ΕΠΙΛΥΣΙΣ ΤΗΣ ΜΟΝΟΦΑΣΙΚΗΣ ΜΗ ΜΟΝΙΜΟΥ ΡΟΗΣ ΔΙΑ ΠΟΡΩΔΟΥΣ ΜΕΣΟΥ ΔΙΑ ΤΗΣ ΜΕΘΟΔΟΥ ΤΩΝ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΩΝ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ

ΥΠΟ
ΧΡΗΣΤΟΥ ΤΖΙΜΟΠΟΥΛΟΥ * - ΓΕΩΡΓΙΟΥ Α. ΤΕΡΖΙΔΗ **

Τελευταίως διὰ τὴν ἐπίλυσιν τῆς μονοφασικῆς μὴ μονίμου ροῆς διὰ πορώδους μέσου χρησιμοποιεῖται εὐρέως ἡ μέθοδος τῶν πεπερασμένων στοιχείων. Αὕτη δι' ὡρισμένα πολύπλοκα συστήματα ἐμφανίζει μεγάλα πλεονεκτήματα ἐν σχέσει πρὸς τὴν μέθοδον τῶν πεπερασμένων διαφορῶν, τὰ ὁποῖα εἶναι τὰ κάτωθι :

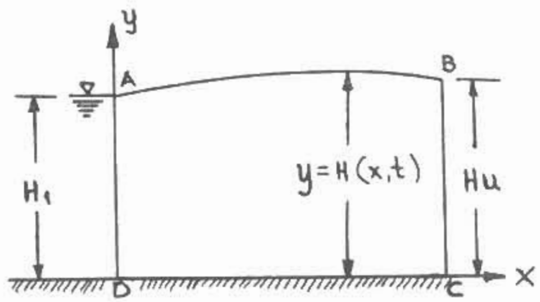
α) Αἱ ὁριακαὶ συνθῆκαι εἰσάγονται εὐκόλως ἐν ἀντιθέσει πρὸς τὴν μέθοδον τῶν πεπερασμένων διαφορῶν.

β) Ἡ παρουσία ἀνομοιογενοῦς καὶ ἀνισοτρόπου ἐδάφους οὐδόλως ἐπηρεάζει τοὺς ὑπολογισμούς.

γ) Τὸ μέγεθος τῆς πλευρᾶς τοῦ στοιχείου δύναται νὰ μεταβληθῆ, καὶ μικρὰ στοιχεῖα χρησιμοποιοῦνται εἰς τὰς περιοχὰς τῆς ταχείας μεταβολῆς τῆς ροῆς, ἐνῷ εἰς τὰς περιοχὰς τῆς βραδείας μεταβολῆς χρησιμοποιοῦνται μεγάλα στοιχεῖα.

1. ΓΕΝΙΚΑΙ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΤΗΣ ΔΙΔΙΑΣΤΑΤΟΥ ΡΟΗΣ ΜΕ ΕΛΕΥΘΕΡΑΝ ΕΠΙΦΑΝΕΙΑΝ

Θεωρήσωμεν τὸ πρόβλημα τοῦ ὑποβιβασμοῦ τῆς ὑπογείου στάθμης ἐντὸς κεκορεσμένου ἐδάφους διὰ διδιάστατον ροήν. Ὑπὸ τὰς παραδοχὰς α) ἑνὸς ὁμο-



Σχ. 1.

γενοῦς καὶ ἀσυμπιέστου ὑγροῦ καὶ β) ὅτι ἡ ροὴ ἀκολουθεῖ τὸν νόμον τοῦ Darcy, ἡ ἐξίσωσις ἡ ὁποία παρέχει τὸ δυναμικὸν Φ(x,y,t) εἰς ἕκαστον σημεῖον τοῦ πο-

* ΧΡΗΣΤΟΣ ΤΖΙΜΟΠΟΥΛΟΣ, Ὑφηγητὴς Πανεπιστημίου Θεσσαλονίκης.
** ΓΕΩΡΓΙΟΣ Α. ΤΕΡΖΙΔΗΣ, Καθηγητὴς Πανεπιστημίου Θεσσαλονίκης.

ρώδους μέσου δι' ἰσότροπον ἔδαφος δίδεται ὑπὸ τῆς γνωστῆς ἐξισώσεως τοῦ Laplace

$$\nabla^2\Phi = \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} = 0 \tag{1}$$

ἔνθα τὸ δυναμικὸν Φ δίδεται ὑπὸ τῆς σχέσεως

$$\Phi = -\left(\frac{P}{\gamma} + y\right) \tag{2}$$

ἡ δὲ ταχύτης $\vec{V}$ δίδεται ὑπὸ τῆς γνωστῆς σχέσεως τοῦ Darcy

$$\vec{V} = -K\nabla\Phi \cdot \tag{3}$$

Εἰς τὰς ὡς ἄνω σχέσεις K εἶναι ὁ συντελεστὴς ὑδραυλικῆς ἀγωγιμότητος, p εἶναι ἡ πίεσις, γ τὸ εἰδικὸν βάρος. (Ἡ παραδοχὴ τοῦ ὁμογενοῦς καὶ ἰσοτρόπου ἐδάφους ἐγένετο χάριν ἁπλότητος καὶ δὲν ἀποτελεῖ περιορισμὸν διὰ τὴν μέθοδον).

Ἡ ἐξίσωσις τῆς ἐλευθέρας ἐπιφανείας εἶναι

$$G(x, y, t) = H(x, t) - y = 0$$

ἢ ὑπὸ μορφὴν διαφορικῆς ἐξισώσεως

$$\frac{\partial H}{\partial t} = \frac{K}{n}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \cdot \frac{\partial H}{\partial x} - \frac{\partial \Phi}{\partial y}\right) \tag{4}$$

ἔένθα n εἶναι τὸ ἀποτελεσματικὸν πορῶδες.

Ὡς ὁριακαὶ συνθῆκαι κατὰ τὸν χρόνον $t = t_0$ λαμβάνονται αἱ κάτωθι :

(1) $\Phi(x, H, t_0) = H(x, t_0)$ ἐπὶ τῆς AB

(2) $\Phi(x, y, t_0) = H_u$ ἐπὶ τῆς BC

(3) $\frac{\partial \Phi}{\partial y}(x, 0, t_0) = 0$ ἐπὶ τῆς DC

(4) $\Phi(x, y, t_0) = H_1$ ἐπὶ τῆς AD

2. ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΩΝ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΩΝ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ

Ἡ μέθοδος τῶν πεπερασμένων στοιχείων διὰ τὴν ἐπίλυσιν τοῦ ὡς ἄνω προβλήματος στηρίζεται εἰς τὸν λογισμὸν μεταβολῶν (variatonal calculus) ὁ ὁποῖος ἐπιζητεῖ τὴν ἐλαχιστοποίησιν τῆς συναρτησιακῆς

$$I[\Phi] = \iint_{ABCD} \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right)^2\right] dxdy. \tag{5}$$

Οὕτω ἐφαρμόζοντες τὰς ἐξισώσεις τοῦ Euler διὰ τὴν συναρτησιακὴν τῆς σχέσεως (4) καταλήγομεν εἰς τὴν σχέσιν (1).

Ἡ μέθοδος τῶν πεπερασμένων στοιχείων ἀποτελεῖ εἰς τὴν οὐσίαν μίαν ἐπέκτασιν τῆς μεθόδου τῶν Rayleigh - Ritz. Προσεγγίζομεν τὴν συνάρτησιν Φ μὲ ἕναν γραμμικὸν συνδυασμὸν W ἄλλων συναρτήσεων u_i.

$$W = \sum_i a_i u_i$$

οὕτως ὥστε ἡ νόρμα

$$\| \Phi - W \| < \varepsilon \qquad (6)$$

ἔνθα ε εἷς μικρὸς ἀριθμός.

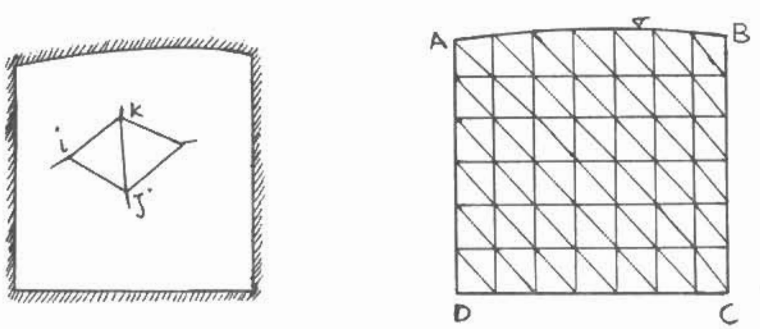
Ἐν συνεχείᾳ τὸ ἐλάχιστον τῆς $I[\Phi] = I[W]$ εὑρίσκεται διὰ παραγωγίσεως ὡς πρὸς τὰς παραμέτρους a_i

$$\frac{\partial I}{\partial a_i} = 0 \qquad (7)$$

3. ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΤΗΣ ΜΕΘΟΔΟΥ ΔΙΑ ΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΤΟΥ LAPLACE

Καλύπτομεν τὸν χῶρον ὁλοκληρώσεως διὰ τριγώνων i, j, k. Ἡ προσεγγιστικὴ συνάρτησις διὰ τὴν ἀνωτέρω περίπτωσιν εἶναι :

$$\Phi = Ax + By + C$$



Σχ. 2.

ἥτις ἀναφερομένη εἰς τοὺς κόμβους δίδει τὰς κάτωθι σχέσεις :

$$\begin{aligned} \Phi_i &= Ax_i + By_i + C \\ \Phi_j &= Ax_j + By_j + C \\ \Phi_k &= Ax_k + By_k + C \end{aligned} \qquad (8)$$

ἐκ τῶν ὁποίων λαμβάνομεν τελικῶς

$$\Phi = N_i \Phi_i + N_j \Phi_j + N_k \Phi_k \qquad (9)$$

ἔνθα τὰ N_i, N_j, N_k εἶναι συναρτήσεις τῶν (x_i, x_j, x_k, y_i, y_j, y_k) ὡς καὶ τῶν (x, y). Τὰς σχέσεις αὐτὰς ἀντικαθιστῶμεν εἰς τὴν (4) καὶ λαμβάνομεν τὰς παραγώγους ὡς πρὸς τὰς παραμέτρους Φ_i

$$\frac{\partial I}{\partial \Phi_i} = 0 \qquad (10)$$

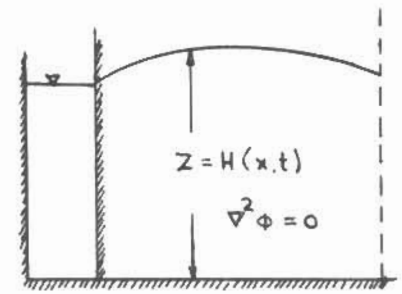
Τελικῶς προκύπτει ἓν σύστημα γραμμικῶν ἐξισώσεων ὡς πρὸς τὰς Φ_i, τοῦ ὁποίου ἡ ἐπίλυσις ἐπιτυγχάνεται διὰ γνωστῶν ἀριθμητικῶν μεθόδων.

4. ΛΥΣΙΣ ΤΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ

Διὰ τὴν περίπτωσιν τοῦ γενικοῦ προβλήματος, ἔνθα ἡ ἐλευθέρα ἐπιφάνεια εἶναι συνάρτησις τοῦ χρόνου t, δηλαδὴ δίδεται ὑπὸ τῆς διαφορικῆς ἐξισώσεως

$$\frac{\partial H}{\partial t} = \frac{K}{n} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \cdot \frac{\partial H}{\partial y} - \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right). \qquad (11)$$

Θεωροῦμεν εἰς τὴν ἀρχὴν τῶν ὑπολογισμῶν ὡς γνωστὴν τὴν ἐλευθέραν ἐπιφάνειαν καὶ εὑρίσκομεν διὰ τῆς μεθόδου τῶν πεπερασμένων στοιχείων τὰς



Σχ. 3.

ἀγνώστους Φ καὶ H. Ἐν συνεχείᾳ ἐκ τῆς σχέσεως (11) εὑρίσκομεν τὰς τεταγμένας τῆς ἐλευθέρας ἐπιφανείας κατὰ τὴν ἑπομένην χρονικὴν στιγμὴν t + Δt.

$$H(t + \Delta t) = H(t) + \Delta t \cdot \frac{k}{n} \cdot \Phi(x, y) \qquad (12)$$

ἔνθα

$$\Phi(x, y) = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \cdot \frac{\partial H}{\partial x} - \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right) \Bigg|_t$$

Οὕτω κατὰ τὴν χρονικὴν στιγμὴν t + Δt εὑρίσκομεν νέαν ἐλαυθέραν ἐπιφάνειαν δηλαδὴ νέας ὁριακὰς συνθήκας καὶ ἐπιλύομεν τὴν ἐξίσωσιν τοῦ Laplace διὰ τὴν μέθοδον τῶν πεπερασμένων στοιχείων διὰ τὰς νέας ὁριακὰς ταύτας συνθήκας κ.ο.κ.