ΕΦΑΡΜΟΓΑΙ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΤΙΝΩΝ ΜΟΝΤΕΛΩΝ ΕΙΣ ΤΗΝ ΥΔΡΟΛΟΓΙΑΝ

ΥΠΟ

Ι. ΛΕΟΝΤΑΡΙΤΟΥ *

ΠΡΟΛΕΓΟΜΕΝΑ ΚΑΙ ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Εἰς τὴν παροῦσαν ἐργασίαν, ὁ συγγραφεύς, προσεπάθησεν νὰ δώσῃ ὡρισμένας βασικὰς ἀρχὰς περὶ τῆς ἐφαρμογῆς τῶν μαθηματικῶν μοντέλων εἰς τὴν ὑδρολογίαν.

Ὁπωσδήποτε τὸ ὑπόβαθρον εἶναι αἱ σχετικαὶ θεωρίαι αἱ ἀναπτυχθεῖσαι κατὰ καιρούς, τὸ δὲ βασικὸν ὑλικὸν ἠντλήθη ἐκ σχετικῶν ἐργασιῶν τοῦ ὑποφαινομένου κατὰ τὴν διάρκειαν τῆς μετεκπαιδεύσεώς του εἰς Ὁλλανδίαν ὡς καὶ στοιχείων δοθέντων ὑπὸ τοῦ Μηχανικοῦ κ. H. J. COLENBRANDER.

Ὡς βασικὴν βιβλιογραφίαν δύναμαι νὰ ἀναφέρω τὰ κάτωθι συγγράμματα:

1. A. VOLKER «Hydrology»
2. I. A. E. A. «Neutron Moisture Gauges»
3. D. M. GRAY «Principles of Hydrology»
4. L. HUISMAN «Ground Water Recovery»
5. L. VERRUIJT «Ground Water Flow»
6. L. HORST «Hydrometry».
7. V. YEVYEVICH «Probability and Statistics in Hydrology»
8. T. N. O. «Recent Trends in Hydrograph Synthesis»
9. U. S. D. I. «Unitgraph Procedures»
10. J. C. I. DODGE «Parametric Hydrology»
11. J. NEMEC «Engineering Hydrology.»

Ι. ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Οἱ στόχοι εἰς τοὺς ὁποίους ἀποβλέπουν αἱ μελέται συχνότητος εἰς τὴν ὑδρολογίαν διαφέρουν εὐρέως μεταξύ των. Ὑπάρχει π.χ. μία σχέσις διὰ τὴν πρόβλεψιν τοῦ μεγέθους βροχοπτώσεως, διὰ νὰ λάβωμεν τὴν ἐκ ταύτης πλημμύ-

* Ι. ΛΕΟΝΤΑΡΙΤΗΣ, Τοπ. Μηχ/κὸς Ὑπ. Δημοσίων Ἔργων.

Ψηφιακή Βιβλιοθήκη "Θεόφραστος" - Τμήμα Γεωλογίας. Α.Π.Θ.

ραν. Ἐπίσης δυνατὸν νὰ μᾶς ἐνδιαφέρουν τὰ ἀκραῖα μηνιαῖα καὶ ἐτήσια σύνολα διὰ νὰ προβλέψωμεν τὴν διάρκειαν τῶν ξηρασιῶν. Ὑπάρχουν διάφοροι μέθοδοι, διὰ τῶν ὁποίων δυνάμεθα νὰ ἔχωμεν μίαν ἀποδεκτὴν ἀκρίβειαν προβλέψεων. Ἡ εὕρεσις τῆς πλέον καταλλήλου μεθόδου συνδέεται μὲ τὸν σκοπὸν τῆς μελέτης. Εἰς τὴν περίπτωσιν ἀναλύσεως συχνοτήτων παρουσιάζονται ἀρκετὰ προβλήματα, ὡς :

— τὸ μῆκος τῶν διαθεσίμων καταγραφῶν εἶναι σχετικῶς μικρὸν
— αἱ καταγραφαὶ συνιστοῦν μίαν σειρὰν ἐξηρτημένων μεταβλητῶν (ἰδιαιτέρως ἀληθὲς διὰ στοιχεῖα ροῆς)
— ἡ κλιματικὴ ἀνομοιογένεια
— ἡ ὁμοιογένεια τῶν καταγραφῶν εἶναι ἀβεβαία ὅσον ἀφορᾶ εἰς τὰς ὑδρολογικὰς συνθήκας μιᾶς λεκάνης, τὴν ἔκθεσιν ἑνὸς βροχομετρικοῦ σταθμοῦ ἢ τὴν μορφὴν τοῦ ἐξοπλισμοῦ μετρήσεων κλπ.
— ἡ ἀσυνέχεια τῶν καταγραφῶν.

Λαμβάνοντες ἐτησίας πλημμύρας εἴμεθα βέβαιοι δι' ἀνεξαρτησίαν μεταξύ των. Ἐπίσης, ἂν καὶ μὲ ὀλιγωτέραν βεβαιότητα, δυνάμεθα νὰ ἐργασθῶμεν καὶ μὲ μηνιαίας πλημμύρας. Μία ἄλλη μέθοδος ὑπολογισμοῦ εἶναι νὰ ἀναλύσωμεν μίαν μερικὴν σειρὰν δηλ. ἐξετάζοντες ὰς πλημμύρας ἢ ποσότητας βροχοπτώσεων ὑπερβαινούσας ἕν δοθὲν μέγεθος. Ἐπίσης ἡ μερικὴ σειρὰ δὲν συνίσταται πάντοτε ὑπὸ ἀνεξαρτήτων δεδομένων. Μία τρίτη δυνατότης εἶναι ἡ ἀνάλυσις πλήρους σειρᾶς. Εἰς αὐτὴν τὴν περίπτωσιν λαμβάνονται ὅλαι αἱ ἡμερήσιαι καταγραφαὶ καὶ ὡς ἐπὶ τὸ πλεῖστον ὑπάρχει ὑψηλὴ αὐτοσυσχέτισις. Ἡ ανάλυσις δηλ. μιᾶς πλήρους σειρᾶς παρέχει πληροφορίας ἐπὶ τοῦ ποσοστοῦ τοῦ χρόνου κατὰ τὴν διάρκειαν τοῦ ὁποίου ἡ παροχὴ ὑπερβαίνει μίαν δοθεῖσαν τιμήν.

Παράδειγμα 1. Δίδεται ἡ σειρὰ τῶν τιμῶν ἀκραίων βροχοπτώσεων τῶν ἐτῶν 1880 - 1970. Νὰ προσαρμοσθοῦν αὐταὶ εἰς κατανομὴν συχνοτήτων.

Ἡ κατανομὴ Gumbel δύναται νὰ ἐκφράσῃ καλῶς τὰ ἀκρότατα μιᾶς σειρᾶς. Πρὸς τοῦτο καταγράφονται αἱ τιμαὶ ἐκ τῆς μικροτέρας πρὸς τὴν μεγαλυτέραν καὶ εὑρίσκομεν τὰς θέσεις τοποθετήσεως διὰ τοῦ τύπου $\Phi = m/N+1$.

Ἡ ἐξίσωσις ἡ δίδουσα τὰς τιμὰς τοῦ X εἶναι :

$$X = u + Y/\alpha$$

ἔνθα $$1/\alpha = Sx/\sigma_N$$

καὶ $$u = \overline{X}_N - \overline{Y}_N/\alpha$$

Αἱ τιμαὶ τῶν $\overline{Y}_N$ καὶ σ_N δίδονται ὑπὸ πινάκων. Εἰς τὴν προκειμένην περίπτωσιν διὰ $N = 90$ λαμβάνομεν $\overline{Y}_N = 0{,}5586$ καὶ $\sigma_N = 1.2007$.

Εὑρίσκομεν $\overline{X}_N = 245{,}61$

$$Sx = 78{,}28$$

$$\frac{1}{\alpha} = \frac{Sx}{\sigma_N} = \frac{78{,}28}{1{,}2007} = 65.1930$$

$$u = \overline{X}_N - \overline{Y}_N/\alpha = 245{,}61 - 36{,}42 = 209{,}19$$

Παράγων ἐλέγχου $\dfrac{1}{\alpha\sqrt{N}} = 6.8719$

Προτελευταία τιμὴ $\Delta_{N-1} = 457$

Μεγίστη τιμὴ $\Delta_N = 500$

Ἐξίσωσις $X = 209{,}19 + 65{,}19\,Y$

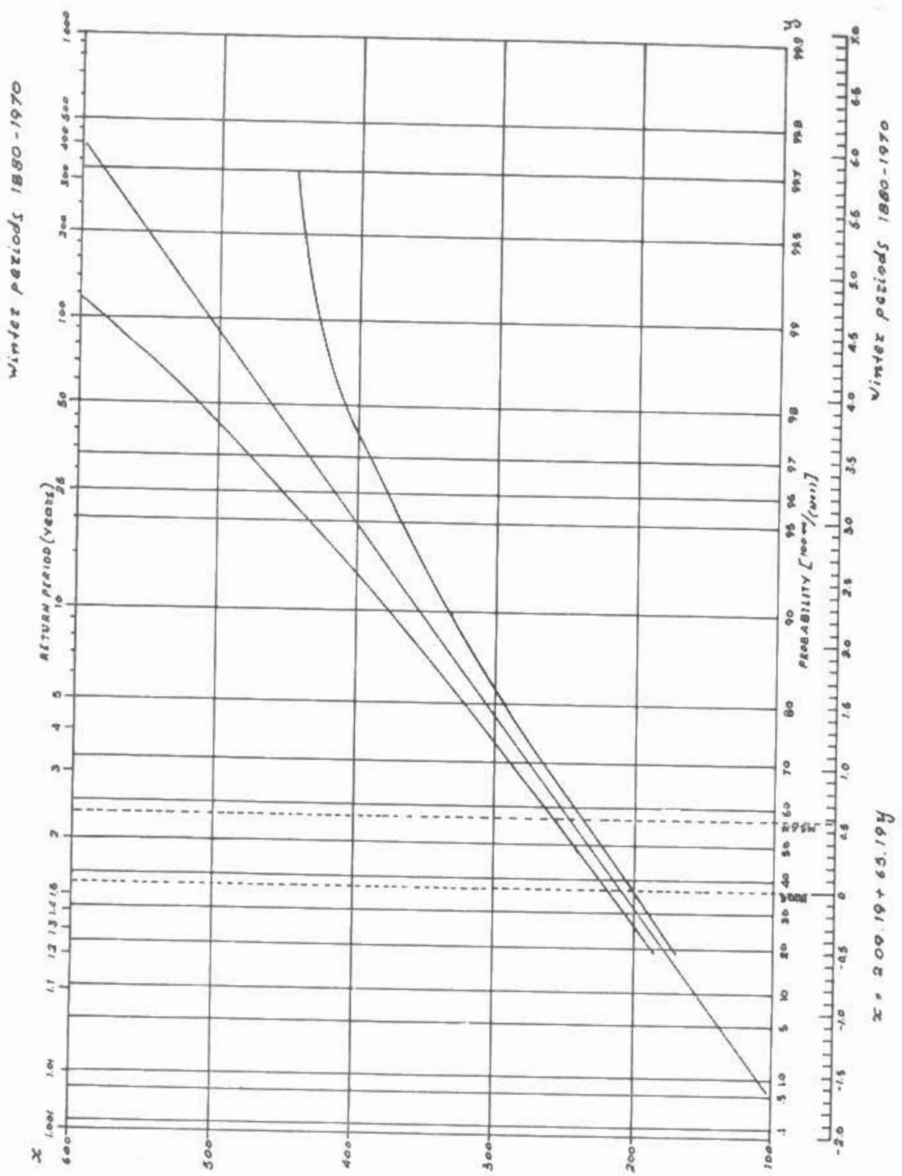
Y	$\sigma(Ym)\sqrt{N}\cdot 1/(\alpha\sqrt{N}) = A$	X	X+A	X—A
—0,5	8,54	176,60	185,14	168,06
0	9,01	209,19	218,20	200,18
0,5	10,35	241,79	252,13	231,43
1.0	12,40	274,38	286,78	261,98
1,5	15,40	306,97	322,37	291,57
2,0	19,33	339,57	358,90	320,24

Δ_N	$1{,}1407/\alpha = B$	$\Delta_N + B$	$\Delta_N - B$	Δ_{N-1}	$0{,}7594/\alpha = C$	$\Delta_{N-1} + C$	$\Delta_{N-1} - C$
500	74,2	574,2	425,8	457	49,5	506,5	407,5

Ἡ προκύπτουσα καμπύλη μετὰ τῶν διαστημάτων ἐμπιστοσύνης ἐμφαίνεται εἰς τὸ σχ. 1.

Εἰς τὸ σχ. 2 δίδεται ἡ προκύπτουσα εὐθεῖα μετὰ τῶν διαστημάτων ἐμπιστοσύνης διὰ N = 24 ἔτη ἀπὸ 1947 - 1970 ἐκ τῆς ἀνωτέρω σειρᾶς. Εἶναι προφανὴς ἡ διαφορὰ εἰς τὴν ἀξιοπιστίαν τὴν ὁποίαν δυνάμεθα νὰ ἔχωμεν ἐξ ἑκάστης κατανομῆς.

Ψηφιακή Βιβλιοθήκη "Θεόφραστος" - Τμήμα Γεωλογίας. Α.Π.Θ.



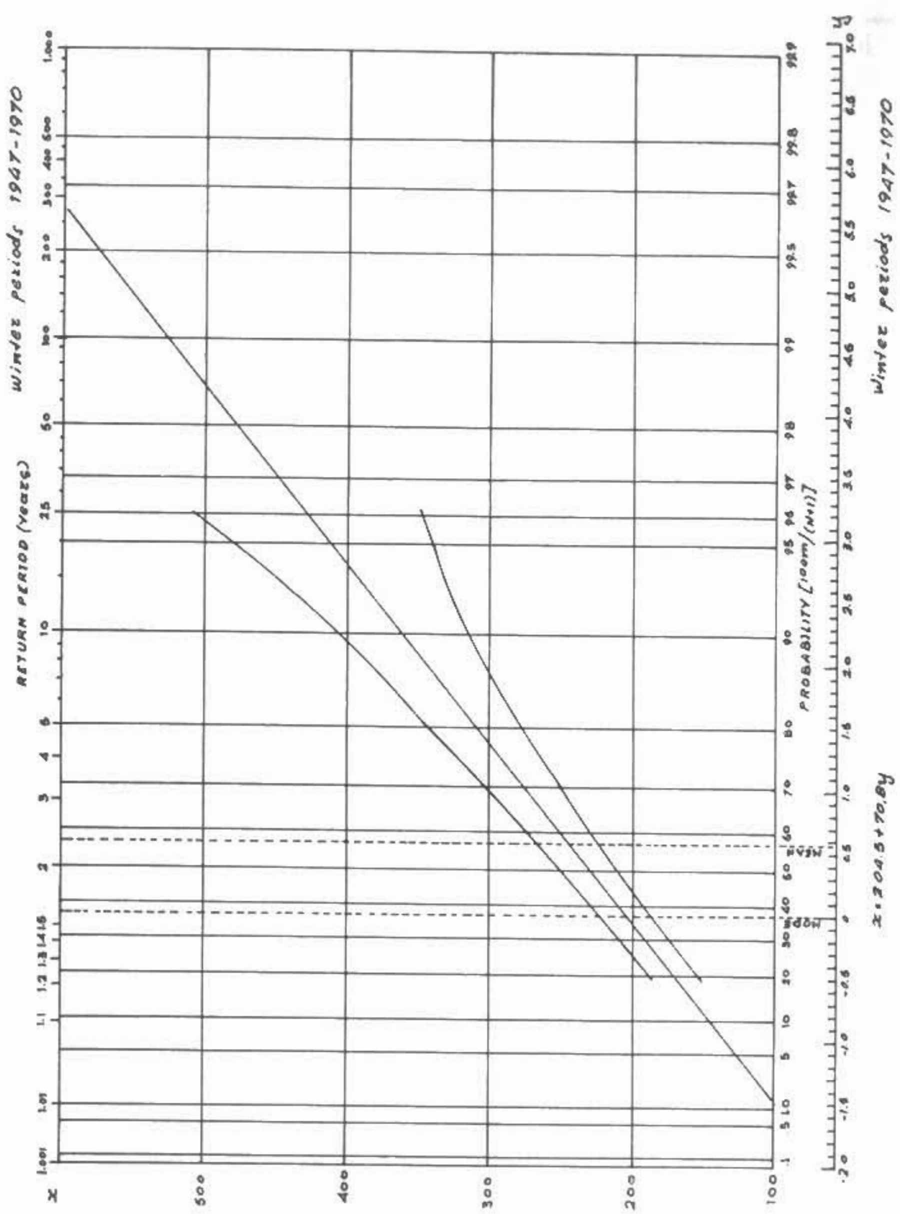
Σχ. 1.

ΠΙΝΑΞ 1

Χειμεριναὶ περίοδοι 1880 - 1970

Βροχή (0.1 χλσ.)	Φ = m/N+1	Βροχή (0.1 χλσ.)	Φ = m/N+1	Βροχή (0.1 χλσ.)	Φ = m/N+1
125	0.011	197	0.341	268	0.670
126	0.022	204	0.352	270	0.681
147	0.033	209	0.363	274	0.692
151	0.044	210	0.374	283	0.703
154	0.055	212	0.385	285	0.714
158	0.066	216	0.396	290	0.725
159	0.077	217	0.407	290	0.736
160	0.088	220	0.418	290	0.747
161	0.099	220	0.429	296	0.758
163	0.110	220	0.440	296	0.769
163	0.121	221	0.451	305	0.780
170	0.132	223	0.462	305	0.791
170	0.143	223	0.473	310	0.802
176	0.154	230	0.484	315	0.813
177	0.165	230	0.495	315	0.824
177	0.176	233	0.505	318	0.835
178	0.187	235	0.516	318	0.846
179	0.198	236	0.527	324	0.857
179	0.209	237	0.538	328	0.868
180	0.220	239	0.549	330	0.879
180	0.231	242	0.560	334	0.890
180	0.242	243	0.571	335	0.901
182	0.253	245	0.582	346	0.912
182	0.264	252	0.593	359	0.923
183	0.275	255	0.604	372	0.934
190	0.286	258	0.615	373	0.945
190	0.297	264	0.626	378	0.956
190	0.308	265	0.637	440	0.967
196	0.319	267	0.648	469	0.978
197	0.330	268	0.659	575	0.989

Ψηφιακή Βιβλιοθήκη "Θεόφραστος" - Τμήμα Γεωλογίας. Α.Π.Θ.



Σχ. 2.

ΠΙΝΑΞ 2

Χειμεριναὶ περίοδοι 1947 - 1970

Βροχὴ (0.1 χλσ.)	$\Phi = m/N+1$	Βροχὴ (0.1 χλσ.)	$\Phi = m/N+1$
125	0.04	292	0.52
158	0.08	252	0.56
161	0 12	258	0.60
163	0.16	264	0.64
163	0.20	268	0.68
179	0.24	268	0.72
196	0.28	270	0.76
197	0.32	283	0.80
212	0.36	290	0.84
216	0.40	346	0.88
223	0.44	372	0.92
233	0.48	469	0.96

2. ΜΟΝΤΕΛΑ ΒΡΟΧΟΠΤΩΣΕΩΣ - ΑΠΟΡΡΟΗΣ

2. 1. **Γραμμικοὶ ταμιευτῆρες.**

Ἐξίσωσις ροῆς :
$$Q = \frac{I}{k} \cdot S \qquad (1)$$

ἢ
$$S = k \cdot Q \qquad (1\alpha)$$

Ἐξίσωσις συνεχείας :
$$P = Q + \frac{dS}{dt} \qquad (2)$$

ἢ
$$P = Q + K\frac{dQ}{dt} \qquad (2\alpha)$$

Q = παροχὴ
S = ἀποθήκευσις
k = συντελεστὴς ταμιευτῆρος
P = βροχόπτωσις
t = χρόνος

Ψηφιακή Βιβλιοθήκη "Θεόφραστος" - Τμήμα Γεωλογίας. Α.Π.Θ.

Υ δ ρ ο γ ρ ά φ η μ α εἶναι ἓν διάγραμμα τῆς παροχῆς (ἢ τῆς στάθμης ὕδατος) ὡς πρὸς τὸν χρόνον.

Μ ο ν α δ ι α ῖ ο ν ὑ δ ρ ο γ ρ ά φ η μ α εἶναι ἓν ὑδρογράφημα προκαλούμενον ὑπὸ μοναδιαίας βροχῆς. Ὁ ὄγκος κάτωθι τοῦ διαγράμματος εἶναι μονάς.

Σ τ ι γ μ ι α ῖ ο ν μ ο ν α δ ι α ῖ ο ν ὑ δ ρ ο γ ρ ά φ η μ α (Σ. Μ. Υ.) εἶναι ἓν ὑδρογράφημα τὸ ὁποῖον προκύπτει ἐκ στιγμιαίας μοναδιαίας βροχῆς. Ὁ ὄγκος κάτωθι τοῦ διαγράμματος εἶναι μονάς. Τὸ Σ. Μ. Υ. δὲν εἶναι φυσικὸν φαινόμενον ἀλλὰ μαθηματικὸς ὅρος καὶ εἶναι χρήσιμον διὰ τὸν ὑπολογισμὸν τῆς παροχῆς ἐκ βροχοπτώσεως.

Τ ὸ Σ. Μ. Υ. ἑ ν ὸ ς γ ρ α μ μ ι κ ο ῦ τ α μ ι ε υ τ ῆ ρ ο ς :

$$Q_t + k\frac{dQ_t}{dt} = 0 \qquad (3)$$

διὰ $t = 0 \quad P = S = 1$

διὰ $t > 1 \quad P = 0$

$$\frac{dQ_t}{Q_t} = -\frac{dt}{k} \qquad (4)$$

καὶ $\ln Q_t = -t/k + C \qquad (5)$

ἐπιλύοντες τὴν (5) ὑπὸ τὴν συνθήκην διὰ $t = 0, \ S = 1, \ Q_0 = 1/k$

$$U_t = Q_t = 1/k \cdot e^{-t/k} \qquad (6)$$

Αὐτὴ εἶναι ἡ ἔκφρασις διὰ τὸ Σ.Μ.Υ. γραμμικοῦ ταμιευτῆρος.

Εἰς ἓν γραμμικὸν σύστημα ἐφαρμόζεται ἡ ἀρχὴ τῆς ἐπαλληλίας δηλ. :

εἰσαγωγὴ (1) → ἐξαγωγὴ (1)
εἰσαγωγὴ (2) → ἐξαγωγὴ (2)

εἰσαγωγὴ (1) + εἰσαγωγὴ (2) → ἐξαγωγὴ (1) + ἐξαγωγὴ (2)
ἢ σταθ. X εἰσαγωγὴ (1) → σταθ. X ἐξαγωγὴ (1)

Αὐτὸ σημαίνει, ὅταν τὸ ΣΜΥ ἑνὸς συστήματος εἶναι γνωστόν, ἡ ἐξαγωγὴ δύναται νὰ ὑπολογισθῇ ἐκ τῆς εἰσαγωγῆς καὶ τοῦ ΣΜΥ.

Ὁ λ ο κ λ ή ρ ω μ α σ υ ν ε λ ί ξ ε ω ς.

Ἡ εἰσαγωγὴ (P), τὸ ΣΜΥ καὶ ἡ ἐξαγωγὴ (α) συνδέονται διὰ τοῦ καλουμένου ὁλοκληρώματος συνελίξεως.

$$Q(t) = \int_0^t P(\tau) \cdot u(t-\tau)\, d\tau \qquad (7)$$

Συνήθως ἡ εἰσαγωγὴ P δίδεται εἰς διαστήματα ἴσου μήκους (π.χ. mm/ἡμ). Διαρκοῦντος ἑνὸς διαστήματος ἡ τιμὴ τοῦ P εἶναι ἡ ἰδία. Ὑποθέτομεν ὅτι τὸ διάστημα εἶναι μοναδιαίου μήκους :

$$Q(1) = P(1)\int_0^1 u(t-\tau)\, d\tau \qquad (8)$$

Ἐπιλύοντες διὰ τοῦ ΣΜΥ ἑνὸς γραμμικοῦ ταμιευτῆρος

$$Q(1) = P(1)\,(1 - e^{-1/k}) \qquad (9)$$

Αὐτὴ εἶναι ἡ ἀπορροὴ εἰς τὸ πέρας τοῦ πρώτου διαστήματος.

Ἡ ἀπορροὴ εἰς τὸ πέρας τοῦ δευτέρου διαστήματος θὰ εἶναι :

$$Q(2) = P(2)\,(1 - e^{-1/k}) \qquad (9\alpha)$$

Γενικῶς $\quad Q(t) = P(t)\,(1 - e^{-1/k}) \qquad (9\beta)$

Ὕ φ ε σ ι ς ο ὐ ρ ᾶ ς.

Συμφώνως πρὸς τὴν (6) :

$$Q_t = Q_0 \cdot e^{-t/k} \qquad (6\alpha)$$

(Σημ. διὰ $t = 0 : Q_0 = 1/k$).

Ὅταν τὸ Q δίδεται ὑπὸ μορφὴν διαστημάτων μοναδιαίου μήκους ἔχομεν:

$$Q_1 = Q_0 \cdot e^{-1/k} \qquad (6\beta)$$

$$Q_2 = Q_0 \cdot e^{-2/k} \qquad (6\gamma)$$

$$= Q_1 \cdot e^{-1/k}$$

Γενικῶς : $\quad Q_t = Q_{t-1} \cdot e^{-1/k} \qquad (6\delta)$

ἢ $\quad \ln Q_t = -1/k \cdot t + \ln Q_0 \qquad (10)$

Αὐτὸ εἰς ἡμιλογαριθμικὸν χάρτην παριστᾷ εὐθεῖαν γραμμὴν μὲ κλίσιν $-1/k$. Κατ' αὐτὸν τὸν τρόπον δύναται νὰ προσδιορισθῇ τὸ k.

Σ υ ν έ λ ι ξ ι ς κ α ὶ ὕ φ ε σ ι ς ο ὐ ρ ᾶ ς.

Συνδυάζοντες τὰς (9β) καὶ (6δ) ἔχομεν :

$$Q_t = P_t\,(1 - e^{-1/k}) + Q_{t-1} \cdot e^{-1/k} \qquad (11)$$

ἢ $\quad Q_t = AQ_{t-1} + B \cdot P_t\,, \quad (A + B = 1)$

Αὐτὴ εἶναι ἡ γενικὴ ἔκφρασις διὰ τὸν ὑπολογισμὸν τῆς παροχῆς τῆς προκαλουμένης ὑπὸ οἱασδήποτε βροχοπτώσεως.

Ψηφιακή Βιβλιοθήκη "Θεόφραστος" - Τμήμα Γεωλογίας. Α.Π.Θ.

Καμπύλη S.

Ἡ καμπύλη S εἶναι τὸ διάγραμμα τῆς ἐξαγωγῆς τῆς προκαλουμένης ὑπὸ εἰσαγωγῆς μοναδιαίας ἐντάσεως καὶ ἀπείρου διαρκείας :

$$S_t = \int_0^t P(\tau) \cdot u(t - \tau)\, d\tau \tag{12}$$

καὶ διὰ $P(\tau) = 1$

$$S_t = \int_0^t u(t - \tau)\, d\tau \tag{13}$$

Ἡ καμπύλη S ἑνὸς γραμμικοῦ ταμιευτῆρος εἶναι :

$$S_t = 1 - e^{-t/k} \tag{14}$$

Διὰ σταθερὰν ἔντασιν $P(\tau) = 1/D$ ἔχομεν :

$$S_t = \frac{1}{D}(1 - e^{-t/k}) \tag{14α}$$

Μοναδιαῖον ὑδρογράφημα D ὡρῶν (M.Y.D).

Τὸ M.Y.D ὡρῶν εἶναι τὸ ὑδρογράφημα τὸ προκαλούμενον ὑπὸ εἰσαγωγῆς ἐντάσεως $1/D$ καὶ διαρκείας D (μοναδιαία εἰσαγωγή : $1/D \times D = 1$).

Εἰς τὴν πραγματικότηαα, αὐτὸ εἶναι ἡ διαφορὰ δύο καμπυλῶν S, τῆς μίας ἀρχομένης εἰς χρόνον $t = D$ καὶ τῆς ἑτέρας εἰς $t = 0$.

$$DU_t = \int_{t-D}^t U(t - \tau)\, d\tau \tag{15}$$

Τὸ M.Y.D. ἑνὸς γραμμικοῦ ταμιευτῆρος εἶναι :

$$0 \leqslant t \leqslant D : DU_t = \frac{1}{D}(1 - e^{-t/k}) \tag{16}$$

$$t > D : DU_t = \frac{1}{D} e^{-t/k}(e^{D/k} - 1) \tag{17}$$

Εὕρεσις τοῦ Σ.Μ.Υ. διὰ 2, 3, n γραμμικοὺς ταμιευτῆρας.

Διὰ δύο γραμμικοὺς ταμιευτῆρας ἔχομεν :

$$Q_t = \int_0^t P(\tau) \cdot u(t - \tau)\, d\tau$$

ἀλλὰ

$$P(\tau) = \frac{1}{k} e^{-\tau/k}$$

καὶ

$$u(t - \tau) = \frac{1}{k} e^{-(t-\tau) k} = t \cdot e^{-t/k} \cdot e^{\tau/k}.$$

Ψηφιακή Βιβλιοθήκη "Θεόφραστος" - Τμήμα Γεωλογίας. Α.Π.Θ.

Ἐξ αὐτῶν προκύπτει :

$$Q_t = \int_0^t \frac{1}{k} e^{-\tau/k} \cdot \frac{1}{k} e^{-t/k}\, d\tau = \frac{1}{k}\frac{1}{k} e^{-t/k} \cdot \tau \int_0^t = \frac{1}{k} \cdot \frac{t}{k} e^{-t/k}.$$

Διὰ τρεῖς γραμμικοὺς ταμιευτῆρας ἔχομεν :

$$P(\tau) = \frac{1}{k} \cdot \frac{\tau}{k} \cdot e^{-\tau/k}$$

$$u(t - \tau) = \frac{1}{k} \cdot e^{-(t-\tau)/k} = \frac{1}{k} \cdot e^{-t/k} \cdot e^{\tau/k}$$

καὶ

$$Q_t = \int_0^t \frac{1}{k} \cdot \frac{\tau}{k} \cdot e^{-\tau/k} \cdot \frac{1}{k} \cdot e^{-t/k} \cdot e^{\tau/k}\, d\tau = \frac{1}{k}\left(\frac{t}{k}\right)^2 \cdot \frac{1}{2} e^{-t/k}.$$

Διὰ n δὲ γραμμικοὺς ταμιευτῆρας ἔχομεν :

$$Q_t = \frac{1}{k}\left(\frac{t}{k}\right)^{n-1} \cdot \frac{1}{(n-1)!} e^{-t/k}.$$

Συνδυασμὸς ταμιευτήρων.

Γνωρίζοντες τὸ ΣΜΥ ἑνὸς ταμιευτῆρος, τὸ ΣΜΥ οἱουδήποτε συνδυασμοῦ ταμιευτήρων δύναται νὰ παραχθῇ :

α) Ταμιευτῆρες ἐν παραλλήλῳ.

Αἱ ἐξαγωγαὶ περισσοτέρων τοῦ ἑνὸς ταμιευτήρων δύνανται νὰ ἀθροισθοῦν εἰς ἓν μόνον ἐξαγόμενον. Φυσικά, δὲν εἶναι ἀναγκαῖον νὰ ἔχουν ὅλοι οἱ ταμιευτῆρες τὸν αὐτὸν συντελεστὴν k.

Ἐξετάζομεν τὴν γενικὴν περίπτωσιν n ταμιευτήρων μὲ διαφορετικοὺς συντελεστὰς k καὶ ἀνίσως κατανεμημένην μοναδιαίαν εἰσαγωγήν.

Εἰς ἕκαστον ταμιευτήραν ἀντιστοιχεῖ εἰσαγωγὴ α_i οὕτως ὥστε $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1$.

Ἡ ἐξίσωσις διὰ τὸν ταμιευτῆρα i θὰ εἶναι :

$$P_i = \alpha_i = Q_i + k_i \frac{dQ}{dt}.$$

Διὰ $t = 0 \quad P_i = \alpha_i$

» $t > 0 \quad P_i = 0$

ἄρα $Q_i + k_i \cdot dQ/dt = 0$

$dQ/dt = -\,dt/k_i \rightarrow \ln Q_i = -\,t/k_i + c$

Διὰ $t = 0 \quad s = \alpha_i \quad Q_0 = s/k_i = \alpha_i/k_i$

$\ln Q_0 = c \rightarrow \ln Q_i - \ln(\alpha_i/k_i) = -\,t/k_i$

καὶ $Q_i = e^{-t/k} \cdot \alpha_i/k_i$

Τοιουτοτρόπως διὰ n ταμιευτῆρας θὰ ἔχωμεν :

$$Q = \sum_{i=1}^{n} Q_i = \sum_{i=1}^{n} e^{-t/k_i \cdot \alpha_i/k_i}.$$

Ἐὰν ἔχωμεν $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = \frac{1}{n}$ καὶ $k_1 = k_2 = \ldots = k_n$

τότε $$Q = e^{-t/k} \cdot \frac{\alpha}{k} + \ldots + e^{-t/k} \cdot \frac{\alpha}{k} = \frac{1}{k} e^{-t/k}$$

Ἐὰν $\alpha_1 \neq \alpha_2 \neq \ldots \neq \alpha_n$ καὶ $k_1 = k_2 = \ldots = k_n$

τότε $$Q = e^{-t/k} \cdot \frac{\alpha_1}{k} + \ldots + e^{-t/k} \cdot \frac{\alpha_n}{k} = \frac{1}{k} e^{-t/k}$$

β) Ταμιευτῆρες ἐν σειρᾷ.

Τὸ ἐξαγόμενον τοῦ πρώτου ταμιευτῆρος εἶναι ἡ εἰσαγωγὴ τοῦ δευτέρου. Τὸ ἐξαγόμενον τοῦ δευτέρου δύναται νὰ ὑπολογισθῇ διὰ συνελίξεως τοῦ ἐξαγομένου τοῦ πρώτου μὲ τὸ ΣΜΥ τοῦ δευτέρου ταμιευτῆρος. Τὸ ἐξαγόμενον τοῦ δευτέρου εἶναι εἰσαγωγὴ εἰς τὸν τρίτον κ.ο.κ. Φυσικὰ δύνανται νὰ ἐφαρμοσθοῦν διαφορετικαὶ τιμαὶ τοῦ k.

Ἓν λίαν σύνθετον μοντέλον εἶναι ὁ συνδυασμὸς ταμιευτήρων ἐν σειρᾷ καὶ ἐν παραλλήλῳ. Πρέπει πάντως νὰ καταστῇ φανερὸν ὅτι γνωρίζοντες τὸ ΣΜΥ ἑνὸς ἁπλοῦ ταμιευτῆρος δυνάμεθα νὰ προσδιορίσωμεν τὸ ΣΜΥ οἱουδήποτε συνδυασμοῦ ταμιευτήρων.

2. 2. Τὸ Μοντέλον NASH.

Ὁ NASH ἐθεώρησεν ὅτι εἰς καταρράκτης ἐξ n ἀποθηκεύσεων (γραμμικῶν ταμιευτήρων) ἀντιπροσωπεύει ἐπαρκῶς τὸν μηχανισμὸν μίας λεκάνης. Παρήγαγεν δὲ τὸ ΣΜΥ αὐτοῦ τοῦ μοντέλου :

$$u(D, t) = \frac{1}{k} \cdot \left(\frac{t}{k}\right)^{n-1} \cdot \frac{1}{(n-1)!} e^{-t/k}. \tag{18}$$

Διὰ νὰ εἶναι δυνατὸν ὥστε τὸ n νὰ λαμβάνῃ καὶ μὴ ἀκεραίας τιμάς, ἀντικατέστησεν τὸ παραγοντικὸν διὰ μίας συναρτήσεως Γάμμα.

$$\Gamma(n) = (n-1)! \tag{19}$$

Τοιουτρόπως τὸ ΣΜΥ δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς μία κατανομὴ συχνοτήτων. Ἡ ἀναμενομένη τιμὴ $E(\mathbf{t})$ εἶναι ἡ ἐν τῷ χρόνῳ ἀπόστασις μεταξὺ τοῦ κέντρου τῆς ἐπιφανείας τοῦ διαγράμματος ἀπορροῆς καὶ τῆς ἀρχῆς. Αὐτὴ εἶναι ἐπίσης ἡ πρώτη ροπὴ τοῦ Μ. Υ. :

$$M_1' = E(\mathbf{t}) = nk \tag{20}$$

Ψηφιακή Βιβλιοθήκη "Θεόφραστος" - Τμήμα Γεωλογίας. Α.Π.Θ.

Ἡ διαφορὰ περὶ τὴν μέσην τιμὴν $E(\mathbf{t})$ δύναται νὰ ἐφαρμοσθῇ διὰ τῆς δευτέρας ροπῆς τοῦ ΜΥ περὶ τὸ αὐτὸ κέντρον ἐπιφανείας.

$$M_2 = \mathrm{Var}(\mathbf{t}) = E(\mathbf{t}^2) - [E(\mathbf{t})]^2 = k^2 \cdot n \tag{21}$$

Ἐξ αὐτῶν εἶναι δυνατὸν νὰ ὑπολογισθοῦν τὰ k καὶ n :

$$k = \mathrm{Var}(\mathbf{t}) / E(\mathbf{t}) \tag{22}$$

$$n = E(\mathbf{t}) / k \tag{23}$$

Ὁ NASH δεικνύει ὅτι αἱ πρῶται ροπαὶ (περὶ τὴν ἀρχὴν) δι᾽ εἰσαγωγὴν (P), Μ. Υ. (u) καὶ ἐξαγωγὴν (Q) συνδέονται διά :

$$M_1'(u) = M_1'(Q) - M_1'(P) \tag{24}$$

καὶ αἱ δεύτεραι ροπαὶ (περὶ τὰ κέντρα ἐπιφανείας) συνδέονται διὰ

$$M_2(u) = M_2(Q) - M_2(P) \tag{25}$$

Τοιουτοτρόπως ὅταν δίδονται τὰ P καὶ Q τὸ $M_1'(u)$ καὶ τὸ $M_2(u)$ — ὡς ἐπίσης καὶ τὰ n καὶ k — δύνανται νὰ ὑπολογισθοῦν :

$$n = \frac{[M_1'(Q) - M_1'(P)]^2}{M_2(Q) - M_2(P)} \tag{26}$$

$$k = \frac{M_2(Q) - M_2(P)}{M_1'(Q) - M_1'(P)} \tag{27}$$

Ἐκ τῶν ΣΜΥ καὶ τοῦ MYD δυνάμεθα νὰ λάβωμεν :

$$u(D, t) = \frac{1}{D} \cdot \frac{1}{\Gamma(n)} \cdot \int_0^{t/k} e^{-t/k} (t/k)^{n-1} \, dt/k - \int_0^{\frac{t-D}{k}} e^{-t/k} (t/k)^{n-1} \, dt/k =$$

$$= \frac{1}{D} \left[I(n, t/k) - I\left(n, \frac{t-D}{k}\right) \right] \tag{28}$$

$I(n, t/k)$ εἶναι μία ἀτελὴς συνάρτησις Γάμμα, τάξεως n εἰς τὴν t/k. Αὗται αἱ συναρτήσεις ἔχουν πινακοποιηθῆ ὑπὸ τοῦ PEARSON.

Οὗτος ὁρίζει μίαν ἀτελῆ συνάρτησιν Γάμμα ὡς :

$$I(u, P) = \frac{1}{\Gamma(P+1)} \int_0^{u\sqrt{P+1}} e^{-t} t^P \, dt \tag{29}$$

Εἰς τὴν προκειμένην περίπτωσιν :

$$n = P + 1 \qquad (30)$$

$$t/k = u\sqrt{P+1} = u\sqrt{n} \qquad (31)$$

Ὑπολογισμὸς τῶν τιμῶν n καὶ k διὰ τὸ μοντέλον Nash μὲ τὰ δεδομένα:

$$P_1 = 1 \qquad Q_1 = 0{,}5$$
$$P_2 = 8 \qquad Q_2 = 4{,}0$$
$$P_3 = 1 \qquad Q_3 = 3{,}0$$
$$Q_4 = 2{,}0$$

Ἔχομεν :

$$M_1'(P) = \frac{1\int_0^1 t\,dt + 8\int_1^2 t\,dt + 1\int_2^3 t\,dt}{10} = 1{,}5$$

$$M_2'(P) = \frac{1\int_0^1 t^2dt + 8\int_1^2 t^2dt + 1\int_2^3 t^2dt}{10} = 2{,}53$$

$$M_1'(Q) = \frac{0{,}5\int_0^1 t\,dt + 4\int_1^2 t\,dt + 3\int_2^3 t\,dt + 2\int_3^4 t\,dt}{9{,}5} = 2{,}18$$

$$M_2'(Q) = \frac{0{,}5\int_0^1 t^2dt + 4\int_1^2 t^2dt + 3\int_2^3 t^2dt + 2\int_3^4 t^2dt}{9{,}5} = 5{,}60$$

$$M_2(P) = -M_1'^2(P) + M_2'(P) = -2{,}25 + 2{,}53 = 0{,}28$$

$$M_2(Q) = -M_1'^2(Q) + M_2'(Q) = -4{,}76 + 5{,}60 = 0{,}84$$

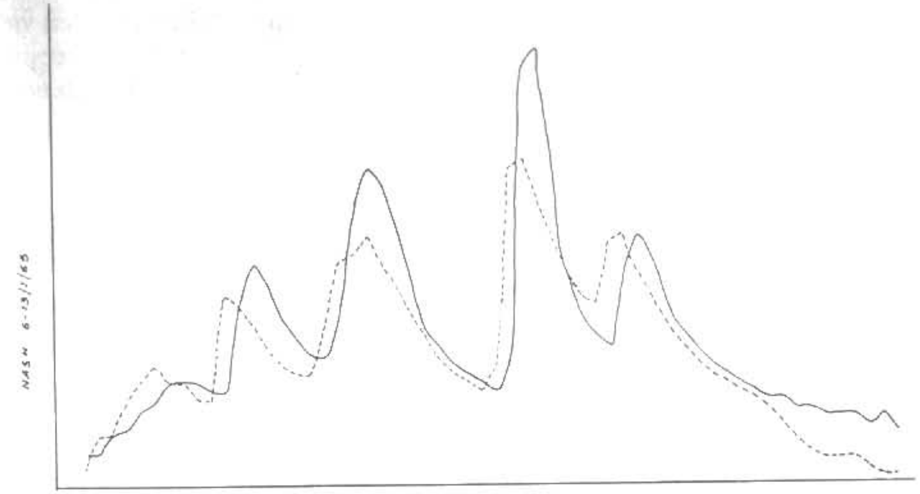
$$n = \frac{[M_1'(Q) - M_1'(P)]^2}{M_2(Q) - M_2(P)} = \frac{(2{,}18 - 1{,}3)^2}{0{,}84 - 0{,}28} = 0{,}83$$

$$k = \frac{M_2(Q) - M_2(P)}{M_1'(Q) - M_1'(P)} = \frac{0{,}56}{0{,}68} = 0{,}82$$

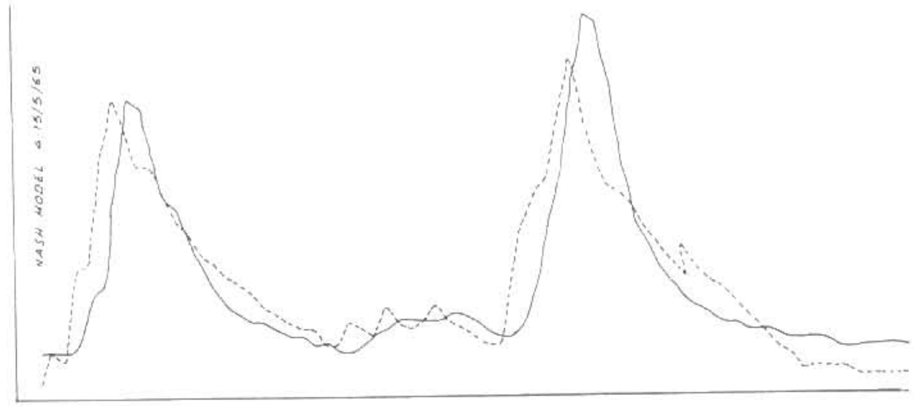
Διὰ τὴν εὕρεσιν τῶν τιμῶν τῶν n καὶ k εἰς περιπτώσεις πολλῶν δεδομένων ὑφίστανται προγράμματα εἰς ἠλεκτρονικοὺς ὑπολογιστάς. Πάντως ἡ ἐργασία χρειάζεται ἀρκετὴν προσοχὴν ὡς πρὸς τὴν ἐκλογὴν τῶν περιόδων καὶ τῶν τελικῶν τιμῶν τῶν n καὶ k.

Τὰ σχήματα 3, 4, 5, 6, 7 δίδουν τὰ ὑδρογραφήματα διὰ τὴν αὐτὴν λεκά-

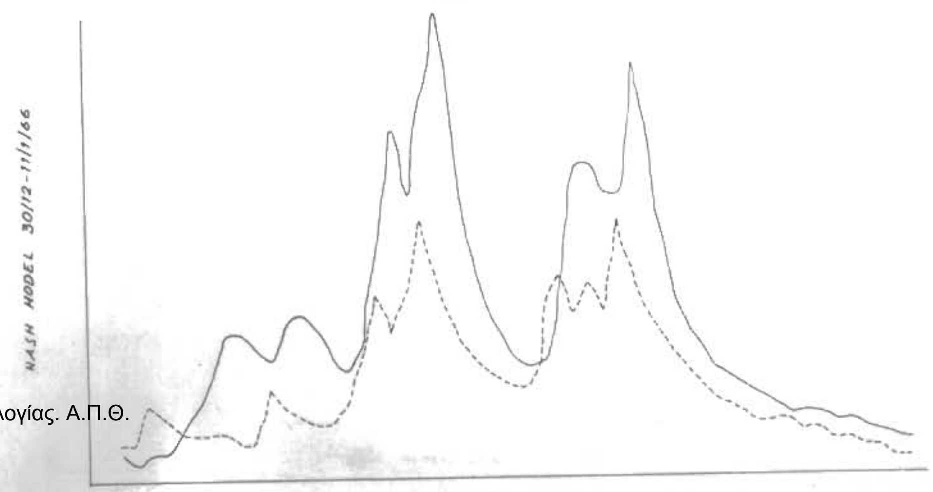
Ψηφιακή Βιβλιοθήκη "Θεόφραστος" - Τμήμα Γεωλογίας. Α.Π.Θ.



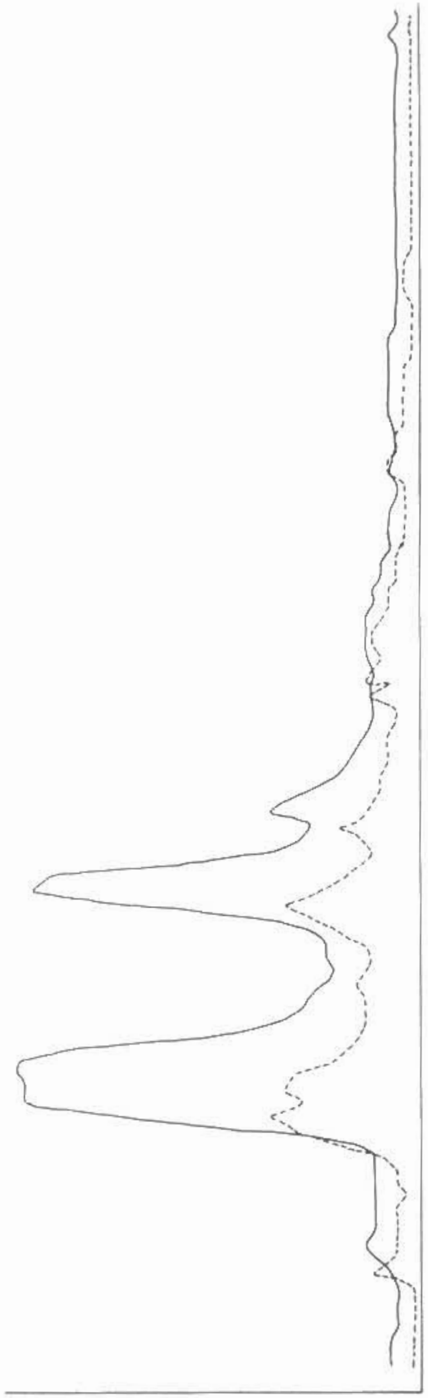
Σχ. 3.



Σχ. 4.

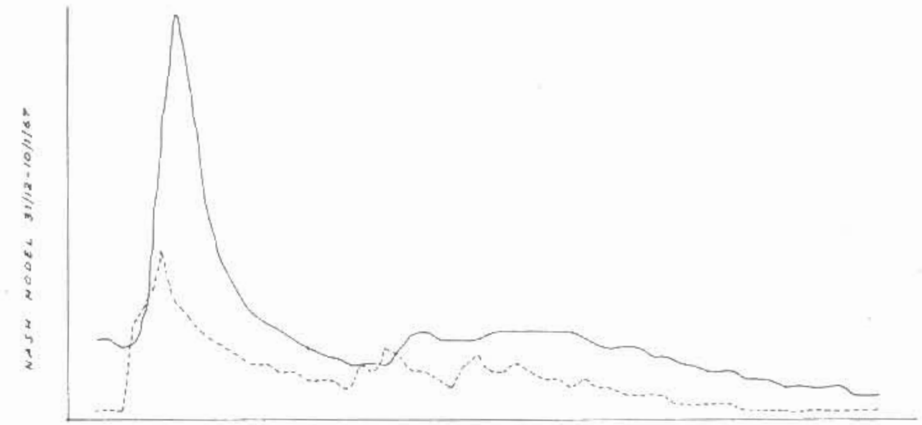


Σχ. 5.



Σχ. 6.

νην καὶ διὰ διαφορετικὰς περιόδους. Εἰς τὴν προκειμένην περίπτωσιν ἐξετάσθησαν συνολικῶς 10 περίοδοι καὶ παρετηρήθη γενικῶς ὅτι μετὰ ἀπὸ περίοδον ξηρασίας τὸ μοντέλον NASH δὲν δύναται νὰ χρησιμοποιηθῇ μὲ ἀξιοπιστίαν.



Σχ. 7.

Διὰ τὰς 5 περιόδους αἱ ὁποῖαι δεικνύονται εἰς τὰ σχήματα, εὑρέθησαν αἱ ἑξῆς τιμαί :

	n	k
1.	0,912	8,59
2.	0,744	12,70
3.	0,396	19,80
4.	0,175	37,30
5.	0,465	22,80

Ἀντιστροφὴ μητρώου.

Δίδονται : P (βροχόπτωσις) καὶ Q (ἀπορροή).

Ζητεῖται νὰ προσδιορισθῇ τὸ μοναδιαῖον ὑδρογράφημα.

Διάσπασις τοῦ ὁλοκληρώματος συνελίξεως :

$$Q_t = \int_0^t P(\tau)\, u(t-\tau)\, d\tau$$

Ψηφιακή Βιβλιοθήκη "Θεόφραστος" - Τμήμα Γεωλογίας. Α.Π.Θ.

ὁδηγεῖ εἰς ἓν σύνολον ἐξισώσεων :

$$\left.\begin{array}{l} Q_1 = u_1 P_1 + 0 + 0 \\ Q_2 = u_1 P_2 + u_2 P_1 + 0 \\ Q_3 = u_1 P_3 + u_2 P_2 + u_3 P_1 + 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ Q_m = u_1 P_m + \ldots\ldots + u_m P_1 \\ Q_{m+1} = 0 + u_2 P_m + \ldots\ldots + u_m P_2 + u_{m+1} \cdot P_1 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ Q_{m+n+1} = 0 + 0 + \ldots\ldots + u_n P_n \end{array}\right\} \quad (1)$$

Αὐτὸ σημαίνει ὅτι ἔχομεν πρὸς ἐπίλυσιν $(m + n - 1)$ ἐξισώσεις μὲ n ἀγνώστους. Πρέπει νὰ εὕρωμεν τὸ Μ.Υ. τὸ ὁποῖον θὰ ταιριάζῃ καλύτερον.

Τὸ Q καὶ u εἶναι ἀνύσματα.

Τὸ **P** εἶναι μητρῶον.

Ὑπὸ τὸν συμβολισμὸν μητρώου, τὸ ἀνωτέρω σύστημα γράφεται :

$$Q = \mathbf{P} \cdot U \quad (2)$$

Διὰ νὰ ἐπιλύσωμεν ὡς πρὸς U, καθιστῶμεν τὸ **P** τετραγωνικὸν μητρῶον. Αὐτὸ γίνεται διὰ πολ/σμοῦ ἀμφοτέρων τῶν μελῶν τῆς (2) μὲ τὴν ἐναλλακτικὴν τῆς **P** ($^t\mathbf{P}$) :

$$\begin{aligned} {}^t\mathbf{P} \cdot Q &= {}^t\mathbf{P} \cdot \mathbf{P} \cdot U \\ &= Z \cdot U \quad (3) \end{aligned}$$

ἔνθα $$U = Z^{-1} \cdot {}^t\mathbf{P} \cdot Q \quad (4)$$

Τὰ σχήματα 8, 9, 10, 11, 12 δεικνύουν τὰς αὐτὰς περιόδους τὰς ἐκλεγείσας διὰ τὸ μοντέλον NASH πλὴν ὅμως ἡ λύσις ἔχει γίνει δι᾽ ἀντιστροφῆς μητρώου.

Εἶναι προφανὲς ἐκ τῆς συγκρίσεως, ὅτι εἰς τὴν ἐκλεγεῖσαν λεκάνην, ἡ ἀντιστροφὴ μητρώου δίδει καλύτερα ἀποτελέσματα.

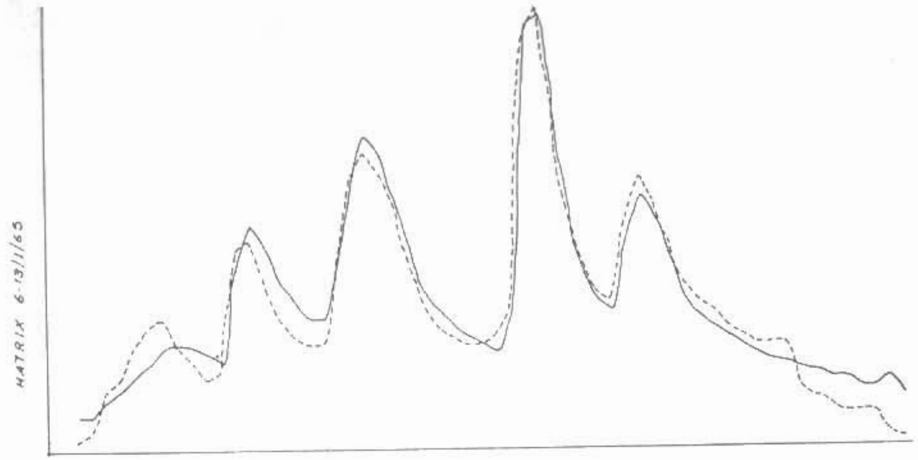
Ὑπολογισμὸς ταμιευτῆρος καὶ ἀνοικτῶν ἀγωγῶν.

Ἐὰν τὸ ὑφιστάμενον εἰς μίαν περιοχὴν ἀποστραγγιστικὸν δίκτυον δὲν ἐπαρκῇ διὰ τὴν μεταφορὰν ὅλου τοῦ ὕδατος κατὰ τὴν διάρκειαν μεγάλων πλημμυρῶν, πρέπει νὰ γίνουν βελτιώσεις εἰς τὸ δίκτυον καὶ νὰ κατασκευασθοῦν νέοι ἀγωγοί.

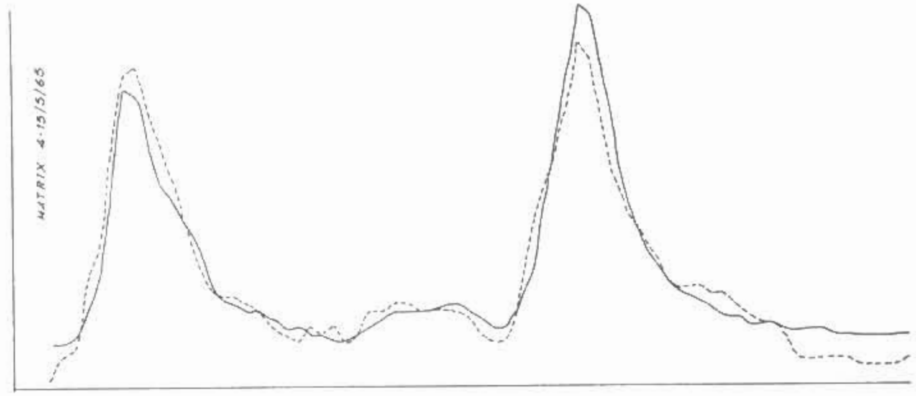
Ἡ μέθοδος ὑπολογισμοῦ, ἡ ὁποία λαμβάνεται, ἐφαρμόζει τὴν σταθερὰν ὁμοιόμορφον ροήν. Ἡ κίνησις εἶναι σταθερὰ καὶ ἡ ροὴ ὁμοιόμορφος, ὅταν ἡ ταχύτης εἰς τὴν διώρυγα, ἡ κατὰ πλάτος τομὴ τῆς ροῆς καὶ ἡ ὑδραυλικὴ κλίσις εἶναι αἱ ἴδιαι παντοῦ καὶ δὲν μεταβάλλονται μὲ τὸν χρόνον.

Συνήθως ἐφαρμόζεται ὁ τύπος τοῦ Chezy μὲ τὰς παραδοχὰς τῶν Manning-Strickler διὰ τὴν τραχύτητα πυθμένος :

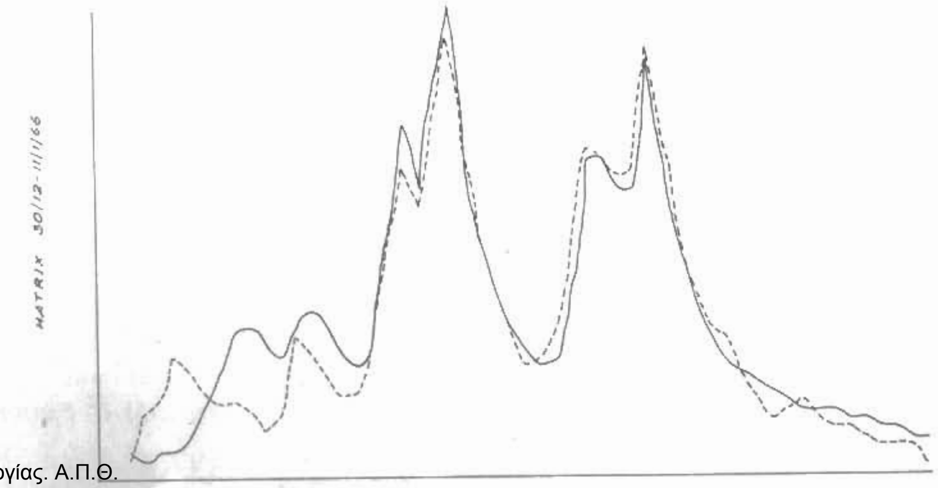
Ψηφιακή Βιβλιοθήκη "Θεόφραστος" - Τμήμα Γεωλογίας. Α.Π.Θ.



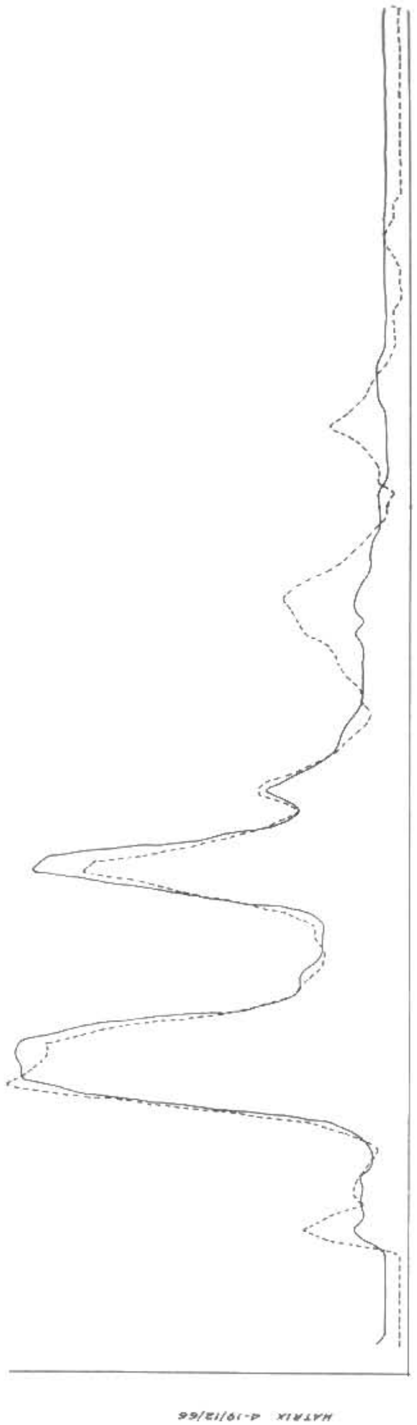
Σχ. 8.



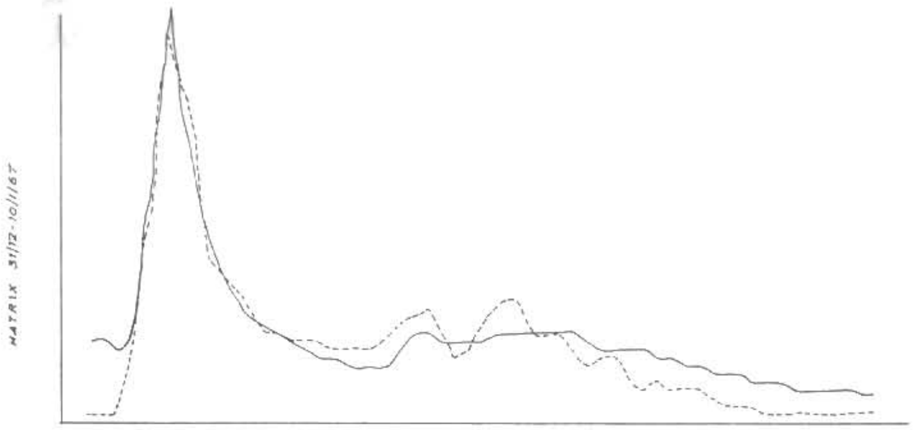
Σχ. 9.



Σχ. 10.



Σχ. 11.



Σχ. 12.

$$Q = A \cdot V = A \cdot K_m \cdot R^{2/3} \cdot S^{1/2}$$

ἔνθα V = ταχύτης ροῆς (m/sec)

Q = παροχὴ (m³/sec)

S = κλίσις

A = βρεχομένη ἐπιφάνεια (m²)
προσδιοριζομένη ὑπὸ τῶν b = πλάτος πυθμένος (m) καὶ

d = βάθος ὕδατος (m)

$1 : P$ = κλίσις (κατακόρυφος : ὁριζοντίαν)

R = ὑδραυλικὴ ἀκτὶς (m)

K_m = συντελεστὴς ($m^{1/3} \cdot sec$).

Πρὸ τῆς ἐκτελέσεως τῶν ὑπολογισμῶν πρέπει νὰ δοθῆ τὸ μέγεθος τῶν διαφόρων παραγόντων :

— ἡ ἐπιτρεπομένη ταχύτης προσδιορίζεται κυρίως ὑπὸ τοῦ ὑλικοῦ τοῦ πυθμένος καὶ τῶν πρανῶν.

— οἱ συντελεσταὶ K_m πρέπει νὰ ἐκλεγοῦν συναρτήσει τοῦ βάθους ὕδατος (d).

— αἱ κλίσεις τῶν πρανῶν συνδέονται ἐπίσης μὲ τὸν τύπον τοῦ ἐδάφους.

Διὰ τὸν ὑπολογισμὸν στενώσεων καὶ γεφυρῶν δύναται νὰ χρησιμοποιηθῆ ὁ ἑξῆς τύπος :

$$Q = \mu A \sqrt{2gz}$$

Ψηφιακή Βιβλιοθήκη "Θεόφραστος" - Τμήμα Γεωλογίας. Α.Π.Θ.

ἔνθα Q = παροχὴ διὰ τῆς κατασκευῆς (m^3/sec)

μ = συντελεστὴς

z = διαφορὰ φορτίου

g = ἐπιτάχυνσις βαρύτητος

Διὰ τὸν ὑπολογισμὸν τῆς παροχῆς ὑπερχειλιστῶν :

$$Q = 1{,}7 \cdot m \cdot b \cdot h^{3/2}$$

ἔνθα m = συντελεστὴς ἐξαρτώμενος ἐκ τοῦ σχήματος τοῦ ὑπερχειλιστοῦ.

Διὰ τὸν ὑπολογισμὸν τῆς Q_{max} ἐφαρμόζομεν τὸ ΣΜΥ τὸ ὁποῖον πλησιάζει πρὸς τὴν πραγματικότητα περισσότερον τῶν ἄλλων.

Διὰ τὴν μετατροπὴν τοῦ ΣΜΥ εἰς Μ. Υ. ἐφαρμόζομεν τὸν τύπον :

$$u\,(t, \Delta t) = \frac{u\,(t, 0) + u\,(t - \Delta t, 0)}{2}$$

καὶ ἐν συνεχείᾳ δι' ἀθροίσεως αὐτῶν κατὰ τὴν διάρκειαν τῶν ἐκλεγέντων διαστημάτων εὑρίσκομεν τὴν Q_{max}.

Ψηφιακή Βιβλιοθήκη "Θεόφραστος" - Τμήμα Γεωλογίας. Α.Π.Θ.