποίων ἀποκλείει πᾶσαν δυνατότητα ἐπιλύσεως πρακτικῶν προβλημάτων.

δ) Τέλος ὁ τέταρτος λόγος ὀφείλεται εἰς τὸ ἐξαιρετικῶς πολύπλοκον τῶν δημιουργουμένων ὁμοιωμάτων, οὐχὶ μόνον ἀπὸ ἀπόψεως δομῆς, ἀλλὰ καὶ ἐννοιολογικῶς. Διὰ τὸν τελευταῖον αὐτὸν λόγον αἱ μέχρι σήμερον ὑπάρχουσαι θεωρίαι εὑρίσκονται εἰς τὸ προκαταρκτικὸν αὐτῶν στάδιον, ὡς προκύπτει ἐξ ὅλων τῶν τελευταίων δημοσιεύσεων ἢ ἀνακοινώσεων.

Ἡ καθορίζουσα τὴν στοχαστικὴν διαδικασίαν πιθανολογικὴ συνάρτησις Π(t) δύναται νὰ ἐκφρασθῇ τῇ βοηθείᾳ τῶν κάτωθι δύο μεθόδων :

α) Διὰ τῆς πρώτης μεθόδου προσδιορίζεται τὸ σύστημα τῶν συναρτήσεων διανομῆς τῆς στοχαστικῆς διαδικασίας βάσει γενετικῶν ἢ ἄλλων κριτηρίων καὶ ἐλέγχεται ἐν συνεχείᾳ ἡ σχετικὴ ἐπιτυχία τῆς ἐκλογῆς. Ἐπιτυγχάνονται οὕτω λίαν ἱκανοποιητικὰ ἀποτελέσματα, παρ' ὅλον ὅτι, θεωρητικῶς καὶ πρακτικῶς, αἱ σχετικαὶ μελέται εὑρίσκονται ἐν πλήρει ἐξελίξει.

β) Ἡ δευτέρα μέθοδος στηρίζεται εἰς τὴν ἀνάλυσιν τῆς Π(t) εἰς σειρὰν τῆς μορφῆς

$$\Pi(t) = \Pi_0(t) + \omega_1 \Pi_1(t) + \omega_2 \Pi_2(t) + \ldots,$$

ἔνθα Π_0, Π_1, ... εἶναι μὴ στοχαστικαὶ (προσδιοριστικαὶ) συναρτήσεις καὶ ω_1, ω_2, ... στοχαστικαὶ μεταβληταὶ μηδενικῆς μεταξύ των συσχετίσεως. Αἱ σειραὶ τοῦ ὡς ἄνω τύπου καλοῦνται κανονικαὶ ἀποσυνθέσεις τῆς πιθανολογικῆς μεταβλητῆς Π(t) καὶ συγκλίνουν πιθανολογικῶς διὰ τὸ πλεῖστον τῶν περιπτώσεων. Λαμβάνοντες τοὺς (n+1) πρώτους ὅρους τῆς σειρᾶς ἀναγόμεθα εἰς τὴν μελέτην τῶν n στοχαστικῶν μεταβλητῶν α_1, ... α_n. Παρ' ὅλον ὅτι ἡ δευτέρα αὕτη μέθοδος δύναται νὰ ἐφαρμοσθῇ εἰς πλῆθος σοβαρωτάτων ὑδρολογικῶν προβλημάτων, ἐμφανίζει ὡρισμένας θεωρητικὰς δυσκολίας καὶ διὰ τοῦτο ἀνεπτύχθη μέχρι στιγμῆς πολὺ ὀλιγώτερον τῆς πρώτης μεθόδου. Πιστεύομεν ὅμως ὅτι δύναται νὰ ὁδηγήσῃ τελικῶς εἰς ἁπλούστερα καὶ ἐξ ἴσου ἀκριβῆ μαθηματικὰ ὁμοιώματα στοχαστικῶν διαδικασιῶν.

Ἡ ὅλη μεθοδολογία τῶν στοχαστικῶν διαδικασιῶν ἐφαρμόζεται ἤδη ἐρευνητικῶς ὑπὸ τὴν καθοδήγησίν μας εἰς τὴν μελέτην τῶν ἀπορροῶν σημαντικῶν ὑδατορρευμάτων τοῦ Ἑλλαδικοῦ χώρου, εἰς τὰ πλαίσια ἐπὶ διδακτορίᾳ διατριβῶν.

2. ΥΔΡΟΛΟΓΙΑ ΥΠΟΓΕΙΩΝ ΥΔΑΤΩΝ

2. 1. Κεκορεσμέναι μονοφασικαὶ ροαὶ εἰς μὴ μόνιμον δίαιταν.

Ἡ μηχανικὴ τῶν ρευστῶν διὰ κεκορεσμένου πορώδους μέσου ὑποδιαιρεῖται, ὅπως καὶ πᾶς ἄλλος κλάδος τῆς μηχανικῆς ρευστῶν σημαντικοῦ εἰδικοῦ βάρους, εἰς δύο γενικὰς κατηγορίας. Εἰς τὴν πρώτην, ἡ ὅλη κίνησις λαμβάνει χώραν ὑπὸ τὴν ἐπίδρασιν μιᾶς διαφορᾶς πιέσεων μεταξὺ σταθερῶν ἐν τῷ χώρῳ ορίων καὶ αἱ ἀντίστοιχοι ροαὶ καλοῦνται περιωρισμέναι ἢ ὑπὸ πίεσιν. Εἰς τὴν δευτέραν ἡ κίνησις ἐπηρεάζεται ἐν ὅλῳ ἢ ἐν μέρει καὶ ἀπὸ τὴν διανομὴν τοῦ δυναμικοῦ πεδίου βαρύτητος ἐντὸς τῆς ρευστῆς μάζης. Τὸ γεγονὸς τοῦτο ἰσοδυναμεῖ μὲ τὴν ὕπαρξιν μιᾶς ἐλευθέρας ἐπιφανείας κατὰ τὴν κίνησιν, τῆς ὁποίας ἡ ἐν τῷ χώρῳ θέσις εἶναι ἐν γένει μεταβλητὴ καὶ συνεπῶς περιπλέκει τὴν ἐπίλυσιν τῶν ἀντιστοίχων, προβλημάτων διότι ἰσοδυναμεῖ μὲ μίαν ἐπιπλέον ἐλευθερίαν κινήσεως καὶ μάλιστα διανεμημένην καθ' ὅλον τὸ μῆκος τῆς ἐλευθέρας ἐπιφανείας.

Ἡ ἐπίλυσις τοῦ μαθηματικοῦ ὁμοιώματος τῶν περιωρισμένων ἢ ὑπὸ πίεσιν ροῶν διὰ κεκορεσμένου πορώδους μέσου δὲν ἐμφανίζει σήμερον ἰδιαίτερον ἐρευνητικὸν ἐνδιαφέρον, τουλάχιστον ὑπὸ τὸ πρῖσμα τῆς μακροσκοπικῆς θεωρήσεως τῶν διαφόρων φαινομένων. Ἀντιθέτως, αἱ ροαὶ μὲ ἐλευθέραν ἐπιφάνειαν παρουσιάζουν ἐνδιαφέρον, ὅταν ἡ ἐλευθέρα αὕτη ἐπιφάνεια ἀλλάσσῃ θέσιν ἐν τῷ χώρῳ κατὰ τὴν ἐξέλιξιν τοῦ φαινομένου τῆς ὅλης κινήσεως, τουτέστιν ὅταν ἡ ροὴ εἶναι μὴ μόνιμος μετὰ ἐλευθέρας ἐπιφανείας.

Αἱ ἄμεσοι ἐφαρμογαὶ τῶν ὡς ἄνω ροῶν ἀναφέρονται κυρίως εἰς :

α) Ροὴν μέσῳ φραγμάτων ἢ ἀναχωμάτων ὅταν μεταβάλλεται ἡ στάθμη τοῦ ὕδατος εἰς τὴν ἀνάντη ὑδατοδεξαμενήν. Δεδομένου δὲ ὅτι πλεῖστα τῶν φραγμάτων εἶναι σήμερον χωμάτινα μετὰ ἀδιαπεράτου πυρῆνος, μελετῶνται ὁμοίως αἱ κινήσεις τοῦ ὕδατος ἐντὸς τοῦ διαπερατοῦ τμήματος τοῦ φράγματος, κατὰ τὰς ἀποτόμους ἀλλαγὰς στάθμης αἵτινες εἰς τὴν περίπτωσιν, π.χ. ταχείας ἐκκενώσεως τῆς λίμνης δύνανται νὰ ἐπιφέρουν σημαντικὰς ζημίας εἰς τὴν κεκλιμένην ἀνάντη παρειὰν αὐτοῦ.

β) Κυκλικὰς διακυμάνσεις τῶν φρεατίων ὁριζόντων ἐν συνδυασμῷ μετὰ τῶν ἔργων ἐκμεταλλεύσεως αὐτῶν (φρεάτων ἢ τάφρων).

2. 1. 1. Γενικὴ μεθοδολογία ἐπιλύσεως.

Ὑπὸ τὰς γενικὰς παραδοχάς,

— ὁμογενοῦς ἰσοτρόπου καὶ ἀπαραμορφώτου πορώδους μέσου,
— κεκορεσμένης ροῆς, (βαθμὸς κορεσμοῦ $S = 1$),
— ἀμελητέων ἐπιφανειακῶν καὶ τριχοειδικῶν τάσεων,
— ἰσοθέρμου καὶ ἀσυμπιέστου κινήσεως, ($T =$ σταθ., $p = p_0 =$ σταθ.),
— ἰσχύος τοῦ μακροσκοπικοῦ ἐμπειρικοῦ νόμου τοῦ Darcy καὶ διὰ τὴν μὴ μόνιμον δίαιταν,

τὸ γενικὸν μαθηματικὸν ὁμοίωμα τῆς ροῆς εἰς μὴ μόνιμον δίαιταν γράφεται,

$$\mathrm{div}\,\upsilon = \upsilon_{i,i} = 0 \quad \text{(διατήρησις μάζης)} \qquad (2.1.1.\alpha)$$

$$\upsilon_i = -K\,\mathrm{grad}\,h = -Kh_{,i}, \quad \text{(διατήρησις ποσοτήτων κινήσεως)} \qquad (2.1.1.\beta)$$

ἔνθα $\upsilon_i = \dfrac{Q_i}{A} =$ ταχύτης διηθήσεως, $h = \dfrac{p}{\rho g} + x_3$, $K =$ συντελεστὴς μὲ διαστάσεις ταχύτητος, βαθμωτὸς καὶ σταθερὸς δι' ὁμογενὲς ἰσότροπον καὶ ἀπαραμόρφωτον πορῶδες καὶ δι' ἀμετάβλητον κινηματικὴν συνεκτικότητα τοῦ ρευστοῦ, (συνεπῶς διὰ $T =$ σταθερ.).

Διὰ $\Phi = -Kh =$ δυναμικὸν τοῦ πεδίου τῶν ταχυτήτων διηθήσεως, αἱ (2. 1. 1. α, β) δίδουν τὴν διαφορικὴν ἐξίσωσιν Laplace,

$$\Delta\Phi = \Phi_{,ii} = 0, \qquad (2.1.1.\gamma)$$

τῆς ὁποίας ἡ δυσκολία ἐπιλύσεως ἐξαρτᾶται ἐκ τῆς γεωμετρικῆς μορφῆς καὶ τῆς μαθηματικῆς ἐκφράσεως τῶν τιμῶν ἐπὶ τῶν ὁρίων τοῦ πεδίου αὐτῆς.

Τὰ ἀδιαπέρατα ὅρια ἀποτελοῦν γραμμὰς ροῆς ($\Phi_{,n} = 0$, ἔνθα n ἡ κάθετος πρὸς τὸ ὅριον διεύθυνσις) ἐνῶ τὰ ὅρια δεξαμενῶν γραμμὰς ἴσου δυναμικοῦ ($\Phi =$ σταθ.), ἀμφότερα δὲ παραμένουν σταθερὰ ἐν τῷ χώρῳ. Ἀντιθέτως, ἡ ἐλευθέρα ἐπιφάνεια δὲν ἀποτελεῖ ἐν γένει οὔτε γραμμὴν ροῆς οὔτε ἰσοδυναμικήν. Ὑπὸ ὡρισμένας παραδοχάς, ἰσχυούσας πράγματι καὶ ἐν τῇ φύσει, ἐὰν $F(x_i, t) = 0$ εἶναι ἡ ἐξίσωσις τῆς ἐλευθέρας ἐπιφανείας, τότε ἐπ' αὐτῆς ἰσχύει ἡ ὁριακὴ συνθήκη, (σχ. 7),

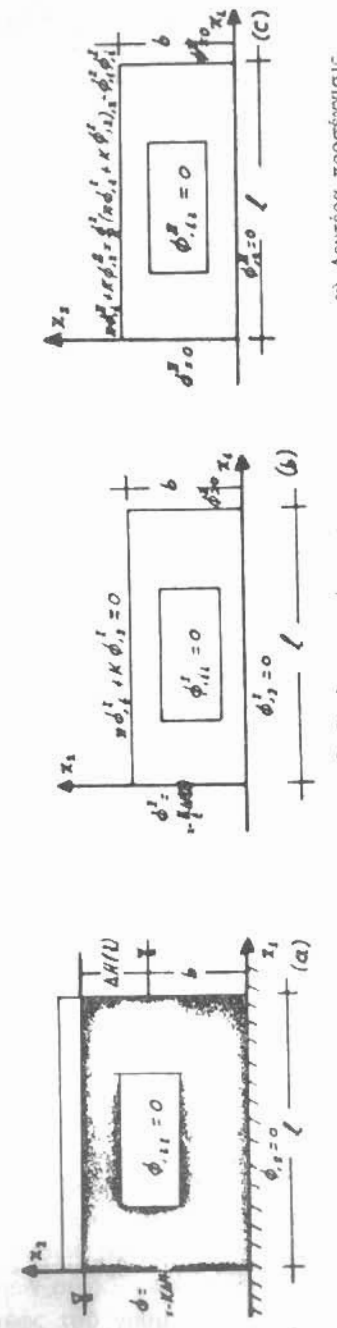
$$n\Phi_{,t} + \Phi_{,i}\Phi_{,i} + K\Phi_{,3} = 0 \qquad (2.1.1.\delta)$$

ἀναγομένη εἰς τὴν

$$n\Phi_{,t} + (\Phi_{,1})^2 + (\Phi_{,2})^2 + K\Phi_{,2} = 0, \qquad (2.1.1.\varepsilon)$$

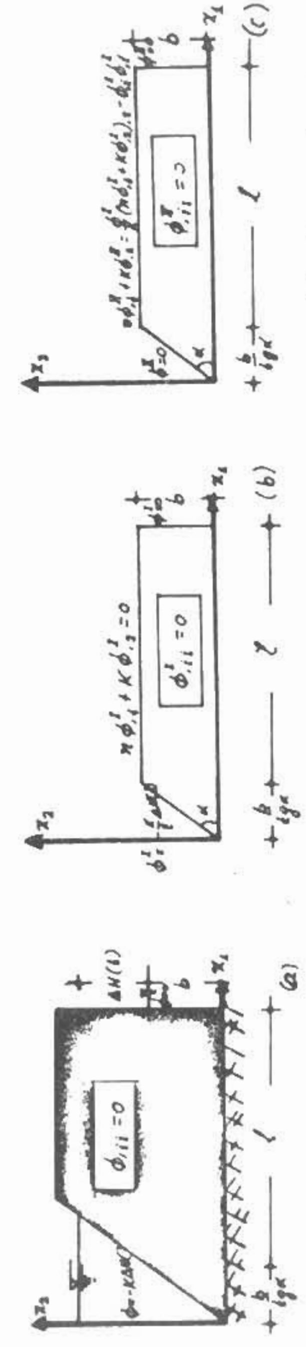
ἐφ' ὅσον ἡ κίνησις εἶναι διδιάστατος, (ἐπίπεδος).

Τὸ ὡς ἄνω γενικὸν μαθηματικὸν ὁμοίωμα, ἀποτελούμενον τελικῶς ἐκ τὴν διαφορικὴν ἐξίσωσιν (2.1.1.γ.) καὶ τὰς ὁριακὰς συνθήκας $\Phi_{,n} = 0$, $\Phi =$ σταθ. καὶ



α) Τὸ φυσικὸν πρόβλημα. β) Πρώτη προσέγγισις. γ) Δευτέρα προσέγγισις.

Σχ. 7. Α. Μὴ μόνιμος ροὴ μετὰ κατακορύφου ἀνάντη παρειᾶς.



α) Τὸ φυσικὸν πρόβλημα. β) Πρώτη προσέγγισις. γ) Δευτέρα προσέγγισις.

Σχ. 7. Β. Μὴ μόνιμος ροὴ μετὰ κεκλιμένης ἀνάντη παρειᾶς.

(2.1.1.δ ἢ ε) δύναται νὰ ἁπλουστευθῇ εἰς βάρος τῆς σχετικῆς ἀκριβείας τῶν λύσεων, ὑπὸ τὰς συνήθεις εἰς ὅλας τὰς περιοχὰς τῆς ὑδραυλικῆς παραδοχάς,

— μικρῶν μεταβολῶν τῆς ἐπιφανείας πέριξ μιᾶς θέσεως, ὁριζομένης διὰ τῶν μέσων ὑψῶν h,
— μικρῶν κλίσεων τῆς ἐλευθέρας ἐπιφανείας καὶ ροῆς κατὰ «φέτες» ἤτοι μὲ σταθερὰν ὁριζοντίαν συνιστῶσαν ταχύτητος ἀνὰ κατακόρυφον διατομήν.

Πράγματι, δεικνύεται εὐκόλως ὅτι ἡ ἐξίσωσις τῆς ἐλευθέρας ἐπιφανείας δύναται νὰ λάβῃ τὴν μορφήν,

$$x_3 = -\frac{\Phi(x_1, x_2, h, t)}{K} = H(x_1, x_2, t),$$

ἐνῶ δύνανται νὰ συνδυασθοῦν, ἡ γενικὴ ἐξίσωσις τοῦ πεδίου ροῆς (2.1.1.γ.) καὶ ἡ ὁριακὴ συνθήκη ἐπὶ τῆς ἐλευθέρας ἐπιφανείας (2.1.1.δ ἢ ε), εἰς τὴν τελικὴν πρὸς ἐπίλυσιν μὴ γραμμικὴν διαφορικὴν ἐξίσωσιν β΄ τάξεως,

$$H_{,t} = \frac{K}{n}(HH_{,i})_{,i} + \frac{\upsilon_{3,0}}{n}, \qquad (2.1.1.\sigma\tau)$$

ἔνθα $\upsilon_{3,0}$ εἶναι ἡ κατακόρυφος συνιστῶσα τῆς ταχύτητος διηθήσεως ἐπὶ τοῦ ἄξονος $x_3 = 0$.

Αἱ λοιπαὶ ὁριακαὶ συνθῆκαι λαμβάνονται ὑπ' ὄψιν κατὰ τὴν ἐν συνεχείᾳ ἐπίλυσιν τῆς ὡς ἄνω ἐξισώσεως (2.1.1.στ).

Αἱ συνήθεις ἐν τῇ πράξει περιπτώσεις ἐμφανίσεως ἀνισοτροπίας (πρώτου βαθμοῦ) ἢ ἀνομοιογενείας κατὰ στρώσεις ἐντὸς τοῦ πορώδους μέσου ἀνάγονται εὐκόλως εἰς τὸ θεωρητικῶς ὁμογενὲς καὶ ἰσότροπον μέσον δι' ἁπλῶν γραμμικῶν μετασχηματισμῶν τῶν ὡς ἄνω μαθηματικῶν ὁμοιωμάτων.

2.1.2. Προσεγγιστικὸν γραμμικοποιημένον ὁμοίωμα ροῆς παραβολικοῦ τύπου.

Ἡ μὴ γραμμικὴ διαφορικὴ ἐξίσωσις (2.1.1.στ), ἀποτελοῦσα καὶ τὸ προσεγγιστικὸν μαθηματικὸν ὁμοίωμα τῶν μὴ μονίμων ροῶν ἐλευθέρας ἐπιφανείας, γραμμικοποιεῖται ὡς ἑξῆς :

Κατ' ἀρχὴν διὰ ροὴν διδιάστατον, ἔχομεν

$$H_{,t} = \frac{K}{n}(H \cdot H_{,1})_{,1} + \frac{\upsilon_{2,0}}{n} \qquad (2.1.2.\alpha)$$

καὶ ἐὰν τὸ ἀδιαπέρατον κάτω ὅριον τῆς ροῆς ταυτίζεται μὲ τὴν εὐθεῖαν $x_1 = 0$, τότε $\upsilon_{2,0} = 0$, ὁπότε ἡ (2.1.2.α) γράφεται,

$$\frac{n}{K} H_{,t} = (H_{,1})^2 + H \cdot H_{,11}. \qquad (2.1.2.\beta)$$

Ὁ γραμμικὸς ὅρος $(H_{,1})^2$ εἶναι μικρὸς ἐν σχέσει πρὸς τοὺς λοιποὺς δύο, δι' ὅλας τὰς συνήθεις περιπτώσεις ροῆς. Ἐξ ἄλλου ἡ ἐλευθέρα ἐπιφάνεια, εὑρισκομένη εἰς ὕψος H ἀπὸ τοῦ ἀδιαπεράτου πυθμένος, ταλαντοῦνται πέριξ μιᾶς μέσης στάθμης H_m, καὶ δή,

$$H = H_m + y(x_1, t),$$

ὁπότε ἡ (2.1.2.β) γράφεται

$$\frac{n}{K} y_{,t} = (H_m + y)\, y_{,11}.$$

Διὰ μικρὰν ταλάντωσιν y, θέτομεν $H_m + y = H_m$ ὁπότε ἔχομεν τὴν τελικὴν γραμμικοποιημένην ἐξίσωσιν

$$\frac{n}{K} y_{,t} = H_m\, y_{,11}. \qquad (2.1.2.\gamma)$$

Ἡ εἰσαγωγὴ τῶν ἀνηγμένων μεταβλητῶν, $x = \frac{x_1}{l}$, $T = \frac{t}{t^*}$, δίδει

$$y_{,T} = \frac{K \cdot H_m t^*}{n \cdot l^2}\, y_{,xx} \qquad (2.1.2.\delta)$$

καὶ ἐὰν ληφθῇ $t^* = \frac{n \cdot l^2}{K \cdot H_m}$, ἔχομεν τελικῶς τὴν ἐξίσωσιν,

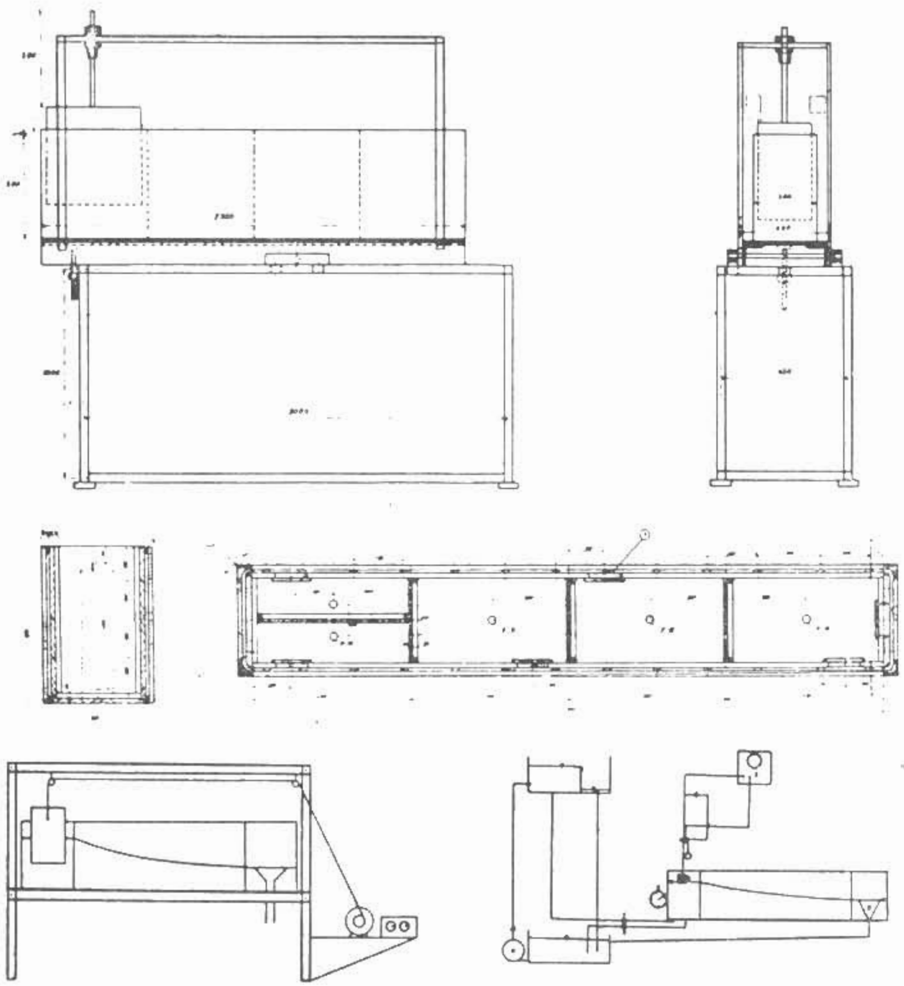
$$y_{,T} = y_{,xx}. \qquad (2.1.2.\varepsilon)$$

Ἡ ἐπίλυσις ταύτης, λαμβανομένων ὑπ' ὄψιν τῶν ὁριακῶν συνθηκῶν

— κατακορύφου ἀνάντη παρειᾶς τῆς δεξαμενῆς μὲ τυχόντα περιοδικὸν νόμον μεταβολῆς τῆς ἐλευθέρας στάθμης,
— κατακορύφου κατάντη ἀδιαταράκτου παρειᾶς,
— ἀρχικῆς συνθήκης ἠρεμίας, εἰς στάθμην H_m,

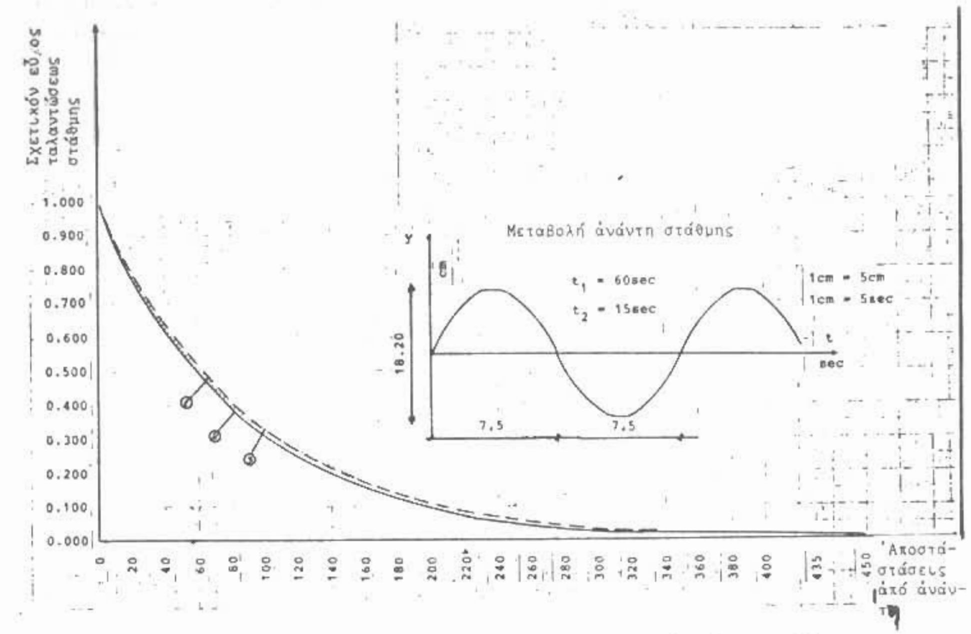
ἐδόθη εἰς τὸ ὑφ' ἡμᾶς ἐργαστήριον δι' ὁλοκληρωτικοῦ μετασχηματισμοῦ Laplace. Κατελήξαμεν εἰς πολύπλοκον μὲν ἀλλὰ κλειστὴν λύσιν, καὶ ἀπεδείξαμεν ὅτι αὕτη περιλαμβάνει καὶ τὴν λύσιν ἄνευ ἀρχικῆς συνθήκης διὰ μεγάλας τιμὰς τοῦ χρόνου T. Συνεπῶς, ἀπεδείχθη ὅτι ἡ ἀρχικὴ συνθήκη ἔχει περιωρισμένα χρονικὰ περιθώρια ἐπιρροῆς εἰς τὴν ἐξέλιξιν τοῦ ὅλου φαινομένου.

Τὸ μὴ γραμμικὸν προσεγγιστικὸν μαθηματικὸν ὁμοίωμα (2.1.2.β.) μὲ τὰς αὐτὰς ὁριακὰς καὶ ἀρχικὰς συνθήκας, ἐπελύθη διὰ τῆς ἀριθμητικῆς ἀναλύσεως, τῇ βοηθείᾳ τῶν σχέσεων κεντρικῆς διαφορᾶς, λαμβανομένων ὑπ' ὄψιν καὶ τῶν κριτηρίων συγκλίσεως τῶν λύσεων ($r < 0{,}5$). Τὰ ἀποτελέσματα ἐκ τῆς κλειστῆς λύσεως τοῦ γραμμικοποιημένου ὁμοιώματος καὶ τῆς ἀριθμητικῆς ἐπιλύσεως τοῦ μὴ γραμμικοῦ ὁμοιώματος ἠλέγχθησαν διὰ σειρᾶς πειραμάτων ἐπὶ εἰδικοῦ ἀναλογικοῦ ὁμοιώματος Hele - Shaw. Ἡ σύγκρισις δίνει τελικὰς διαφορὰς ἐπὶ τοῦ μεγίστου εὔρους ταλαντώσεως τῆς ἐλευθέρας ἐπιφανείας, μικροτέρας τοῦ 2,5 %,



Σχ. 8. Ἀναλογικὸν ὁμοίωμα τύπου Hele - Shaw Ἕδρας Ὑδραυλικῆς Π.Σ.Α.Π.Θ.

γεγονὸς ἰδιαιτέρως ἱκανοποιητικόν. Ὡδηγήθημεν ἐξ ἄλλου εἰς ὡρισμένα εἰδικὰ συμπεράσματα, ἅτινα καὶ ἀπετέλεσαν ἀντικείμενον σειρᾶς συνεχιζομένων ἐρευνῶν, (σχ. 8, 9).



Σχ. 9. Συγκρίσεις μεταξὺ κλειστῆς ἀριθμητικῆς καὶ ἀναλογικῆς λύσεως.

2.1.3. Ἀκριβὲς μὴ γραμμικὸν ὁμοίωμα ροῆς ἐλλειπτικοῦ τύπου.

Τὸ ἀκριβὲς μαθηματικὸν ὁμοίωμα ροῆς (2.1.1.γ) μετὰ τῆς συνθήκης (2.1.1.δ ἢ ε) καὶ τὰς λοιπὰς τοιαύτας, παρὰ τὰς δυσχερείας του, ἐπελύθη εἰς τὸ ὑφ' ἡμᾶς ἐργαστήριον διὰ τῆς μεθόδου τῶν μικρῶν διαταραχῶν. Δι' αὐτῆς τὰ μεγέθη δυναμικοῦ Φ καὶ κατηγμένης ξ τῆς ἐλευθέρας ἐπιφανείας ἀναπτύσσονται εἰς ἐκθετικὰς σειρὰς μιᾶς μικρᾶς παραμέτρου ε, ἀνεξαρτήτου τῶν (x_i, t) καὶ δή,

$$\Phi(x_1, x_2, x_3, t) = \Phi^0(x_1, x_2, x_3) + \varepsilon\Phi^{I}(x_1, x_2, x_3, t) + \varepsilon^2\Phi^{II}(x_1, x_2, x_3, t) + \ldots \quad (2.1.3.\alpha)$$

$$\xi(x_1, x_2, t) = \xi^0(x_1, x_2) + \varepsilon\xi^{I}(x_1, x_2, t) + \varepsilon^2\xi^{II}(x_1, x_2, t) + \ldots \quad (2.1.3.\beta)$$

Ἡ (2.1.1.γ) γράφεται

$$\Phi^0_{,ii} + \varepsilon\Phi^{I}_{,ii} + \varepsilon^2\Phi^{II}_{,ii} + \ldots \equiv 0 \quad (2.1.3.\gamma)$$

καὶ ἰσχύουσα δι' οἱανδήποτε μικρὰν τιμὴν τοῦ συντελεστοῦ ε, παρέχει τὸ σύστημα τῶν διαφορικῶν ἐξισώσεων

$$\left.\begin{aligned} \Phi^0_{,ii} &= 0 \\ \Phi^{I}_{,ii} &= 0 \\ \Phi^{II}_{,ii} &= 0 \\ &\ldots \end{aligned}\right\} (i = 1, 2, 3) \quad (2.1.3.\delta)$$

Τὸ δυναμικὸν $\Phi = \Phi(x_1, x_2, x_3, t)$ ἐπὶ τῆς ἐλευθέρας ἐπιφανείας, (διὰ $x_3 = \xi$), ἐφ' ὅσον ἡ συνάρτησις Φ εἶναι συνεχὴς καὶ μὲ συνεχεῖς παραγώγους ἕως τὴν ἀναγκαιοῦσαν τάξιν, δύναται νὰ ἐκφρασθῇ, ἀναπτυσσόμενον εἰς σειρὰν Taylor, συναρτήσει τοῦ δυναμικοῦ τοῦ ἀντιστοιχοῦντος εἰς τὴν μόνιμον ἀδιατάρακτον κατάστασιν, (διὰ $x_3 = \xi^0$).

Συνεπῶς,

$$\Phi(x_1, x_2, x_3, t)\big|_{x_3=\xi} = \Phi(x_1, x_2, x_3, t)\big|_{x_3=\xi^0} + (\xi-\xi^0)\,\Phi_{,3}\big| + \\ + \frac{(\xi-\xi^0)^2}{2}\,\Phi_{,33}\big|_{x_3=\xi^0} + \ldots \qquad (2.1.3.\varepsilon)$$

Δι' ἀντικαταστάαεων τὸ ὅλο πρόβλημα ἀνάγεται εἰς τὴν ἐπίλυσιν σειρᾶς προβλημάτων διαφορικῶν ἐξισώσεων μὲ ἀντιστοίχους ὁριακὰς συνθήκας διὰ τὴν ἐλευθέραν ἐπιφάνειαν τοῦ ρευστοῦ, ἡ δὲ γενικὴ λύσις διὰ προσέγγισιν δευτέρας τάξεως δίδει τὴν θέσιν τῆς ἐλευθέρας ἐπιφανείας διὰ τὴν αὐτῆς τάξεως προσέγγισιν. Διὰ τῆς αὐτῆς ὡς ἀνωτέρω μεθόδου εἶναι δυνατὸν νὰ ἐξαχθοῦν περαιτέρω σχέσει διὰ μεγαλυτέρας προσεγγίσεις.

Ἐπελύθη οὕτω διὰ κλειστῆς λύσεως ἡ γενικὴ περίπτωσις μὴ μονίμου ροῆς μετὰ κατακορύφων ἀνάντη καὶ κατάντη παρειῶν καὶ διὰ προσεγγίσεις πρώτης καὶ δευτέρας τάξεως. Τὰ αὐτὰ προβλήματα ἐπιλύονται καὶ διὰ τῆς ἀριθμητικῆς ἀναλύσεως. Πρὸς τοῦτο, αἱ ἀντίστοιχοι λαπλασιαναὶ προσεγγίζονται ὑπὸ τῶν ἐξισώσεων διαφορῶν καὶ εὑρίσκονται πολὺ ἁπλούστερον αἱ τελικαὶ πρὸς ἐπίλυσιν ἐξισώσεις. Τὰ προκύπτοντα ἀποτελέσματα ἐκ τῶν ὡς ἄνω δύο μαθηματικῶν μεθόδων ἐπιλύσεως συγκρίνονται πάλιν μὲ πειραματικὰ ἀποτελέσματα ἐκ τοῦ ἀναλογικοῦ ὁμοιώματος. Ἐκ τῆς συγκρίσεως προκύπτει ὅτι αἱ δύο θεωρητικαὶ μέθοδοι δίδουν σχεδὸν συμπίπτοντα ἀποτελέσματα καὶ ὡς φαίνεται ἐκ φωτογραφιῶν, ὑπάρχει σχεδὸν τελεία σύμπτωσις μετὰ τῶν πειραματικῶν ἀποτελεσμάτων εἰς οἱανδήποτε τετμημένην τοῦ πεδίου ροῆς καὶ καθ' οἱονδήποτε χρονικὴν στιγμήν. Αἱ ἐλάχιστοι παρατηρούμενοι ἀποκλίσεις εἶναι χρονικῶς καὶ τοπικῶς μεμονωμέναι. Τέλος παρατηρεῖται ὅτι αἱ δύο ἐπιτευχθεῖσαι θεωρητικαὶ μέθοδοι, ἂν καὶ δίδουν σχεδὸν συμπίπτοντα ἀποτελέσματα, ἐν τούτοις ὁ χρόνος ὁ ἀπαιτούμενος διὰ τὴν ἐφαρμογὴν τῆς λύσεως τῆς βασιζομένης ἐπὶ τῆς ἀριθμητικῆς ἀναλύσεως, εἶναι 40 φορὰς περίπου μεγαλύτερος τοῦ ἀπαιτουμένου διὰ τὴν ἀριθμητικὴν ἐφαρμογὴν τῆς κλειστῆς λύσεως.

Διὰ τῆς αὐτῆς ὡς ἄνω μεθόδου τῶν μικρῶν διαταραχῶν ἐπεχειρήθη καὶ ἡ ἐπίλυσις τοῦ ἔτι γενικωτέρου προβλήματος μετὰ κεκλιμένης ἀνάντη παρειᾶς. Τὸ προκῦπτον νέον μαθηματικὸν ὁμοίωμα παρ' ὅλον ὅτι ἐμφανίζει ἐλαχίστας διαφορὰς ἀπὸ τοῦ τῆς κατακορύφου παρειᾶς, παρουσιάζει πολὺ μεγαλυτέρας δυσχερείας ὡς πρὸς τὴν ἐπίλυσίν του διὰ κλειστῆς λύσεως, διότι τὸ κεκλιμένον ὅριον ἀνάντη περιπλέκει σοβαρῶς τὸ ὅλον πρόβλημα. Ἡ ἐφαρμογὴ τῆς συμμόρφου ἀπεικονίσεως παρέχει τὸ ζητούμενον δυναμικὸν Φ ὡς μίαν ἐξαιρετικῶς πολύπλοκον συνάρτησιν τῶν ἀνεξαρτήτων μεταβλητῶν x_1, x_2, καὶ t. Ἡ ἐφαρμογὴ ἀριθμητικῶν δεδομένων ἐπὶ τῆς συναρτήσεως ταύτης ἀπαιτεῖ τόσον πολὺ χρόνον, ὥστε ἡ ἐπίλυσις τοῦ προβλήματος διὰ τῆς ἀριθμητικῆς ἀναλύσεως νὰ θεωρῆται τελικῶς συμφερωτέρα. Διὰ νὰ εἶναι ἐφαρμοστέον τὸ καταστρωθὲν πρόγραμμα ἄνευ οὐδεμιᾶς τροποποιήσεως ἐπὶ προβλημάτων μὲ διαφορετικὰ δεδομένα, ἀπαιτεῖται κατ' ἀρχὰς ἐπεξεργασία τῶν γεωμετρικῶν δεδομένων τοῦ προβλήματος. Πρὸς τοῦτο κατασκευάζεται ὀρθογωνικὸν δίκτυον τὸ ὁποῖον κόπτεται ὑπὸ τοῦ κεκλιμένου ὁρίου εἰς τυχαίας θέσεις ἀναλόγως τῆς γωνίας κλίσεως αὐτοῦ, ὁπότε ἐν γένει δὲν ὑφίστανται ἐπ' αὐτοῦ κόμβοι δικτύου. Ἐπὶ τῶν κόμβων τῶν γειτνιαζόντων μετὰ τοῦ κεκλιμένου ὁρίου αἱ παράγωγοι τῶν συναρτήσεων Φ^{I} καὶ Φ^{II}, ὑπὸ μορφὴν πεπερασμένων διαφορῶν, ἐκφράζονται συναρτήσει τῶν τύπων τῆς γραμμικῆς παρεμβολῆς καὶ συνεπῶς ἡ ἐξίσωσις διαφορῶν μεταβάλλεται ἀπὸ κόμβου εἰς κόμβον.

2. 2. Πολυφασικαὶ ροαὶ ἐν γένει.

Ἡ μεγάλη ἐρευνητικὴ δραστηριότης τῶν τελευταίων ἐτῶν εἰς τὴν ἔρευναν τῶν διφασικῶν ροῶν δύο μὴ μιγνυομένων ρευστῶν καὶ δὴ κατὰ τὴν εἰδικὴν περίπτωσιν τῶν «στρωματωμένων» ροῶν, ὡδήγησεν τὸ ὑφ' ἡμᾶς ἐργαστήριον εἰς τὴν μελέτην ἀναλόγων περιπτώσεων, πάλιν εἰς μὴ μόνιμον δίαιταν. Αὕτη ἀποτελεῖ ἓν πρῶτον βῆμα γενικεύσεως ὅλων τῶν προηγουμένων μονοφασικῶν ροῶν διὰ τὴν περίπτωσιν δύο ρευστῶν, μὲ ἐφαρμογὰς εἰς τὰ φαινόμενα δευτερογενοῦς ἐκμεταλλεύσεως κοιτασμάτων πετρελαιοειδῶν καὶ εἰς τὰ ρεύματα πυκνότητος κατὰ τὰς παραθαλασσίους ἐκμεταλλεύσεις ὑδροφόρων ὁριζόντων ἢ ὑποθαλασσίων πηγῶν.

2. 2. 1. Μαθηματικὸν ὁμοίωμα τύπου Darcy.

Πραγματοποιοῦντες ἕνα γενικευμένον πείραμα Darcy, μέσῳ μιᾶς ὁλικῆς διατομῆς A καὶ διὰ πολλὰς φάσεις συγχρόνως, δυνάμεθα νὰ γράψωμεν δι' ἑκάστην φάσιν (κ) τὴν σχέσιν

$$\frac{Q_{(\varkappa)}}{A} = \upsilon_i^{(\varkappa)} = -\frac{K_{(\varkappa)}}{\rho_{(\varkappa)}\,g}\,\mathrm{grad}\,(p_{(\varkappa)} + \rho_{(\varkappa)}\,g x_3)$$

δεδομένου δὲ ὅτι $K = g\rho\,\dfrac{K_0}{\mu}$, ἔνθα K_0 ἡ ἔχουσα διαστάσεις ἐπιφανείας ἀπόλυτος ἢ γεωμετρικὴ διαπερατότης τοῦ μέσου ἐν τῷ συνόλῳ του, θὰ ἔχωμεν

$$\upsilon_i^{(\varkappa)} = -\frac{K_{0(\varkappa)}}{\mu_{(\varkappa)}}\,\mathrm{grad}\,(p_{(\varkappa)} + \rho_{(\varkappa)}\,g x_3) = -\frac{K_{0(\varkappa)}}{\mu_{(\varkappa)}}\,(p_{(\varkappa)} + \rho_{(\varkappa)}\,g x_3)_{,i} \qquad (2.2.1.\alpha)$$

Εἰσάγοντες τὴν ἀδιάστατον «σχετικὴν διαπερατότητα» $Kr_{(\varkappa)}$ διὰ τῆς σχέσεως

$$Kr_{(\varkappa)} = \frac{K_{0(\varkappa)}}{K_0} \qquad (2.2.1.\beta)$$

θὰ ἔχωμεν τελικῶς δι' ἑκάστην φάσιν τὴν σχέσιν

$$\upsilon_i^{(\varkappa)} = -\frac{Kr_{(\varkappa)} \cdot K_0}{\mu_{(\varkappa)}} (p_{(\kappa)} + \rho_{(\varkappa)} g x_3)_{,i} \qquad (2.2.1.\gamma)$$

ὑπενθυμίζομεν δὲ ὅτι ἡ $\upsilon_i^{(\varkappa)}$, παριστᾷ τὴν ταχύτητα διηθήσεως τῆς φάσεως (κ), ἤτοι μίαν παροχὴν ἀνὰ ὁλικὴν διατομὴν καὶ ὄχι τὴν μέσην τοπικὴν ταχύτητα κατὰ τὴν διεύθυνσιν i, $\upsilon_{(\varkappa)}^{mi}$ μετὰ τῆς ὁποίας συνδέεται διὰ τῆς σχέσεως

$$\upsilon_{mi}^{(\varkappa)} = \frac{\upsilon_i^{(\varkappa)}}{S_{(\varkappa)} \cdot \eta} \qquad (2.2.1.\delta)$$

Διάφοροι ἐρευνηταὶ ἀπέδειξαν ὅτι ἡ Kr εἶναι συνάρτησις :

— τῆς φύσεως τοῦ μέσου καὶ τῆς μορφῆς τῶν πόρων ἀλλὰ ὄχι τῶν διαστάσεών των,
— τῆς διαβρεκτικότητος τοῦ μέσου ὡς πρὸς τὰς διαφόρους φάσεις,
— τοῦ βαθμοῦ κορεσμοῦ $S_{(\varkappa)}$ ἑκάστης φάσεως,

ἐνῷ εἶναι ἀνεξάρτητος τῆς συνεκτικότητος $\mu_{(\varkappa)}$ καὶ τῆς ταχύτητος διηθήσεως $\upsilon_i^{(\varkappa)}$ ἑκάστης φάσεως.

Διὰ τὴν διφασικὴν ροὴν εἰς μὴ μόνιμον δίαιταν καὶ ὑπὸ τὰς προϋποθέσεις ὅτι, τὸ μέσον εἶναι ὁμογενὲς καὶ ἰσότροπον ἀπαραμόρφωτον, (η=πορῶδες=σταθερόν), τελείως κεκορεσμένον ($S_1 + S_2 = 1$), ἡ κίνησις ἰσόθερμος (T = σταθ.) καὶ ὅτι ἰσχύει ὁ νόμος Darcy μὲ τὰς αὐτὰς ὡς πρὸς Kr παραδοχάς, (παρ' ὅλον ὅτι καὶ ὁ νόμος ἀλλὰ καὶ αἱ παραδοχαὶ διὰ τὰ $Kr_{(\varkappa)}$ εὑρέθησαν διὰ πειραμάτων εἰς μὴ μόνιμον δίαιταν), προκύπτουν ἐν γένει δεκατέσσερα ἄγνωστα μεγέθη καὶ ἡ γενικὴ ἐξίσωσις εἶναι

$$F(\upsilon_i^{(1)}\, \upsilon_i^{(2)}\, Kr_{(1)}, Kr_{(2)}, S_{(1)}, S_{(2)}, \rho_{(1)}, \rho_{(2)}, \mu_{(1)}, \mu_{(2)}) = 0$$

Ἀντιστοίχως ἔχομεν

— ἓξ ἐξισώσεις ἐκ τῆς δυναμικῆς

$$\upsilon_i^{(\varkappa)} = -\frac{Kr_{(\varkappa)} K_0}{\mu_{(\varkappa)}} (p_{(\varkappa)} + \rho_{(\varkappa)} g x_3)_{,i} \quad \begin{pmatrix} \kappa = 1,2 \\ i = 1,2,3 \end{pmatrix} \qquad (2.2.1.\varepsilon)$$

— τρεῖς ἐξισώσεις συνεχείας

$$\eta \frac{\partial(\rho_{(\varkappa)} \cdot S_{(\varkappa)})}{\partial t} + (\rho_{(\varkappa)}\, \upsilon_i^{(\varkappa)}), \quad i = 0 \;\; (\kappa = 1, 2) \qquad (2.2.1.\sigma\tau)$$

$$S_{(1)} + S_{(2)} = 0 \qquad (2.2.1.\zeta)$$

— τέσσαρας ἐξισώσεις καταστάσεως,

$$\rho_{(\varkappa)} = \rho_{(\varkappa)}(p_{(\varkappa)}) \quad (\kappa = 1, 2) \qquad (2.2.1.\eta)$$

$$Kr_{(\varkappa)} = Kr_{(\varkappa)}(S_{(\varkappa)}). \qquad (2.2.1.\theta)$$

2.2.2. Διφασικαὶ ροαὶ μὴ μιγνυομένων ρευστῶν εἰς διαφόρους μικροσκοπικῶς περιοχάς.

Ἡ μελέτη τῶν διφασικῶν ροῶν δύο μὴ μιγνυομένων ρευστῶν βασίζεται οὐσιαστικῶς εἰς τὴν μελέτην τῆς κινήσεως τῆς διεπιφανείας, διότι αὕτη ὁρίζει τοπολογικῶς τὰς ὑπὸ ἑκάστης φάσεως κατεχομένας περιοχάς. Διὰ τὴν μελέτην τῆς διεπιφανείας ἀκολουθοῦνται μέθοδοι τῆς στατιστικῆς μηχανικῆς, τῆς μηχανικῆς τῶν συνεχῶν μέσων, τῆς κβαντομηχανικῆς ὡς καὶ τῆς θερμοδυναμικῆς, πλὴν ὅμως, δὲν ἔχει διερευνηθῆ πλήρως εἰσέτι τὸ ὅλον φαινόμενον. Εἰς τὸ ὑφ' ἡμᾶς ἐργαστήριον ἡ διεπιφάνεια θεωρεῖται ὡς ἓν συνεχὲς μέσον, κατανεμημένον εἰς ἕνα διδιάστατον χῶρον, ἡ δὲ ἐξέτασις τῆς δυναμικῆς τοῦ χώρου τούτου ἐπιτυγχάνεται, ἐν παραλλήλῳ ἀναφορᾷ, πρὸς ἀντιστοίχους ἰδιότητας τοῦ τριδιαστάτου χώρου.

Πράγματι, ἡ διεπιφάνεια ἀποτελεῖ τὴν κινητὴν ὁριακὴν συνθήκην μεταξὺ τῶν φάσεων (ι, k). Ὑπὸ τὴν ἰσχύουσαν διὰ μὴ μιγνύομενα ρευστά, βασικὴν προϋπόθεσιν ἀμελητέου πάχους τῆς διεπιφανείας ὡς πρὸς τὰς διαστάσεις τῆς ὅλης κινήσεως, ἀναγόμενα θεωρητικῶς εἰς τὴν κινηματικήν, κινητικὴν καὶ δυναμικὴν μελέτην ἑνὸς συνεχοῦς μέσου ὁριζομένου γεωμετρικῶς βάσει ἑνὸς διδιαστάτου χώρου Riemann μὴ μηδενικῆς καμπυλότητος ἢ ἄλλως μὴ εὐκλειδίου. Τὸ συνεχὲς μέσον διεπιφάνεια κινεῖται ἐντὸς τοῦ συνεχοῦς μέσου «ρευσταὶ φάσεις μὴ μιγνυομένων ρευστῶν» ὁριζομένου γεωμετρικῶς βάσει τοῦ τριδιαστάτου εὐκλειδίου χώρου, εἰς τὸν ὁποῖον συνήθως ἀναφερόμεθα.

Τὰ ἀνωτέρω ἰσχύουν ἀπολύτως μὲν διὰ κινήσεις ρευστῶν ἐντὸς ἐλευθέρου χώρου ὡς εἶναι π.χ. ἡ ροὴ ἐντὸς τοῦ ἀναλογικοῦ ὁμοιώματος τύπου Hele - Shaw, μακροσκοπικῶς δὲ διὰ κινήσεις ρευστῶν μέσῳ τῆς στερεᾶς φάσεως ἑνὸς πορώδους μέσου, ὡς συμβαίνει κατὰ κανόνα εἰς τὴν φύσιν.

Τὸ μαθηματικὸν ὁμοίωμα τὸ προκῦπτον διὰ τῆς χρησιμοποιήσεως μακροσκοπικῶν φυσικῶν χαρακτηριστικῶν τῆς διεπιφανείας καὶ μόνον αὐτῆς, οὐδὲν ἄλλο εἶναι εἰ μὴ τὸ ἀντίστοιχον τῶν ἐξισώσεων Navier - Stokes διὰ τὸν διδιάστατον χῶρον. Τοῦτο θὰ ἀπετέλει ἴσως, καὶ τὸ ἔσχατον ὅριον γνώσεων, εἰς τὸ ὁποῖον θὰ ἠδύνατο νὰ ἀχθῇ ἐπιστημονικὸν ὂν τῆς διεπιφανείας κατὰ τὴν μελέτην τοῦ χώρου του. Ἡ περαιτέρω σύνδεσις τῆς διεπιφανείας μετὰ τῶν γειτονικῶν ρευστῶν μαζῶν εἶναι ἔργον τοῦ ἐπιστήμονος τοῦ τριδιαστάτου χώρου. Οὗτος δύναται νὰ διατυπώσῃ τὴν δυναμικὴν ἐξίσωσιν τῆς διεπιφανείας, τῇ βοηθείᾳ χαρακτηριστικῶν γνωρισμάτων τῶν ἐφαπτομένων μαζῶν διὰ νὰ καταλήξῃ εἰς τὴν γε-[illegible]σιν τῆς διεπιφανείας κατὰ τὴν κίνησιν καὶ τὸν μετασχηματισμὸν της ἐντὸς τοῦ τριδιαστάτου χώρου.

Αἱ καταστρωθεῖσαι ἐξισώσεις εἶναι πάντως ἐξαιρετικῶς πολύπλοκοι καὶ ἡ ὁλοκλήρωσίς των εἶναι ἀδύνατος ἀκόμη καὶ διὰ τὰς ἁπλουστέρας περιπτώσεις. Κρίνεται συνεπῶς ἀναγκαία ἡ διατύπωσις ἑνὸς ἁπλοποιημένου μαθηματικοῦ ὁμοιώματος διὰ τὴν μελέτην ὡρισμένων περιπτώσεων διφασικῆς ροῆς.

2.2.3. **Ἀπλουστευμένον μαθηματικὸν ὁμοίωμα.**

Ὑπὸ τὰς λογικὰς παραδοχάς,

— ἀμελητέων κατακορύφων συνιστωσῶν τῆς ταχύτητος ἐν σχέσει πρὸς τὰς ὁριζοντίας τοιαύτας
— ἀμελητέων διεπιφανειακῶν τάσεων,

αἱ ὁριζόντιαι ταχύτητες τῶν δύο ρευστῶν εἶναι ἀντιστοίχως

$$\left.\begin{aligned} \upsilon_{I} &= -K^{I}(H^{I}+H^{II})_{,1} \\ \upsilon_{II} &= -K^{II}(\alpha H^{I}+H^{II})_{,1} \end{aligned}\right\} \qquad (2.2.3.\alpha)$$

ἔνθα, $\alpha = \dfrac{\rho^{I}}{\rho^{II}}$ εἶναι ὁ λόγος τῶν πυκνοτήτων.

Αἱ ἐπιπλέον ἀπαιτούμεναι ἐξισώσεις συνεχείας προκύπτουν δι' ἀπομονώσεως ἑνὸς στοιχειώδους ὄγκου ρευστῶν περιοριζομένου ὑπὸ δύο κατακορύφων τομῶν. Οὕτω ἐὰν Q^{I} καὶ Q^{II} εἶναι αἱ παροχαὶ τῶν δύο ρευστῶν τῶν εἰσερχομένων διὰ τῶν κατακορύφων τομῶν, δεικνύεται τελικῶς ὅτι

$$Q^{I} = \int_{H^{II}}^{H^{I}+H^{II}} \upsilon^{I}\,dx_2$$

$$Q^{II} = \int_{0}^{H^{II}} \upsilon^{II}\,dx_2$$

καὶ βάσει τῶν (2.2.3.α),

$$\left.\begin{aligned} Q^{I} &= -K^{I}H^{I}(H^{I}+H^{II})_{,1} \\ Q^{II} &= -K^{II}H^{II}(\alpha H^{I}+H^{II})_{,1} \end{aligned}\right\} \qquad (2.2.3.\beta)$$

Προκύπτει οὕτω τὸ κάτωθι τελικὸν σύστημα διαφορικῶν ἐξισώσεων,

$$\left.\begin{aligned} H^{I}_{,t} &= \frac{K^{I}}{n^{I}}[H^{I}(H^{I}+H^{II})_{,1}]_{,1} \\ H^{II}_{,t} &= \frac{K^{II}}{n^{II}}[H^{II}(\alpha H^{I}+H^{II})_{,1}]_{,1} \end{aligned}\right\} \qquad (2.2.3.\gamma)$$

Τὸ ὡς ἄνω σύστημα (2.2.3.γ.) ἐπιλύεται διὰ τῆς ἀριθμητικῆς ἀναλύσεως *ὑπὸ συνήθεις ὁριακὰς συνθήκας κατακορύφων παρειῶν περιοδικοῦ νόμου μεταβολῆς τῆς στάθμης καὶ ἀρχικὴν συνθήκην ἠρεμίας*. Διὰ τὸν ἔλεγχον τῆς λύσεως ἐγένοντο πάλιν πειράματα τῆς ἀναλογικῆς συσκευῆς τύπου Hele-Shaw. Πρὸς ἐποπτικὴν σύγκρισιν θεωρητικῶν καὶ πειραματικῶν ἀποτελεσμάτων ἐσχεδιάσθησαν αἱ θεωρητικαὶ καὶ πειραματικαὶ καμπύλαι αἱ δίδουσαι τὰ σχετικὰ πλάτη ταλαντώσεως διὰ τὴν ἐλευθέραν ἐπιφάνειαν καὶ τὴν διεπιφάνειαν συναρτήσει τῶν τετμημένων. Αἱ μετρηθεῖσαι διαφοραὶ εἶναι τώρα κατὰ μέσον ὅρον τῆς τάξεως τοῦ 10 ἕως 15 %. Πλὴν ὅμως ἐπιτυγχάνεται διὰ τοῦ μαθηματικοῦ ὁμοιώματος μία πολὺ καλὴ πρώτη ἐκτίμησις τῆς τάξεως μεγέθους τῶν ζητουμένων μεγεθῶν.