ΕΠΙ ΤΗΣ ΕΠΙΛΥΣΕΩΣ ΤΟΥ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ ΤΗΣ ΜΗ ΜΟΝΙΜΟΥ ΡΟΗΣ ΕΝΤΟΣ ΠΟΡΩΔΟΥΣ ΜΕΣΟΥ *

ΥΠΟ

Π. ΚΑΡΑΚΑΤΣΟΥΛΗ**

Σύνοψις. Διὰ τὴν ροὴν τοῦ ὕδατος ἐντὸς φρεατίου ὁρίζοντος ἰσχύει βασικῶς ὁ νόμος τοῦ DARCY. Ὁ συνδυασμὸς τοῦ νόμου τούτου καὶ τῆς ἐξισώσεως συνεχείας ὁδηγεῖ εἰς διαφορικὰς ἐξισώσεις μὲ μερικὰς παραγώγους ἐλλειπτικοῦ τύπου.

Ἂν καί, πολλάκις, εἶναι δυνατὴ ἡ εὕρεσις ἀναλυτικῆς λύσεως διὰ τὴν ἐξίσωσιν τοῦ LAPLACE, εἶναι πρακτικῶς ἀδύνατον νὰ ἐπιλυθῇ ἀναλυτικῶς ἡ ἐξίσωσις τοῦ FOURIER.

Διὰ τῆς προσφυγῆς οὕτω εἰς τὰς μεθόδους τῆς ἀριθμητικῆς ἀναλύσεως, ἀπολήγομεν τελικῶς εἰς τὴν χρησιμοποίησιν εἴτε τῆς κλασσικῆς μεθόδου τῶν πεπερασμένων διαφορῶν εἴτε τῆς πλέον προσφάτου καὶ περισσότερον ἀποτελεσματικῆς μεθόδου τῶν πεπερασμένων στοιχείων.

Ἂν καὶ αἱ δύο μέθοδοι παρουσιάζουν τὸ κοινὸν χαρακτηριστικὸν τῆς ὑποδιαιρέσεως εἰς τμήματα τοῦ ὑπὸ μελέτην πεδίου, ἐν τούτοις, βασικαὶ διαφοραὶ ὑφίστανται μεταξὺ τούτων ἀπὸ φυσικῆς καὶ ἀριθμητικῆς ἀπόψεως.

Ὡσαύτως, διὰ τῆς χρησιμοποιήσεως μεθόδων ἐλαχιστοποιήσεως ἀποφεύγεται τὸ πρόβλημα τῆς συγκλίσεως τῆς ἀριθμητικῆς μεθόδου ὡς καὶ οἱ κίνδυνοι ἀσταθείας τῆς ἀριθμητικῆς ἀναλύσεως.

Ἡ δυνατότης ἐξ ἄλλου χρησιμοποιήσεως στοιχείων οἱασδήποτε μορφῆς ἐπιτρέπει τὴν ὀρθοτέραν ἀναπαράστασιν τῆς γεωμετρίας τοῦ ὑπὸ μελέτην πεδίου καὶ τὸν πληρέστερον καθορισμὸν τῶν ὁριακῶν συνθηκῶν αὐτοῦ.

Résumé. La loi de DARCY est en géneral valable pour les écoulements de nappes d'eau souterraines. L'association à cette loi de l'équation de continuité conduit à des équations aux derivées partielles de type elliptique.

On arrive, très souvent, à trouver des solutions analytiques pour l'équation de LAPLACE, mais il est pratiquement impossible de resoudre analytiquement l'équation de FOURIER.

En faisant appel à des méthodes numériques, on arrive finalement à l'utilisation de la méthode classique des differences finies ou à l'utilisation de la méthode, la plus recente, des élements finis qui se présente comme plus éfficace.

Bien que les deux méthodes utilisent des schemas de discrétisation, il existe entre elles des differences essentielles sur le plan physique et numérique. Ainsi, par la méthode des élements finis on peut resoudre de façon rélativement facile, des problèmes d'écoulement dans un milieu heterogène, des problèmes multicouches e.t.c.

De même, par un passage au calcul des variations on évite le problème de convergence numérique ainsi que les risques d'instabilité.

Par l'utilisation, d'ailleurs, des mailles de forme quelquonque on peut mieux présenter, numériquement, la géometrie du domaine étudié et de mieux définir la qualité de ses limites.

---

* P. KARAKATSOULIS : Sur la resolution du problème de l'écoulement non-permenent dans un milieu poreux.

** Ἐπικ. Καθηγητὴς τῆς Ἀνωτάτης Γεωπονικῆς Σχολῆς Ἀθηνῶν (Ἕδρα Γεωργικῆς Ὑδραυλικῆς).

1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΕΙΣ ΤΗΝ ΘΕΩΡΙΑΝ ΤΗΣ ΥΠΟΓΕΙΟΥ ΡΟΗΣ

Ὡς γνωστόν, διὰ τὴν ροὴν ἐντὸς φρεατίου ὁρίζοντος ἰσχύει, βασικῶς, ὁ νόμος τοῦ DARCY. Ἡ μαθηματικὴ σχέσις, διὰ τῆς ὁποίας ἐκφράζεται ὁ νόμος οὗτος εἶναι,

$$\vec{Q} = T\,\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\Phi \qquad (1)$$

ἔνθα,

$Q(x, y, t)$ = ἡ παροχὴ εἰς ἓν σημεῖον τοῦ ὑδροφόρου ὁρίζοντος

$T(x, y, t)$ = ἡ χαρακτηριστικὴ συνάρτησις διαπερατότητος τοῦ πορώδους μέσου

$\Phi(x, y, t)$ = τὸ δυναμικὸν ροῆς (ροηφόρος συνάρτησις).

Βεβαίως, τελευταῖαι ἔρευναι θέτουν ὑπὸ διαμφισβήτησιν τὴν ὡς ἄνω γραμμικὴν σχέσιν τοῦ DARCY καὶ ἀποδεικνύουν ὅτι ἡ σχέσις αὕτη πιθανὸν νὰ εἶναι δευτέρας ἢ καὶ ἀνωτέρας τάξεως, πλὴν ὅμως, διὰ τὰς συνήθεις περιπτώσεις, ἔνθα ἡ ταχύτης τῆς ροῆς ἐντὸς πορώδους μέσου εἶναι μικροτέρα ὡρισμένων ὁρίων, ὁ νόμος τοῦ DARCY δίδει ἀποτελέσματα ἁπτόμενα αἰσθητῶς τῆς πραγματικότητος.

Ἐφ' ὅσον τὸ πορῶδες μέσον ἐντὸς μιᾶς καθωρισμένης περιοχῆς εἶναι ὁμοιογενὲς καὶ ἰσότροπον, ἡ ὡς ἄνω σχέσις (1), ἰσχύουσα δι' ἓν σημεῖον τῆς περιοχῆς, δύναται νὰ ἐπεκταθῇ καὶ διὰ τὰ λοιπὰ σημεῖα τῆς περιοχῆς ταύτης.

Ἡ σχέσις (1) συνδυαζομένη μετὰ τῆς ἐξισώσεως συνεχείας

$$\mathrm{div}\,\vec{V} = 0 \qquad (2)$$

$V(x, y, t)$ = ἡ συνάρτησις τῆς ταχύτητος

ὁδηγεῖ, ὡς γνωστόν, εἰς διαφορικὴν ἐξίσωσιν μὲ μερικὰς παραγώγους ἐλλειπτικοῦ τύπου, ἤτοι :

τὴν ἐξίσωσιν τοῦ LAPLACE $\nabla^2 \Phi = 0$ (3)

ἢ τοῦ POISSON διὰ μόνιμον ροὴν $\nabla^2 \Phi =$ σταθ. (4)

καὶ

εἰς τὴν ἐξίσωσιν τοῦ FOURIER $T\nabla^2 \Phi = \dfrac{Sd\Phi}{dt} + B(t)$ (5)

διὰ μεταβαλλομένην ροὴν συναρτήσει τοῦ χρόνου,

ἔνθα,

$B(x, y, t)$ = ἡ εἰσερχομένη ἔξωθεν παροχὴ ἐντὸς τοῦ ὑδροφόρου ὁρίζοντος.

$S(x, y, t)$ = ὁ συντελεστὴς ἐναποθηκεύσεως ἐντὸς τοῦ ὑδροφόρου ὁρίζοντος.

Εἰς τὴν περίπτωσιν ὑπογείου ροῆς μικροῦ βάθους μὲ ἐλευθέραν ἐπιφάνειαν, τὸ δυναμικὸν ροῆς $\Phi(x, y, t)$ δύναται νὰ θεωρηθῇ, μὲ ἱκανοποιητικὴν προσέγγισιν, ὡς σταθερὸν κατὰ μῆκος μιᾶς κατακορύφου γραμμῆς.

Εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην ἡ ὡς ἄνω σχέσις (5) παριστᾷ τὴν κατανομὴν τοῦ πιεζομετρικοῦ ὕψους εἰς ἕκαστον σημεῖον (x, y) καὶ δύναται νὰ γραφῇ ὑπὸ τὴν κάτωθι μορφὴν

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[T\frac{\partial H}{\partial x}\right]+\frac{\partial}{\partial y}\left[T\frac{\partial H}{\partial y}\right]=S\frac{\partial H}{\partial t}+B(t) \qquad (6)$$

ἔνθα,

$H(x, y, t)$ = πιεζομετρικὸν ὕψος.

Ὡς γνωστόν, ἓν πρόβλημα διαφορικῆς ἐξισώσεως μὲ μερικὰς παραγώγους ἐλλειπτικοῦ τύπου, εἶναι μαθηματικῶς καθωρισμένον ἐντὸς ἑνὸς πεδίου, ἐφ' ὅσον δίδονται αἱ ὁριακαὶ συνθῆκαι αὐτοῦ. Οὕτω καὶ ἡ συνάρτησις $H(x, y, t)$ θὰ εἶναι πλήρως καθωρισμένη ἐφ' ὅσον δίδεται μία τῶν κάτωθι τριῶν συνθηκῶν :

α. Συνθήκη τοῦ DIRICHLET.

Δίδεται ἡ τιμὴ τῆς συναρτήσεως $H(x, y, t)$ = σταθ., ἐπὶ τῆς ὁριακῆς γραμμῆς τοῦ πεδίου.

β. Συνθήκη τοῦ NEUMANN.

Δίδεται ἡ τιμὴ τῆς παραγώγου $T\frac{\partial H}{\partial x}$ = σταθ., ἐπὶ τῆς ὁριακῆς γραμμῆς τοῦ πεδίου. Βεβαίως, διὰ νὰ ἐπιδέχεται εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην τὸ πρόβλημα μονοσήμαντον λύσιν πρέπει νὰ εἶναι καθωρισμένη ἐπίσης καὶ ἡ τιμὴ τῆς συναρτήσεως $H(x, y, t)$ = σταθ., τοὐλάχιστον εἰς ἓν σημεῖον (x_1, y_1) τῆς ὁριακῆς γραμμῆς τοῦ πεδίου.

γ. Συνθήκη μικτοῦ τύπου.

Διὰ τὴν συνθήκην ταύτην εἰς ἓν καθωρισμένον τμῆμα τῆς ὁριακῆς γραμμῆς τοῦ πεδίου ἰσχύει ἡ συνθήκη τοῦ DIRICHLET διὰ δὲ τὸ ὑπόλοιπον τμῆμα ἡ συνθήκη τοῦ NEUMANN.

Διὰ τὴν περίπτωσιν τῆς μονίμου ροῆς (ἐξίσωσις LAPLACE) καὶ διὰ τὰς ὡς ἄνω ἐκτεθείσας ὁριακὰς συνθήκας, εἶναι δυνατόν, πολλάκις, νὰ ἐξευρεθοῦν ἀναλυτικαὶ λύσεις διὰ τῆς μεθόδου τῶν συμμόρφων ἀπεικονίσεων. Πλὴν ὅμως, διὰ τὴν ἐξίσωσιν τοῦ FOURIER (μεταβαλλομένη ροὴ) τοῦτο εἶναι πρακτικῶς ἀδύνατον. Εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην αἱ μόναι μέθοδοι, αἵτινες ἐπιτρέπουν τὴν ἐπίλυσιν τοῦ προβλήματος, εἶναι αἱ τῆς ἀριθμητικῆς ἀναλύσεως διὰ τῆς χρησιμοποιήσεως εἰδικῶν προγραμμάτων ἠλεκτρονικοῦ ὑπολογιστοῦ.

Ἐκ τῶν μεθόδων τῆς ἀριθμητικῆς ἀναλύσεως ἡ πλέον κλασσικὴ εἶναι ἡ μέθοδος τῶν πεπερασμένων διαφορῶν. Διὰ τῆς μεθόδου ταύτης, ὡς γνωστόν, αἱ διαφορικαὶ ἐξισώσεις μετασχηματίζονται εἰς σύστημα γραμμικῶν ἐξισώσεων πεπερασμένων διαφορῶν διὰ προηγουμένης καταλλήλου ὑποδιαιρέσεως τοῦ ὑπὸ μελέτην πεδίου εἰς δίκτυον κόμβων καὶ ἐξασφαλίσεως τῶν σχέσεων τῆς συνεχείας μεταξὺ τῶν κόμβων τούτων. Ἓν σοβαρὸν μειονέκτημα τῆς μεθόδου ταύτης εἶναι ὅτι πολλάκις ὁδηγεῖ εἰς πολυάριθμα συστήματα (μέχρι καὶ 10.000 καὶ πλέον) γραμμικῶν ἐξισώσεων, τῶν ὁποίων ἡ ἐπίλυσις ἀπαιτεῖ τὴν χρησιμοποίησιν πολυπλόκων μεθόδων ἀριθμητικῆς ἀναλύσεως καὶ μεγάλον χρόνον ἀπασχολήσεως τοῦ ἠλεκτρονικοῦ ὑπολογιστοῦ.

Πρὸς τούτοις, κατὰ τὰ τελευταῖα ἔτη, ἀνεπτύχθη ἡ μέθοδος τῶν πεπερασμένων στοιχείων, ἥτις ὁδηγεῖ εἰς πολὺ μικρότερον πλῆθος γραμμικῶν ἐξισώσεων, στηρίζεται δὲ κατὰ τὸ μᾶλλον ἢ ἧττον εἰς τὴν ἐξασφάλισιν τῆς σχέσεως συνεχείας τῆς πιέσεως μεταξὺ τῶν διαφόρων στοιχείων, εἰς τὰ ὁποῖα ἔχει ὑποδιαιρεθῆ τὸ ὑπὸ μελέτην πεδίον.

Κατωτέρω ἐκτίθεται διεξοδικῶς μόνον ἡ μέθοδος τῶν πεπερασμένων στοιχείων καὶ ἐπιπροσθέτως θὰ ἐπισημανθοῦν αἱ βασικαὶ διαφοραὶ τῆς μεθόδου ταύτης ὡς πρὸς τὴν κλασσικὴν μέθοδον τῶν πεπερασμένων διαφορῶν ὅσον ἀφορᾶ τὴν φυσικὴν ἄποψιν τοῦ προβλήματος ὡς καὶ τὴν ἀριθμητικὴν τοιαύτην.

2. Η ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΩΝ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΩΝ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ

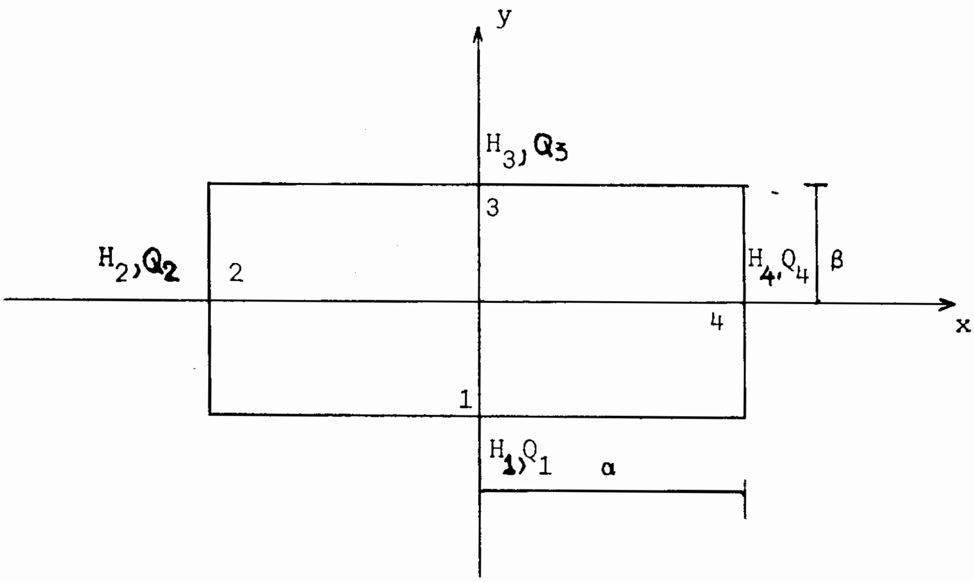
Τὸ ὑπὸ μελέτην πεδίον ὑποδιαιρεῖται, ἀναλόγως τοῦ ὑπὸ ἐξέτασιν προβλήματος καὶ τῶν δεδομένων στοιχείων τῆς ὁριακῆς γραμμῆς, εἰς γεωμετρικὰ στοιχεῖα προκαθωρισμένης μορφῆς καὶ διαστάσεων. Αἱ πλέον συνήθεις χρησιμοποιούμεναι γεωμετρικαὶ μορφαὶ εἶναι τὰ τρίγωνα, τετράγωνα, ὀρθογώνια, ρόμβοι κ.λ.π.

Αἱ διαστάσεις τῶν στοιχείων τούτων ἐξαρτῶνται κυρίως ἀπὸ τὰς ὁριακὰς συνθήκας καὶ ἀπὸ τὴν εὐστάθειαν καὶ σύγκλισιν τῆς χρησιμοποιουμένης ἀριθμητικῆς μεθόδου διὰ τὸ ὑπ' ὄψιν πρόβλημα. Οὕτω, πολλάκις, ὑφίσταται ἡ ἀνάγκη τῆς πυκνοτέρας ὑποδιαιρέσεως (μικρότεραι διαστάσεις στοιχείων) εἰς ὡρισμένας περιοχὰς τοῦ πεδίου ἔνθα αἱ δυσμενεῖς ὁριακαὶ συνθῆκαι, πιθανόν, θὰ ὡδήγουν εἰς ἀπόκλισιν τῆς ἀριθμητικῆς μεθόδου. Ἀντιθέτως ἡ παραδοχὴ εἰς ὁλόκληρον τὸ πεδίον ὑποδιαιρέσεως μὲ μικρὰς διαστάσεις θὰ ὡδήγει εἰς ἀντιοικονομικὴν ἀντιμετώπισιν τοῦ προβλήματος, διότι θὰ ηὔξανε αἰσθητῶς τὸ πλῆθος τῶν γραμμικῶν ἐξισώσεων, ἄνευ ὠφελείας ἐπὶ τῆς ἀκριβείας τῆς λύσεως εἰς τὰ τμήματα τοῦ πεδίου ἔνθα αἱ ὁριακαὶ συνθῆκαι δὲν εἶναι δυσμενεῖς.

Κατωτέρω ἀναπτύσσεται ἡ πλέον συνήθης μορφὴ ὑποδιαιρέσεως, ἥτις εἶναι ἡ ὀρθογωνική.

2. 1. Στοιχειώδης ὑπολογισμὸς ἐντὸς στοιχείου.

Ὁ ὑπολογισμὸς οὗτος συνίσταται εἰς τὸν προσδιορισμὸν τῆς συναρτήσεως H ἐντὸς τοῦ στοιχείου τούτου συναρτήσει τῆς τιμῆς αὐτῆς Ho ἀντιστοιχούσης εἰς τὸ γεωμετρικὸν κέντρον αὐτοῦ. Ἡ ἀναζήτησις τῆς συναρτήσεως ταύτης στηρίζεται, κυρίως, εἰς τὴν ἐμπειρίαν τοῦ ἐρευνητοῦ, ἐπὶ τοιαύτης φύσεως προβλημάτων. Γενικῶς ὅμως, μετὰ τὴν ἐπιλογὴν τῆς μορφῆς τῆς συναρτήσεως (πολυωνυμική, ἐκθετική, λογαριθμικὴ κ.λ.π.) ἐπακολουθεῖ ὁ καθορισμὸς τῶν προσδιοριστέων συντελεστῶν αὐτῆς δι' ἐφαρμογῆς μιᾶς τῶν μεθόδων ἐλαχιστοποιήσεως τοῦ σφάλματος (συνήθως χρησιμοποιεῖται ἡ γνωστὴ μέθοδος τοῦ GALERKIN). Ἡ συνη-



Σχ. 1.

θέστερον χρησιμοποιουμένη μορφὴ συναρτήσεως εἶναι ἡ πολυωνυμική, ἀναπτυσσομένη κυρίως μέχρι τῶν ὅρων 2ας τάξεως. Οὕτω προκύπτει ἡ κατωτέρω σχέσις τῆς μορφῆς:

$$H = Ho + \alpha_1 x + \alpha_2 y + \alpha_3 x^2 + \alpha_4 y^2 \qquad (7)$$

συμφώνως καὶ πρὸς τὸ διδόμενον κατωτέρω σχῆμα 1.

Διὰ τῆς ὡς ἄνω ἐπιλεγείσης συναρτήσεως δὲν ἀπαιτεῖται ὁ προσδιορισμὸς τῶν συντελεστῶν διὰ μιᾶς τῶν γνωστῶν μεθόδων ἐλαχιστοποιήσεως, διότι οἱ συντελεσταὶ οὗτοι ἀπαλείφονται κατὰ τὴν κατάστρωσιν τῶν ὁριακῶν σχέσεων τοῦ στοιχείου.

Διὰ μίαν δεδομένην χρονικὴν στιγμὴν δύναται τὸ πιεζομετρικὸν ὕψος εἰς τὸ κέντρον τοῦ στοιχείου νὰ δοθῇ ὡς γραμμικὴ σχέσις τῶν πιεζομετρικῶν ὑψῶν εἰς τὰ μέσα τῶν πλευρῶν τοῦ καθορισθέντος ὀρθογωνικοῦ στοιχείου.

Οὕτω δι' ἐφαρμογῆς τῆς σχέσεως (7) προκύπτουν αἱ σχέσεις:

$$
\begin{aligned}
H_1 &= Ho - \alpha_2\beta + \alpha_4\beta^2 \\
H_2 &= Ho - \alpha_1\alpha + \alpha_3\alpha^2 \\
\text{καὶ} \quad H_3 &= Ho + \alpha_2\beta + \alpha_4\beta^2 \\
H_4 &= Ho + \alpha_1\alpha + \alpha_3\alpha^2
\end{aligned}
\qquad (8)
$$

Ἐκ τῶν σχέσεων (8) προκύπτουν αἱ τιμαὶ τῶν συντελεστῶν α_1, α_2, α_3, α_4, ἤτοι:

$$
\begin{aligned}
\alpha_1 &= \frac{H_4 - H_2}{2\alpha} \\
\alpha_2 &= \frac{H_3 - H_1}{2\beta} \\
\alpha_3 &= \frac{H_2 + H_4 - 2Ho}{2\alpha^2} \\
\alpha_4 &= \frac{H_1 + H_3 - 2Ho}{2\beta^2}
\end{aligned}
\qquad (9)
$$

Ἐκ τῆς διαφορικῆς ἐξισώσεως (6) καὶ δι' ἀντικαταστάσεως τῆς τιμῆς τοῦ H ἐκ τῆς σχέσεως (7) προκύπτει ἡ κατωτέρω σχέσις, ἥτις βεβαίως, ἰσχύει μόνον διὰ τὸ ὑπὸ ἐξέτασιν μεμονωμένον στοιχεῖον, ἤτοι:

$$2(\alpha_3 + \alpha_4) = S\frac{Ho}{T\Delta t} \qquad (10)$$

καὶ δι' ἀντικαταστάσεως εἰς ταύτην τῆς τιμῆς τῶν α_3 καὶ α_4 ἐκ τῶν σχέσεων (9) προκύπτει ἡ σχέσις:

$$\frac{H_2 + H_4 - 2Ho}{\alpha^2} + \frac{H_1 + H_3 - 2Ho}{\beta^2} = S\frac{Ho}{T\Delta t}, \quad \text{ἐξ ἧς}$$

$$Ho = \frac{1}{\frac{S}{T\Delta t} + \frac{2}{\alpha^2} + \frac{2}{\beta^2}} \cdot \left[\frac{H_1 + H_3}{\beta^2} + \frac{H_2 + H_4}{\alpha^2}\right] \qquad (11)$$

ἤ

$$Ho = A_1(H_1 + H_3) + A_2(H_2 + H_4) \qquad (12)$$

ἔνθα $A_1 = \dfrac{1}{\left(\frac{S}{T\Delta t} + \frac{2}{\alpha^2} + \frac{2}{\beta^2}\right)\beta^2}$ καὶ $A_2 = \dfrac{1}{\left(\frac{S}{T\Delta t} + \frac{2}{\alpha^2} + \frac{2}{\beta^2}\right)\alpha^2}$

Ἐκ τῆς σχέσεως τοῦ DARCY, $\vec{Q} = T\,\overrightarrow{\text{grad}}\,H$ καὶ τῆς σχέσεως (7) προκύπτουν αἱ σχέσεις :

$$\begin{aligned}
\frac{Q_1}{T} &= \alpha_2 - 2\,\alpha_4\beta \\
\frac{Q_2}{T} &= \alpha_1 - 2\,\alpha_3\alpha \\
\frac{Q_3}{T} &= \alpha_2 + 2\,\alpha_4\beta \\
\frac{Q_4}{T} &= \alpha_1 + 2\,\alpha_3\alpha
\end{aligned} \tag{13}$$

Ἐκ τῶν σχέσεων (13) δι' ἀντικαταστάσεως τῶν τιμῶν τῶν συντελεστῶν α_1, α_2, α_3, α_4 ἐκ τῶν σχέσεων (9) προκύπτουν αἱ σχέσεις:

$$\begin{aligned}
\frac{Q_1}{T} &= \frac{H_3 - H_1}{2\beta} - \frac{H_1 + H_3 - 2Ho}{\beta} = \frac{-1{,}5\,H_1 - 0{,}5\,H_3 + 2Ho}{\beta} \\
\frac{Q_2}{T} &= \frac{H_4 - H_2}{2\alpha} - \frac{H_2 + H_4 - 2Ho}{\alpha} = \frac{-1{,}5\,H_2 - 0{,}5\,H_4 + 2Ho}{\alpha} \\
\frac{Q_3}{T} &= \frac{H_3 - H_1}{2\beta} + \frac{H_1 + H_3 - 2Ho}{\beta} = \frac{0{,}5\,H_1 + 1{,}5\,H_3 - 2Ho}{\beta} \\
\frac{Q_4}{T} &= \frac{H_4 - H_2}{2\alpha} + \frac{H_2 + H_4 - 2Ho}{\alpha} = \frac{0{,}5\,H_2 + 1{,}5\,H_4 - 2Ho}{\alpha}
\end{aligned} \tag{14}$$

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω σχέσεων (14) δι' ἀντικαταστάσεως τῆς τιμῆς Ho λαμβανομένης ἐκ τῆς σχέσεως (12) προκύπτουν αἱ κατωτέρω σχέσεις:

$$\begin{aligned}
\frac{Q_1}{T} &= \frac{(2A_1 - 1{,}5)\,H_1 + 2A_2H_2 + (2A_1 - 0{,}5)\,H_3 + 2A_2H_4}{\beta} \\
\frac{Q_2}{T} &= \frac{2A_1H_1 + (2A_2 - 1{,}5)\,H_2 + 2A_1H_3 + (2A_2 - 0{,}5)\,H_4}{\alpha} \\
\frac{Q_3}{T} &= \frac{(-2A_1 + 0{,}5)\,H_1 - 2A_2H_2 + (-2A_1 + 1{,}5)\,H_3 - 2A_2H_4}{\beta} \\
\frac{Q_4}{T} &= \frac{-2A_1H_1 + (-2A_2 + 0{,}5)\,H_2 - 2A_1H_3 + (-2A_2 + 1{,}5)\,H_4}{\alpha}
\end{aligned} \tag{15}$$

Αἱ σχέσεις (15) λαμβανομένης ὑπ' ὄψιν τῆς ἐπιρροῆς τῶν ὁριακῶν συνθηκῶν [διάνυσμα (Q_{01}, Q_{02}, Q_{03}, Q_{04})] δίδονται ὑπὸ διανυσματικὴν μορφὴν ὡς κάτωθι :

$$\begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \\ Q_4 \end{bmatrix} = T \begin{bmatrix} \frac{-1,5+2A_1}{\beta} & \frac{2A_2}{\beta} & \frac{-0,5+2A_1}{\beta} & \frac{2A_2}{\beta} \\ \frac{2A_1}{\alpha} & \frac{-1,5+2A_2}{\alpha} & \frac{2A_1}{\alpha} & \frac{-0,5+2A_2}{\alpha} \\ \frac{0,5-2A_1}{\beta} & \frac{-2A_2}{\beta} & \frac{1,5-2A_1}{\beta} & \frac{-2A_2}{\beta} \\ \frac{-2A_1}{\alpha} & \frac{0,5-2A_2}{\alpha} & \frac{-2A_1}{\alpha} & \frac{1,5-2A_2}{\alpha} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} H_1 \\ H_2 \\ H_3 \\ H_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} Q_{01} \\ Q_{02} \\ Q_{03} \\ Q_{04} \end{bmatrix} \qquad (16)$$

2.2. Σύνθεσις τῶν στοιχείων τοῦ πεδίου.

Ἕκαστον στοιχεῖον M(i, j) τοῦ ὑπὸ μελέτην πεδίου λαμβάνεται ὡς ὁμοιογενὲς καὶ πλήρως καθωρισμένον διὰ τῶν τεσσάρων πλευρῶν αὐτοῦ ἔνθα ὑφίσταται ἡ ἀνωτέρω σχέσις (16) διδομένη ὑπὸ τὴν ἀκόλουθον μορφήν :

$$\vec{Q}_M = [AE] \cdot \vec{H}_M + \vec{Q}_{OM} \qquad (17)$$

Ἔστω Π τὸ ὑπὸ μελέτην πεδίον (σχ. 2) διῃρημένον εἰς ὀρθογωνικὰ πεπερασμένα στοιχεῖα καὶ ἔστωσαν S_n καὶ S_{n+1} δύο διαδοχικαὶ καταστάσεις τοῦ πεδίου καθοριζόμεναι ἐκ τῶν διαδοχικῶν θέσεων Γ_n καὶ Γ_{n+1} τῆς κινητῆς ὁριακῆς γραμμῆς. Ἔστω ἐπὶ πλέον ὅτι αἱ σχέσεις παροχῶν - πιεζομετρικῶν ὑψῶν εἶναι γνωσταὶ ἐπὶ τῆς ὁριακῆς γραμμῆς Γ_n ἐκ τῆς σχέσεως :

$$\vec{Q}_n = [A\,C_n] \cdot \vec{H}_n + \vec{Q}_{on} \qquad (18)$$

ἔνθα

$\vec{Q}_n$ = τὸ διάνυσμα τοῦ συνόλου τῶν παροχῶν ἐπὶ τῆς ὁριακῆς γραμμῆς Γ_n

$\vec{H}_n$ = τὸ διάνυσμα τῶν ἀντιστοίχων πιεζομετρικῶν ὑψῶν καὶ

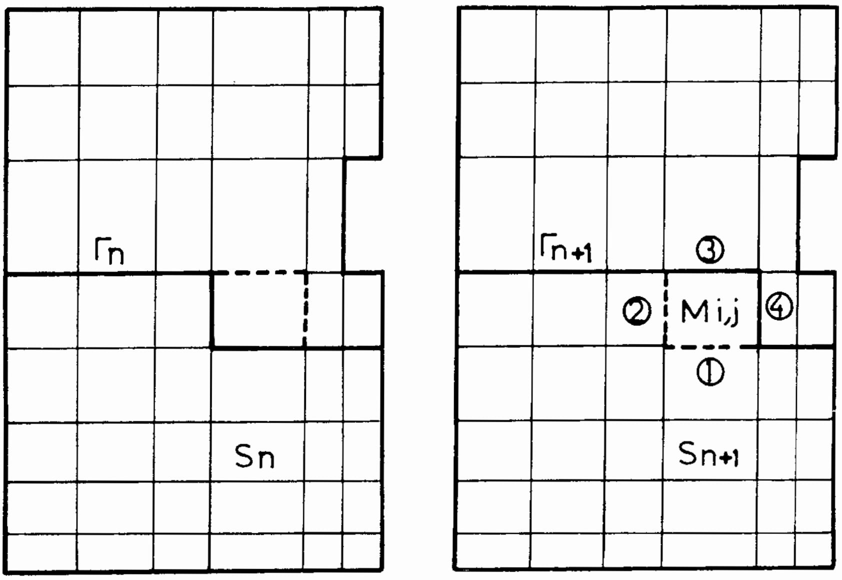
$\vec{Q}_{on}$ = τὸ διάνυσμα τῆς ἐπιρροῆς τῶν ὁριακῶν παροχῶν τοῦ πεδίου.

Ἡ προσθήκη τοῦ στοιχείου M (i, j) εἰς τὴν κατάστασιν S_n προσδιορίζει ἐπὶ τῆς νέας ὁριακῆς γραμμῆς Γ_{n+1} τὴν σχέσιν :

$$\vec{Q}_{n+1} = [A\,C_{n+1}] \cdot \vec{H}_{n+1} + \vec{Q}_{on+1} \qquad (19)$$

ἡ ὁποία προκύπτει ἐκ τῆς σχέσεως (18) διὰ προσθέσεως τῆς σχέσεως (17). Οὕτω ἓν τμῆμα τῆς καμπύλης **Γn** ἀπαλείφεται, καθ' ὅσον αἱ μὲν πλευραὶ [1] καὶ [2] ἀνήκουν ταυτοχρόνως εἰς τὴν ὁριακὴν γραμμὴν **Γn** καὶ εἰς τὸ στοιχεῖον M (i, j), αἱ δὲ πλευραὶ [3] καὶ [4] ἀνήκουν ταυτοχρόνως εἰς τὴν ὁριακὴν γραμμὴν Γ_{n+1} καὶ εἰς τὸ στοιχεῖον M (i, j).

Οὕτω ἡ πλήρης ἀπεικόνισις τῆς ροῆς εἰς τὸ ὑπὸ μελέτην πεδίον Π, διὰ τὸ ὁποῖον εἶναι πλήρως καθωρισμέναι αἱ ὁριακαὶ συνθῆκαι (παροχῆς ἢ πιέσεως) εἰς



Σχ. 2.

ἑκάστην χρονικὴν στιγμὴν t, προκύπτει διὰ διαδοχικῶν προσαρτήσεων ἁπάντων τῶν στοιχείων M αὐτοῦ.

2.3. Μέθοδος ὑπολογισμοῦ.

Ὡς γνωστόν, αἱ λύσεις μιᾶς διαφορικῆς ἐξισώσεως μὲ μερικὰς παραγώγους ἐλαχιστοποιοῦν μίαν ὁλοκληρωτικὴν συνάρτησιν (Μέθοδος GALERKIN), ἥτις εἰς τὴν προκειμένην περίπτωσιν δύναται νὰ γραφῇ ὑπὸ τὴν μορφὴν

$$\Omega_t(H) = \int\!\!\int_D [SH\cdot H + T\cdot \nabla H\cdot \nabla H - 2S\cdot Ho\cdot H](x,y,t)\,dx dy - 2\int_\Gamma T\frac{\partial H}{\partial n} H dl \quad (20)$$

Οὕτω, δι' ἓν γραμμικὸν σύστημα **n** πεπερασμένων στοιχείων διαφόρων χαρακτηριστικῶν ἡ ἀνωτέρω σχέσις δύναται νὰ γραφῇ ὑπὸ τὴν μορφὴν

$$\Omega_t(H) = \{H\}^T\cdot[D]\cdot\{H\} + \{H\}^T\cdot[AA]\cdot\{H\} - 2\{H\}^T\cdot[D]\cdot\{Ho\} - 2\{H\}^T\cdot\{Q\} \quad (21)$$

ἔνθα τὰ μητρῶα [D] καὶ [AA] καθορίζονται ὑπὸ τῶν βασικῶν ἰδιοτήτων (S, T κλπ.) ἑνὸς ἑκάστου πεπερασμένου στοιχείου τὰ δὲ διανύσματα $\{Ho\}$ καὶ $\{Q\}$ καθορίζονται ὑπὸ τῶν ἀρχικῶν συνθηκῶν καὶ τῶν ὁριακῶν τοιούτων.

Ἡ ἐλαχιστοποίησις τῆς ἀνωτέρω συναρτήσεως Ωt (H) προκύπτει διὰ μηδενισμοῦ τῶν παραγώγων αὐτῆς ὡς πρὸς τὰς γενικευμένας συντεταγμένας τοῦ διανύσματος H. Οὕτω καταλήγομεν εἰς τὸ κατωτέρω σύστημα γραμμικῶν ἐξισώσεων:

$$[D]\{H\} + [AA]\cdot\{H\} = [D]\{Ho\} + \{Q\} \qquad (22)$$

τοῦ ὁποίου ἡ ἐπίλυσις ὡς πρὸς $\{H\}$ δίδει τὸ πιεζομετρικὸν ὕψος εἰς ἕκαστον πεπερασμένον στοιχεῖον τοῦ πεδίου δοθέντος ὅτι τὰ μητρῶα [D] καὶ [AA] ὡς καὶ τὰ διανύσματα $\{Ho\}$ καὶ $\{Q\}$ εἶναι γνωστά.

Οὕτω, λαμβανομένου τοῦ $\{H\}$ ἐκ τῆς ἐπιλύσεως τοῦ συστήματος (22) διὰ τὴν χρονικὴν στιγμὴν $t - \Delta t$ προκύπτει τὸ $\{H\}$ διὰ τὴν χρονικὴν στιγμὴν t ἐκ τῆς ἐπιλύσεως τοῦ κατωτέρω συστήματος:

$$[D]\{H(t)\} + [AA]\{H(t)\} = [D]\{H(t-\Delta t\} + \{Q\} \qquad (23)$$

2. 4. Διαδοχικαὶ φάσεις ὑπολογισμοῦ.

Αἱ διάφοροι φάσεις ὑπολογισμοῦ κατὰ τὴν ἀνωτέρω μέθοδον εἶναι αἱ ἀκόλουθοι:

2. 4. 1. Κατάταξις τῶν δεδομένων.

α. Περιγραφὴ τοῦ πορώδους μέσου, ἤτοι:
- Γεωμετρία αὐτοῦ
- Φυσικὰ χαρακτηριστικὰ
- Ὑδροδυναμικὰ χαρακτηριστικὰ

β. Ὁριακαὶ συνθῆκαι, ἤτοι:
- Παροχὴ δεδομένη
- Ὑψομετρικὸν ὕψος δεδομένον

γ. Συνθῆκαι συναρτήσει τοῦ χρόνου, ἤτοι:
- Ἀρχικαὶ συνθῆκαι
- Ἐνδιάμεσοι καταστάσεις

2. 4. 2. Ὑπολογισμὸς μητρώων.

Θεωροῦμεν τὰ διαδοχικὰ πεδία S. Τὸ πρῶτον πεδίον So δὲν περιέχει οὐδὲν στοιχεῖον καὶ ἑπομένως τὸ μητρῶον [ACo] ἐξαρτᾶται μόνον ἀπὸ τὰς ὁριακὰς συνθήκας ἐπὶ τῆς ἀρχικῆς ὁριακῆς γραμμῆς Γο. Ἡ προσάρτησις τοῦ πρώτου πεπερασμένου στοιχείου προσδιορίζει τὸ μητρῶον $[AC_1]$, τὸ ὁποῖον ἀντικαθιστᾷ τὸ μητρῶον [ACo].

Τὰ χαρακτηριστικὰ στοιχειώδη μητρῶα ἑνὸς ἑκάστου τῶν πεπερασμένων στοιχείων [ΑΕ] ὡς καὶ τὰ μητρῶα μετασχηματισμοῦ εὑρίσκονται μονίμως ἐναποθηκευμένα εἰς τὴν μνήμην τοῦ ἠλεκτρονικοῦ ὑπολογιστοῦ καθ' ὅλην τὴν διάρκειαν τοῦ ὑπολογισμοῦ.

2. 4. 3. Διανυσματικὸς ὑπολογισμός.

Ὁ ὑπολογισμὸς οὗτος γίνεται εἰς τρεῖς βαθμίδας ἤτοι :

α. Ὑπολογισμὸς προσδιορισμοῦ τῶν διαδοχικῶν πεπερασμένων στοιχείων καὶ τῶν διανυσμάτων $\{Q_{on+1}\}$, τὰ ὁποῖα ἀντικαθιστοῦν εἰς ἕκαστον βῆμα τὰ $\{Q_{on}\}$.

β. Ὑπολογισμὸς τῶν τιμῶν τῶν πιεζομετρικῶν ὑψῶν (δυναμικόν).

γ. Ὑπολογισμὸς τῶν παροχῶν εἰς ἕκαστον πεπερασμένον στοιχεῖον καὶ τῶν πιεζομετρικῶν ὑψῶν εἰς τὸ κέντρον ἑκάστου ἐξ αὐτῶν δι' ἑκάστην χρονικὴν στιγμὴν βάσει καὶ τῶν ἀρχικῶν συνθηκῶν.

3. ΒΑΣΙΚΑΙ ΔΙΑΦΟΡΑΙ ΤΗΣ ΜΕΘΟΔΟΥ ΤΩΝ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΩΝ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ ΚΑΙ ΤΗΣ ΜΕΘΟΔΟΥ ΤΩΝ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΩΝ ΔΙΑΦΟΡΩΝ

Ἂν καὶ αἱ μέθοδοι τῶν πεπερασμένων διαφορῶν καὶ τῶν πεπερασμένων στοιχείων εἶναι δύο μέθοδοι ἀριθμητικῆς ἐπιλύσεως τοῦ συστήματος ἐξισώσεων μερικῶν παραγώγων, ἐν τούτοις, αὗται διαφέρουν οὐσιαστικῶς τόσον ὡς πρὸς τὴν δομήν των ὅσον καὶ ἀπὸ φυσικῆς καὶ ἀριθμητικῆς ἀπόψεως.

α. Φυσικὴ ἄποψις.

Ἡ συνέχεια τῶν πιέσεων ἐξασφαλίζεται ἐντὸς τοῦ ὑδροφόρου ὁρίζοντος διὰ τῆς μεθόδου τῶν πεπερασμένων στοιχείων, γεγονὸς τὸ ὁποῖον ἐπιτρέπει νὰ ἀντιμετωπισθοῦν σημαντικαὶ μεταβολαὶ τῆς παραμέτρου Τ χωρὶς νὰ τεθῇ ἐν κινδύνῳ ἡ ἰσχὺς τῆς μεθόδου. Τοῦτο παρουσιάζει μέγα ἐνδιαφέρον εἰς τὴν περίπτωσιν ἑτερογενοῦς μέσου, εἰς προβλήματα ἀνισοτρόπου μέσου, κ.λ.π.

β. Ἀριθμητικὴ ἄποψις.

Διὰ τῆς χρησιμοποιήσεως τῆς μεθόδου ἐλαχιστοποιήσεως παρακάμπτονται τὰ προβλήματα ἀριθμητικῆς συγκλίσεως ὡς καὶ οἱ κίνδυνοι ἀσταθείας τῆς λύσεως ὀφειλόμεναι εἰς τὰς γενομένας ὑποδιαιρέσεις τοῦ χρόνου καὶ τοῦ χώρου. Τὸ γεγονὸς τοῦτο ἑρμηνεύεται ὡς μέγα κέρδος χρόνου ὑπολογισμοῦ εἰς τὸν ὑπολογιστὴν ἰδίως δὲ εἰς περιπτώσεις ἐπιλύσεως προβλημάτων μακρᾶς χρονικῆς περιόδου.

Γενικῶς ἡ μέθοδος αὕτη ἐπιλύσεως τοῦ προβλήματος εἶναι ἁπλουστέρα καὶ ἀκριβεστέρα καὶ τὸ γεγονὸς ὅτι δὲν προκύπτει ἡ ἀνάγκη ἀντιστροφῆς μητρώων μεγάλων διαστάσεων προσδίδει εἰς αὐτὴν ἀποτελεσματικότητα καὶ μεγάλην ἐλαστικότητα χρήσεως.

Τέλος ἡ δυνατότης χρησιμοποιήσεως τυχαίων πεπερασμένων στοιχείων ἐπιτρέπει τὴν καλυτέραν προσαρμογὴν εἰς τὴν γεωμετρίαν τοῦ μελετωμένου πεδίου καὶ τὸν ὀρθώτερον ποιοτικὸν καθορισμὸν τῶν ὁρίων αὐτοῦ. Πράγματι ἐὰν καὶ εἰς τὸ ἐξετασθὲν παράδειγμα ἐλήφθησαν στοιχεῖα ὀρθογωνικῆς μορφῆς διὰ τὴν ἁπλοποίησιν τῶν ὑπολογισμῶν, ἐν τούτοις, ἡ μέθοδος δύναται νὰ ἐφαρμοσθῇ καὶ δι' ἕτερα στοιχεῖα τυχούσης γεωμετρικῆς μορφῆς.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

DAGAN, G. 1964.— Second order linearized theory of free surface flow in porous media. *La Houille Blanche,* No 8.

ECKAUS, W. 1963.— Problèmes non linèaires de stabilité dans un espace à deux dimensions. *Journal de Mècanique,* **II**, No 2.

GIRERD - KARPLUS, 1968.— Traitement des équations différentielles sur calculateurs electroniques. Gauthier - Villars.

JAQUARD, P. 1963.— Calcul numérique de déplacement de fronts. *Paper 7 presented at the Sixth W. P. C. in Francfort/Main,* June.

KORDAS BOLESLAW 1964.— Evolution de la nappe phréatique due aux variations du niveau d'eau dans le bassin contigu. *C. R. Academie des Sciences-Paris,* t. 259.

POLUBARINOVA - COCHINA, 1962.—Theory of ground water movement. Princeton University Press.

REMSON, J. - HORNBERGER, G. - MOLZ, F. 1971.— Numerical Methods in Subsurfaee Hydrology : with an Introduction to the Finite Element Method.

OUTMANS, H. D. 1963.— On unique solutions for steady-state fingering in a porous medium. *Journal of Geophysical Research,* **68**, No 20.

VITALIE PIETRARU.— Contribution à l'étude des inflitration non permanentes à niveau libre. *Institut des Recherches Hydrotechniques,* Bucarest - Roumanie.