ΕΠΙ ΤΟΥ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ ΤΗΣ ΑΝΑΣΧΕΣΕΩΣ ΠΛΗΜΜΥΡΩΝ *

ΥΠΟ

Π. ΚΑΡΑΚΑΤΣΟΥΛΗ **

Σύνοψις. Τὸ πρόβλημα τῆς ἀναζητήσεως τοῦ βελτίστου, οἰκονομικοτεχνικῶς, συνδυασμοῦ τῶν διαστάσεων τοῦ ὑπερχειλιστοῦ ἀφ' ἑνὸς καὶ τοῦ καθορισμοῦ τοῦ τελικοῦ ὑψομέτρου τῆς στέψεως τοῦ φράγματος ἢ ἀναχώματος ἀφ' ἑτέρου συνδέεται ἄμεσα πρὸς τὴν ἀκριβῆ ἐπίλυσιν τοῦ προβλήματος τῆς ἀνασχέσεως τῶν πλημμυρῶν. Τὸ αὐτὸ ἰσχύει, ὡς γνωστόν, καὶ διὰ τὴν διαστασιολόγησιν τῶν σηράγγων ἐκτροπῆς τῶν ποταμῶν.

Δεδομένου ὅτι, πέραν τῶν δυσχερειῶν τῆς μαθηματικῆς ἀναλύσεως, διὰ τὴν ἐπίλυσιν τῆς διαφορικῆς ἐξισώσεως τοῦ προβλήματος τῆς ἀνασχέσεως, προκύπτει θέμα μαθηματικῆς ὁλοκληρώσεως τῶν συναρτήσεων αὐτῆς, αἵτινες εἰς τὴν πρᾶξιν δίδονται ἐκπεφρασμέναι διὰ τῶν ἀριθμητικῶν τιμῶν αὐτῶν, καθίσταται προφανές, ὅτι μόνον διὰ τῆς χρησιμοποιήσεως τῶν συγχρόνων μεθόδων τῆς ἀριθμητικῆς ἀναλύσεως ὡς καὶ τῶν ἠλεκτρονικῶν ὑπολογιστῶν δύναται νὰ προσδιορισθῇ ἡ ἀκριβὴς λύσις τοῦ προβλήματος τούτου.

Ἡ ἐπίλυσις τῆς διαφορικῆς ἐξισώσεως τῆς ἀνασχέσεως ἐπιτυγχάνεται ἐπὶ τοῦ προκειμένου, διὰ τῆς χρησιμοποιήσεως τῆς κλασσικῆς μεθόδου RUNGE - KUTTA, σημειοῦντες ὅτι ὑπὸ τὴν ὀνομασίαν αὐτὴν νοεῖται ἓν σύνολον μεθόδων, διαδοχικῶν βημάτων, βασιζομένων ἐπὶ κοινῆς ἀρχῆς. Οὕτω, πρὸς γενικὴν θεώρησιν, ἐκτίθενται, πρὸ τῆς ἀναπτύξεως τῆς μεθόδου RUNGE - KUTTA, διὰ τὴν περίπτωσιν μιᾶς διαφορικῆς ἐξισώσεως 1ης τάξεως, αἱ μέθοδοι τῆς ἐφαπτομένης καὶ τῶν EULER - CAUCHY.

Θεωρουμένου τοῦ σφάλματος ὑπολογισμοῦ ὡς ἀμελητέου καὶ δεδομένου ὅτι ἡ θεωρητικὴ ἐκτίμησις τοῦ σφάλματος τῆς μεθόδου, ἐπὶ ἑνὸς βήματος, εἶναι ἰδιαιτέρως πολύπλοκος, δίδεται, ἐπὶ τούτοις, μία πρακτικὴ ἐκτίμησις αὐτοῦ τοῦ σφάλματος, τὸ ὁποῖον ἄλλωστε εἶναι πολὺ μικρόν.

Διὰ τὴν ἐφαρμογὴν τῆς μεθόδου RUNGE - KUTTA δίδεται ἐπίσης τὸ ὀργανόγραμμα τοῦ κυρίου προγράμματος ὡς καὶ τοῦ σχετικοῦ ὑποπρογράμματος. Δίδονται ἐπίσης βασικὰ στοιχεῖα διὰ τὸν ὑπολογισμὸν τῆς συναρτήσεως τῆς 1ης παραγώγου.

Ὑπὸ μορφὴν παραδείγματος δίδονται, εἰς τὸ τέλος τῆς παρούσης ἐργασίας, τὰ ἐπιτευχθέντα ἀποτελέσματα διὰ τοῦ ἠλεκτρονικοῦ ὑπολογιστοῦ, διὰ τὴν συγκεκριμένην περίπτωσιν ἑνὸς φράγματος ἐφωδιασμένου δι' ὑπερχειλιστοῦ πλημμυρῶν.

Résumé. Le problème de la recherche du dimensionnement optimal, au point de vue économique et technique, de l'évacuateur des crues d'une part et de la côte définitve de la crête d'un barrage d'autre part, est lié, directement, à la résolution précise du problème du laminage des crues. De même, ceci est valable pour le dimensionnement optimal des galeries de dérivation des rivières.

En dehors des difficultés de l'analyse mathématique pour la résolution de l'équation differentielle du problème du laminage des crues, il y a question d'intégration mathématique de ses fonctions, qui, dans la pratique, sont données par leurs valeurs numériques (fonctions explicites). Il devient donc évident que

* P. KARAKATSOULIS — Sur la problème du laminage des crues.

** Ἐπικουρικὸς Καθηγητὴς τῆς Ἀνωτάτης Γεωπονικῆς Σχολῆς Ἀθηνῶν (Ἕδρα Γεωργικῆς Ὑδραυλικῆς).

la résolution exacte de ce problème peut être obtenue, seulement, par l'utilisation des ordinateurs, et des méthodes récentes de calcul numérique.

Ainsi, la résolutton de l' équation differentielle est obtenue à l'aide de la méthode classique de RUNGE - KUTTA en désignant sous ce nom, un ensemble de méthodes à pas séparés, reposant sur un principe commun.

A titre préliminaire sont exposées les méthodes de la tangente et d'EULER-CAUCHY, avant d'aborder la méthode de RUNGE - KUTTA dans le cas d'une équation du ler ordre.

A la fin de l'exposé de la méthode, sans insister sur l'évaluation théorique de l'erreur de la méthode, sur un pas, ce qui est d'ailleurs assez compliqué, on donne une évaluation pratique de l'erreur qui est, comme connu, très petite. On suppose, bien entendu, que l'erreur de calcul est négligeable.

On présente, également, l'organigramme du programme principal et du sous-programme pour l'application de la méthode de RUNGE - KUTTA ainsi que les élements pratiques pour le calcul de la fonction de la lère dérivée.

A titre d'exemple sont donnés, à la fin du présent, les résultats obtenus par l'ordinateur pour un cas concret d'un barrage muni d'un évacuateur des crues.

1. ΓΕΝΙΚΑ

Αἱ πλημμύραι τῶν μικρῶν ἢ μεγάλων λεκανῶν ἀπορροῆς εἶναι συννήθως ὑψηλαὶ καὶ τίθεται θέμα ὑπολογισμοῦ τῶν καταλλήλων διαστάσεων τῶν ἔργων ἀσφαλείας τῶν φραγμάτων, ἀναχωμάτων κ.λ.π.

Τὰ ἔργα ἀσφαλείας συνίστανται, κυρίως, ἐξ' ἑνὸς ὑπερχειλιστοῦ, διὰ τὴν ἀπορροὴν τῶν ὑδάτων τῆς πλημμύρας, ὅστις, πολλάκις, πρὸς ἀποφυγὴν διαβρώσεων, ἀκολουθεῖται ὑπὸ μιᾶς διώρυγος φυγῆς, ἥτις, κατὰ κανόνα, ἀπολήγει εἰς λεκάνην ἠρεμίας (μετατροπὴ τῆς χειμαρρώδους ροῆς εἰς ποταμίαν).

Βεβαίως, δὲν εἶναι ἀπαραίτητον νὰ σχεδιασθῇ ὁ ὑπερχειλιστὴς διὰ τὴν παροχὴν αἰχμῆς τῆς μεγίστης πλημμύρας, δοθέντος ὅτι τμῆμα τοῦ εἰσρέοντος ὄγκου πλημμύρας ἐναποθηκεύεται ἐντὸς τοῦ ταμιευτῆρος τοῦ φράγματος ἢ τοῦ ἀναχώματος.

Οὕτω, προκύπτει τὸ πρόβλημα τῆς ἀναζητήσεως τοῦ βελτίστου, οἰκονομικοτεχνικῶς, συνδυασμοῦ τῶν διαστάσεων τοῦ ὑπερχειλιστοῦ ἀφ' ἑνὸς καὶ τοῦ ὕψους ἀνασχέσεως ἀφ' ἑτέρου.

Διὰ τὴν ὀρθὴν λύσιν τοῦ προβλήματος τούτου ἀπαιτεῖται ἡ ἀκριβὴς ἐπίλυσις τοῦ προβλήματος τῆς ἀνασχέσεως, τὴν ὁποίαν διαπραγματευόμεθα κατωτέρω χρησιμοποιοῦντες τὰ τελευταῖα μέσα, τὰ ὁποῖα προσφέρει σήμερον ἡ τεχνολογικὴ ἐξέλιξις, ἤτοι τοὺς ἠλεκτρονικοὺς ὑπολογιστάς.

Σημειοῦται, ἐν παρενθέσει, ὅτι ἡ μελέτη τῆς ἀνασχέσεως, ὡς ἐκτίθεται κατωτέρω, ἀποβαίνει χρήσιμος οὐχὶ μόνον διὰ τὴν μελέτην τῶν ὑπερχειλιστῶν πλημμυρῶν, ἀλλὰ καὶ διὰ τὴν ἐνδεδειγμένην διαστασιολόγησιν τῶν σηράγγων ἐκτροπῆς ποταμῶν καὶ τοῦ ὕψους τῶν κατασκευασθησομένων πρὸς τούτοις προφραγμάτων.

2. ΔΙΑΦΟΡΙΚΗ ΕΞΙΣΩΣΙΣ ΑΝΑΣΧΕΣΕΩΣ

Ἔστω ὁ ταμιευτὴρ τοῦ Σχ. 1, ἔνθα, διὰ μίαν χρονικὴν στιγμὴν t, ἡ στιγμιαία παροχὴ πλημμύρας εἶναι $Q_\pi(t)$, ἡ στιγμιαία παροχὴ ὑπερχειλίσεως εἶναι $Q_\upsilon(z)$, ἡ στάθμη τῆς ἐλευθέρας ἐπιφανείας τοῦ ὕδατος εἶναι $z(t)$ τὸ δὲ ἀντίστοιχον ἐμβαδὸν αὐτῆς εἶναι $A(z)$.

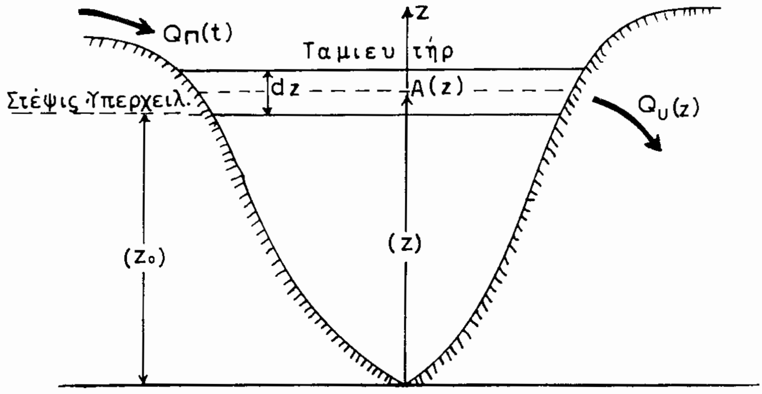
Ἐκ τῆς ἐξισώσεως συνεχείας προκύπτει ὅτι

$$Q_\pi(t)\,dt = A(z)\,dz + Q_\upsilon(z)\,dt, \tag{1}$$

ἐξ οὗ

$$\frac{dz}{dt} = \frac{Q_\pi(t) - Q_\upsilon(z)}{A(z)} \tag{2}$$

Ἡ ἐξεύρεσις ἀναλυτικῆς λύσεως τῆς ἀνωτέρω ἐξισώσεως, πέραν τῶν μαθηματικῶν δυσχερειῶν, παρουσιάζει τὴν πρόσθετον δυσκολίαν ὅτι, εἰς τὴν πρᾶξιν, τὸ μὲν ὑδρογράφημα τῆς πλημμύρας προκύπτει εἴτε ἀμέσως ἐκ τῶν δεδομένων



Σχ. 1.

τῶν παρατηρήσεων, εἴτε ἐμμέσως διὰ μεγιστοποιήσεως αὐτῶν βάσει τῶν γνωστῶν στατιστικῶν μεθόδων. Οὕτω εἶναι πρακτικῶς ἀδύνατος ἡ μαθηματικὴ ἀναλυτικὴ ἔκφρασις τοῦ ὑδρογραφήματος τῆς πλημμύρας.

Ὁμοίως, ἡ συνάρτησις τοῦ ἐμβαδοῦ τῆς ἐπιφανείας $A(z)$, ἥτις προκύπτει ἐξ ἐμβαδομετρήσεως τῶν περικλειομένων ἐπιφανειῶν ἐντὸς ἰσοϋψῶν καμπυλῶν τοῦ τοπογραφικοῦ χάρτου, δὲν εἶναι δυνατὸν νὰ ἐκφρασθῇ δι᾽ ἀναλυτικοῦ τύπου.

Πρὸς τούτοις, εἴμεθα ὑποχρεωμένοι νὰ προσφύγωμεν ἢ εἰς προσεγγιστικὰς γραφικὰς μεθόδους ὁλοκληρώσεως ὡς π. χ. ἡ γνωστὴ μέθοδος τοῦ Blackmore ἢ εἰς ἀκριβεστέρας μεθόδους τῆς ἀριθμητικῆς ἀναλύσεως, ὡς κατωτέρω.

3. ΜΕΘΟΔΟΣ ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΕΩΣ ΚΑΤΑ RUNGE - KUTTA

Πολλάκις, τὸ πρόγραμμα τοῦ ἠλεκτρονικοῦ ὑπολογιστοῦ, διὰ τὸν ὑπολογισμὸν τῆς ἀνασχέσεως, συνδυάζεται πρὸς τὸ πρόγραμμα ὑπολογισμοῦ τῆς ἀνομοιομόρφου ροῆς ἐντὸς τῆς διώρυγος φυγῆς τοῦ ἔργου ὑπερχειλίσεως ἢ ἐντὸς τῆς σήραγγος ἐκτροπῆς· πρὸς τούτοις, κρίνεται σκόπιμος ἡ σύνταξις ὑποπρογράμματος ἐπιλύσεως διαφορικῶν ἐξισώσεων, τὸ ὁποῖον νὰ εἶναι κοινὸν δι' ὅλα τὰ ὡς ἄνω ὑδραυλικὰ προβλήματα.

Αἱ βασικαὶ μέθοδοι ἀριθμητικῆς ἐπιλύσεως τῶν διαφορικῶν ἐξισώσεων συνίστανται εἰς τὸν διαδοχικὸν προσδιορισμὸν τῶν τιμῶν τῆς ζητουμένης συναρτήσεως z_1, z_2, ... , z_i , z_{i+1}, ... , διὰ διαφόρους χρονικὰς στιγμὰς t_1, t_2, ... t_i , t_{i+1}, ... , δοθέντος ὅτι διὰ τὴν χρονικὴν στιγμὴν t_0 τυγχάνει γνωστὴ ἡ τιμὴ τῆς συναρτήσεως z_0 (z_0 = στάθμη στέψεως ὑπερχειλιστοῦ διὰ τὴν χρονικὴν στιγμὴν $t_0 = 0$) ὡς καὶ ἡ τιμὴ τῆς ἐφαπτομένης (z') δι' ἑκάστην χρονικὴν στιγμὴν t, ἤτοι,

$$z' = Z(z, t) = \frac{Q_\pi(t) - Q_\upsilon(z)}{A(z)} \tag{3}$$

Ἡ συνάρτησις $Q_\upsilon(z)$ διὰ μὲν τὴν περίπτωσιν ὑπερχειλιστοῦ δίδεται ἐκ τῆς σχέσεως,

$$Q_\upsilon(z) = C\sqrt{2g}\, L\, (z - z_0)^{3/2} \tag{4}$$

ἔνθα,

C = ὁ σταθερὸς συντελεστὴς ὑπερχειλίσεως

g = ἡ ἐπιτάχυνσις τῆς βαρύτητος

L = τὸ ὁλικὸν μῆκος τῆς στέψεως τοῦ ὑπερχειλιστοῦ,

διὰ δὲ τὴν περίπτωσιν σήραγγος ἐκτροπῆς ἢ ἐκκενώσεως ἐκ τῆς σχέσεως,

$$Q_\upsilon(z) = E(z)\, V(z) \tag{5}$$

ἔνθα,

E (z) = ἡ βρεχομένη ἐπιφάνεια τῆς σήραγγος

V (z) = ἡ μέση ταχύτης ροῆς.

Εἰς περίπτωσιν χρησιμοποιήσεως τοῦ συνήθως ἐφαρμοζομένου εἰς τὰς περιπτώσεις αὐτὰς τύπου τοῦ Manning, ἡ ταχύτης V (z) δίδεται ἐκ τῆς σχέσεως,

$$V(z) = K\, R^{2/3}(z) \cdot J^{1/2}(z) \tag{6}$$

ἔνθα,

K = ὁ σταθερὸς συντελεστὴς τραχύτητος

R (z) = ἡ συνάρτησις τῆς ὑδραυλικῆς ἀκτῖνος

J (z) = ἡ συνάρτησις τῆς κλίσεως τῆς γραμμῆς ἐνεργείας.

Κατὰ τὴν ἀριθμητικὴν ὁλοκλήρωσιν τῆς διαφορικῆς ἐξισώσεως αἱ διαφοραὶ $t_1 - t_0$, $t_2 - t_1$, ... $t_{i+1} - t_i$ = ..., ἐκλέγονται σταθεραὶ καὶ ἴσαι πρὸς μίαν μικρὰν ποσότητα h καλουμένην ἐφ' ἑξῆς βῆμα τῆς ἀριθμητικῆς ὁλοκληρώσεως, ἤτοι:

$$t_1 - t_0 = t_2 - t_1 = \ldots\ldots = t_{i+1} - t_i = \ldots\ldots = h \qquad (7)$$

Ἡ ἐπιλογὴ τοῦ καταλλήλου h γίνεται συνήθως βάσει κτηθείσης ἐμπειρίας εἰς τρόπον ὥστε ἀναλόγως τῆς χρησιμοποιουμένης ἀριθμητικῆς μεθόδου νὰ ἐλαχιστοποιῆται τὸ σφάλμα τῆς προσεγγιστικῆς ὁλοκληρώσεως.

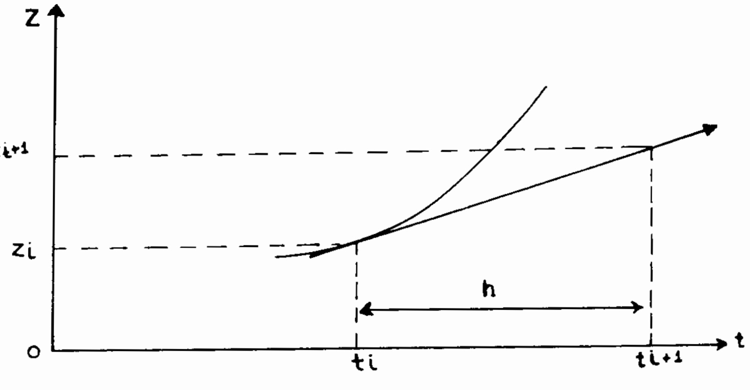
Μία πρώτη μέθοδος ἀριθμητικῆς ὁλοκληρώσεως εἶναι ἡ καλουμένη μέθοδος τῆς ἐφαπτομένης, ὅπου ἡ τιμὴ τῆς ζητουμένης συναρτήσεως z_{i+1} προκύπτει ἐκ τῆς τιμῆς z_i τοῦ προηγουμένου γειτονικοῦ σημείου ἐκ τῆς σχέσεως,

$$z_{i+1} = z_i + h\, Z_i \qquad (8)$$

ἔνθα,

$$Z_i = Z(z_i, t_i)$$

Ἡ μέθοδος αὔτη δύναται νὰ παρασταθῇ γραφικῶς διὰ τοῦ κατωτέρω σχ. 2.



Σχ. 2.

Τὸ σφάλμα τῆς μεθόδου δι' ἕκαστον βῆμα, βάσει τοῦ ἀναπτύγματος τοῦ TAYLOR, δίδεται ἐκ τῆς σχέσεως

$$z_{i+1} - z_i(t_{i+1}) = \frac{-h^2}{2}\, z''(\xi) \qquad (9)$$

ἔνθα, $t_i < \xi < t_{i+1}$ καὶ $z_i(t_{i+1})$ ἡ ἀληθὴς τιμὴ τῆς συναρτήσεως.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω ἐμφαίνεται ἡ μικρὰ ἀκρίβεια τῆς ὡς ἄνω μεθόδου.

Μίαν βελτίωσιν τῆς ὡς ἄνω μεθόδου ἀποτελεῖ ἡ γνωστὴ μέθοδος τῶν EULER - CAUCHY, ἥτις βασίζεται εἰς τὴν παρατήρησιν ὅτι ἐπὶ ἑνὸς μικροῦ τόξου τῆς ζητουμένης καμπύλης, ἡ κλίσις τῆς χορδῆς προσεγγίζει, αἰσθητῶς, τὸν ἀριθμητικὸν μέσον ὅρον τῶν κλίσεων τῶν ἐφαπτομένων εἰς τὰ ἄκρα τοῦ τόξου.

Βεβαίως, δὲν εἶναι δυνατὸν νὰ γνωρίζωμεν τὴν ἀκριβῆ τιμὴν τῆς ἐφαπτομένης εἰς τὸ σημεῖον $t_i + h$, ἀλλὰ προσδιορίζομεν ταύτην, προσεγγιστικῶς, ἐκ τῶν κάτωθι σχέσεων, ὡς ἐμφαίνεται καὶ εἰς τὸ σχ. 3.

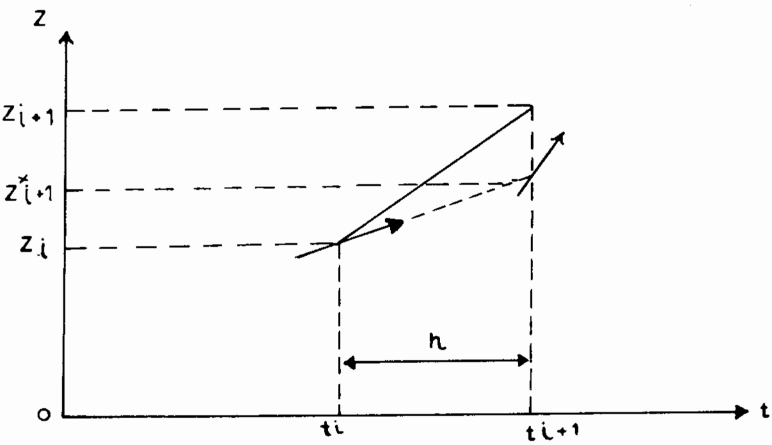
$$z^*_{i+1} = z_i + h\, Z_i \tag{10}$$

$$Z^*_{i+1} = Z\,(z^*_{i+1}, t_{i+1}) \tag{11}$$

καὶ τελικῶς

$$z_{i+1} = z_i + h \frac{Z_i + Z^*_{i+1}}{2} \tag{12}$$

Ἅπασαι αἱ ἀνωτέρω ἐκτεθεῖσαι μέθοδοι ἀποτελοῦν εἰδικὰς τοιαύτας τῆς γενικευμένης μεθόδου τοῦ RUNGE - KUTTA, τὴν ὁποίαν θὰ χρησιμοποιήσωμεν, διὰ τὴν ὁλοκλήρωσιν τῆς διαφορικῆς ἐξισώσεως τοῦ προβλήματος τῆς ἀνασχέσεως.



Σχ. 3.

Ἡ κλασσικὴ μέθοδος τοῦ RUNGE - KUTTA τετάρτης τάξεως, ἥτις δίδει λίαν ἱκανοποιητικὰ ἀποτελέσματα ἀπὸ ἀπόψεως ἀκριβείας, συνίσταται εἰς τὴν ἐκτέλεσιν τῶν κάτωθι μερικῶν ὑπολογισμῶν δι' ἕκαστον βῆμα ὁλοκληρώσεως.

$$\begin{aligned} z_{i,1} &= z_i + \frac{h}{2} Z_i \\ Z_{i,1} &= Z\left(z_{i,1}, t_i + \frac{h}{2}\right) \end{aligned} \tag{13}$$

$$
\left.\begin{aligned}
z_{i,2} &= z_i + \frac{h}{2} Z_{i,1} \\
Z_{i,2} &= Z\left(z_{i,2},\, t_i + \frac{h}{2}\right)
\end{aligned}\right\} \tag{14}
$$

$$
\left.\begin{aligned}
z_{i,3} &= z_i + h\, Z_{i,2} \\
Z_{i,3} &= Z\left(z_{i,3},\, t_i + h\right)
\end{aligned}\right\} \tag{15}
$$

ἐξ ὧν, τελικῶς, προκύπτει ἡ τελικὴ τιμὴ z_{i+1}, ἐκ τῆς σχέσεως,

$$
z_{i+1} = z_i + h \frac{Z_i + 2Z_{i,1} + 2Z_{i,2} + Z_{i,3}}{6} \tag{16}
$$

Τὸ σφάλμα δι' ἕκαστον βῆμα ὁλοκληρώσεως δύναται νὰ ὑπολογισθῇ πρακτικῶς ἐκ τῆς κατωτέρω σχέσεως,

$$
-\frac{h}{20}\left(Z_{i+1} + 9Z_i + 9Z_{i-1} + Z_{i-2}\right) + \frac{11z_{i+1} + 27z_i - 27z_{i-1} - 11z_{i-2}}{60} \tag{17}
$$

Κατόπιν τῶν ἀνωτέρω προβαίνομεν εἰς τὴν κατάρτισιν τοῦ κυρίου προγράμματος ὡς καὶ τοῦ ὑποπρογράμματος ὑπολογισμοῦ κατὰ RUNGE - KUTTA ὡς κατωτέρω.

Α. ΚΥΡΙΟΝ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ :

ΕΙΣΟΔΟΣ ΔΕΔΟΜΕΝΩΝ

$c,\ g,\ L,\ z_0,\ h,\ H$

$Q_\pi(t)$: σημεῖα (Q_i, T_i) διὰ $i = 1, \ldots n$

$A(z)$: σημεῖα $(A_i, z_\alpha(i))$ διὰ $i = 1, \ldots m$

↓

ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΑΡΧΙΚΩΝ ΣΥΝΘΗΚΩΝ

$t = t_0 = 0, \quad z = z_0$

↓

ΚΛΗΣΙΣ ΥΠΟΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΟΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΥ ΚΑΤΑ RUNGE - KUTTA

RUNG (F, h)

↓

ΓΡΑΦΗ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΩΝ

ΚΑΤΑ ΕΠΙΛΕΓΕΝ ΒΗΜΑ $H > h$

B. ΥΠΟΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΕΩΣ ΚΑΤΑ Runge - Kutta

RUNG (F, h)

$$K = Tn/h$$

$$I = 0$$

$$Z_0 = F(t_i, z_i)$$

$$t_{i+1} = t_i + h$$

$$Z_1 = F\left(t_i + \frac{h}{2},\ z_i + \frac{h}{2} Z_0\right)$$

$$Z_2 = F\left(t_i + \frac{h}{2},\ z_i + \frac{h}{2} Z_1\right)$$

$$Z_3 = F\left(t_{i+1},\ z_i + h Z_2\right)$$

$$z_{i+1} = z_i + \frac{h}{6}(Z_0 + 2Z_1 + 2Z_2 + Z_3)$$

$$I = I + 1$$

ΟΧΙ — $I \overset{?}{=} K$ — ΝΑΙ

ΕΠΙΣΤΡΟΦΗ ΕΙΣ ΚΥΡΙΟΝ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ

Γ. ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΤΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΣ F ΤΟΥ ΥΠΟΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΟΣ RUNG (F, h)

Ἡ συνάρτησις F ὑπολογίζεται ἐκ τῆς σχέσεως

$$F(t_i, z_i) = \frac{Q_\pi(t_i) - C\sqrt{2g}\ L\ (z_i - z_0)^{3/2}}{A(z_i)} \qquad (18)$$

Δοθέντος ὅτι αἱ συναρτήσεις $Q_\pi(t)$ καὶ $A(z)$ ἐδόθησαν δι᾽ ἐκπεφρασμένων τιμῶν μεμονωμένων σημείων πλήθους n καὶ m ἀντιστοίχως προκύπτει θέμα παρεμβολῆς, διὰ τὸν προσδιορισμὸν ἐνδιαμέσων τιμῶν $Q_\pi(t_i)$ καὶ $A(z_i)$ εἰς τὴν περίπτωσιν ἔνθα αἱ τιμαὶ t_i καὶ z_i κεῖνται μεταξὺ δύο δεδομένων σημείων ἤτοι $T_\varkappa < t_i < T_{\varkappa+1}$ ἢ $z\alpha_\varkappa < z_i < z\alpha_{\varkappa+1}$.

Βεβαίως, βάσει τῶν συγχρόνων ἀντιλήψεων τῆς ἀριθμητικῆς ἀναλύσεως, αἱ συναρτήσεις, αἵτινες δίδουν τὰ καλύτερα ἀποτελέσματα εἰς τὴν παρεμβολὴν εἶναι αἱ splines functions, ἀλλὰ διὰ τὴν παροῦσαν περίπτωσιν καὶ ἡ ἁπλουστέρα μορφὴ τῆς παραβολικῆς παρεμβολῆς δίδει ἱκανοποιητικὰ ἀποτελέσματα. Οὕτω, διὰ τιμὴν τοῦ t_i, $T_\varkappa < t_i < T_{\varkappa+1}$ προσδιορίζομεν τοὺς συντελεστὰς

$$\alpha_1 = \frac{Q\pi_\kappa - Q\pi_{\kappa+1}}{T_\kappa - T_{\kappa+1}}$$

$$\alpha_2 = \frac{Q\pi_\kappa - Q\pi_{\kappa+2}}{T_\kappa - T_{\kappa+2}} \qquad (19)$$

καὶ

$$\alpha = \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{T_{\kappa+1} - T_{\kappa+2}}$$

$$\beta = \alpha_1 - \alpha\,(T_\kappa + T_{\kappa+1}) \qquad (20)$$

$$\gamma = Q\pi_\kappa - T_\kappa\,(\alpha\, T_\kappa + \beta),$$

ὅτε ἡ τιμὴ τοῦ $Q_\pi(t_i)$ δίδεται ἐκ τῆς σχέσεως

$$Q_\pi(t_i) = T_i\,(\alpha\, T_i + \beta) + \gamma \qquad (21)$$

Ὁμοίως προκύπτει ἀνάλογος σχέσις διά τινα τιμὴν ἐνδιάμεσον τοῦ $A(z_i)$.

Ἐφαρμογή:

Κατωτέρω δίδεται μία ἐφαρμογὴ τῆς ἐκτεθείσης μεθόδου διὰ φρᾶγμα, τοῦ ὁποίου τὰ χαρακτηριστικὰ τοῦ ὑπερχειλιστοῦ αὐτοῦ ἔχουν ὡς κατωτέρω:

— Ὑψόμετρον στέψεως ὑπερχειλιστοῦ + 174,50 μ.

— Μῆκος στέψεως ὑπερχειλιστοῦ + 140,00 μ.

— Τυπικὴ διατομὴ ὑπερχειλιστοῦ μορφῆς Creager, ὀνομαστικοῦ ὕψους $H_0 = 4{,}00$ μ. (ἤτοι, μικρὰ ὑποπίεσις εἰς τὴν στέψιν τοῦ ὑπερχειλιστοῦ τῆς τάξεως τῶν 0,70 μ., ἥτις ἄνευ οὐδενὸς κινδύνου σπηλαιώσεως, παρέχει, διὰ τὴν μεγίστην τιμὴν τῆς διερχομένης παροχῆς, ἐλαφρὰν αὔξησιν τοῦ συντελεστοῦ ὑπερχειλίσεως, $C = 0{,}496$).

— Μεγίστη αἰχμὴ εἰσερχομένης πλημμύρας $Q\pi_{max} = 3183$ μ³/δλ.

Ἐκ τῶν ἀποτελεσμάτων τοῦ ἠλεκτρονικοῦ ὑπολογιστοῦ, τὰ ὁποῖα δίδονται εἰς τὸν κατωτέρω πίνακα (1), ἀνὰ χρονικὰ διαστήματα (H) μιᾶς ὥρας, προκύπτει,

— Μεγίστη ἐξερχομένη παροχὴ $Qv_{max} = 2.927$ μ³/δλ καὶ

— Μεγίστη στάθμη ὕδατος ἐντὸς τοῦ ταμιευτῆρος + 179,00 μ.

ΠΙΝΑΞ Ι.

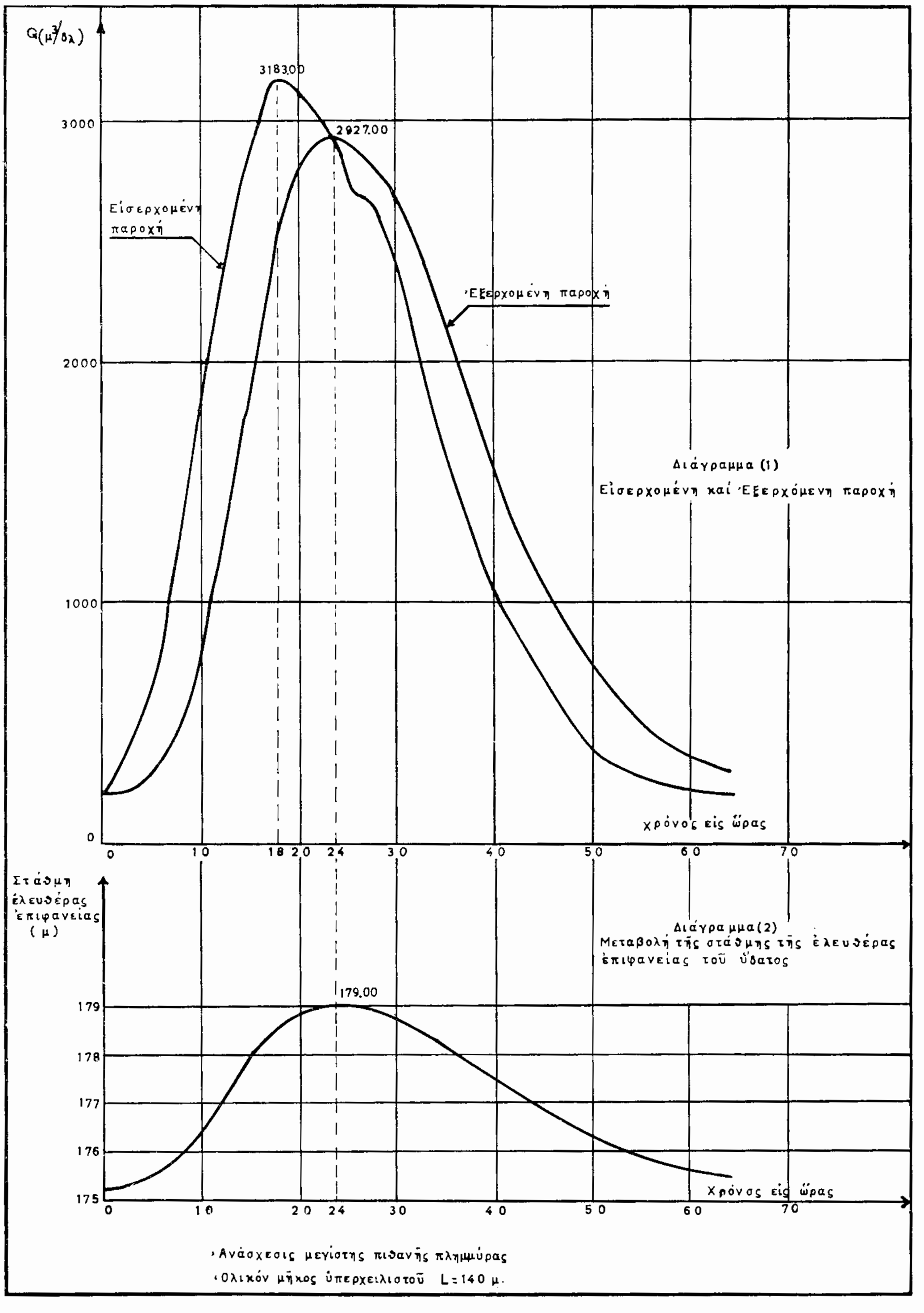
Εἰσρέουσα παροχή, ἐκρέουσα παροχὴ καὶ ἀνωτάτη στάθμη ὕδατος ἀνὰ ὥραν.

Χρόνος (Ὧραι)	Παροχὴ εἰσρέουσα μ³/δλ	Παροχὴ ἐκρέουσα μ³/δλ	Ἀνωτάτη στάθμη ὕδατος (μ)
(1)	(2)	(3)	(4)
0	200.00	200.00	175.25
1	220.83	200.90	175 25
2	272.60	205.84	175.27
3	351.64	217.72	175.29
4	469.00	240.03	175.35
5	630.52	277.62	175.43
6	818.70	334.76	175.56
7	1040.94	415.87	175.72
8	1275.00	524.01	175.93
9	1527.97	661.10	176.17
10	1778.60	826.63	176.43
11	2035.50	1018.60	176.72
12	2272.80	1231.89	177.02
13	2497.96	1459.80	177.32
14	2688.60	1693.58	177.62
15	2835.04	1921.74	177.89
16	2966.30	2137.37	178.14
17	3112.39	2342.53	178.37
18	3183.00	2529.61	178.57
19	3142.19	2677.59	178.73
20	3099 60	2782.39	178.84
21	3055.59	2852.66	178.91
22	3010.00	2895.67	178.96
23	2979.52	2920.05	178.98
24	2914 10	2927.00	179 00
25	2772.96	2905.06	178.97
26	2678.40	2860.55	178.92
27	2676.02	2817.58	178.88
28	2629.00	2778.88	178.84
29	2522 35	2730.37	178.79
30	2401.00	2666.59	178.72
31	2266.36	2588.17	178.64

(Συνέχεια τοῦ πίνακος I)

(1)	(2)	(3)	(4)
32	2114.20	2495.23	178.54
33	1921.14	2383.86	178.42
34	1757.30	2258.84	178.28
35	1636.14	2132.43	178.14
36	1517.30	2009.38	177.99
37	1402 34	1889.69	177.85
38	1286 60	1772.91	177.71
39	1160.86	1656.98	177.57
40	1052.80	1543.09	177.43
41	968.70	1435.29	177 29
42	889.70	1334.82	177.16
43	818.99	1241.44	177 04
44	747.00	1154.11	176.91
45	667.76	1070.54	176.80
46	599.20	990.53	176.68
47	543.20	915.53	176.57
48	494.10	846.12	176.46
49	455.96	782.79	176.36
50	416.60	724.94	176.27
51	370.33	670.64	176.18
52	334.20	619.68	176.10
53	311.79	573.37	176.01
54	292.40	531.96	175.94
55	276.36	494.99	175.87
56	262.70	462.01	175.81
57	251.94	432.67	175 76
58	242.50	406.58	175.70
59	234.65	383.38	175.66
60	227.60	362.71	175 62
61	221.20	344.23	175.58
62	215.90	327.69	175.54
63	212.04	312.94	175.51
64	208.60	299.81	175.48

Τὰ ἀνωτέρω ἀποτελέσματα τοῦ πίνακος δύνανται νὰ ἀναπαρασταθοῦν διὰ τῶν κατωτέρω διαγραμμάτων (1) καὶ (2).


G(μ³/δλ)
3183,00
2927,00
3000
2000
1000
0
Είσερχομένη παροχή
Έξερχομένη παροχή
Διάγραμμα (1)
Είσερχομένη καί Έξερχόμενη παροχή
χρόνος εἰς ὥρας
0
10
18
20
24
30
40
50
60
70
Στάθμη έλευθέρας έπιφανείας (μ)
Διάγραμμα (2)
Μεταβολή τῆς στάθμης τῆς έλευθέρας έπιφανείας τοῦ ὕδατος
179,00
179
178
177
176
175
Χρόνος εἰς ὥρας
Ἀνάσχεσις μεγίστης πιθανῆς πλημμύρας
Ὁλικόν μῆκος ὑπερχειλιστοῦ L=140 μ.

Σχ. 4.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

1. BARD, A. 1961.— Recherches des formules du type Runge-Kutta, comportant une derivée suivante. Thèse, Grenoble.
2. BIEBERBACH 1951.— On the remainder of the Runge-Kutta formula in the theory of ordinary differential equations. *ZAMP,* **2.**
3. BLUM, E. K. 1957.— On the Runge-Kutta fourth order method. *Bull. Amer. Math. Soc.,* **63**. (Summary).
4. CHOW VEN TE 1964.— Handbook of applied hydrology. *Mc Graw Book. Co. Inc., Toronto,* Ontario.
5. FOSTER, A. H. 1957.— Technical problems of flood insurance. *Proc. A. S. C. E.,* paper 1165 HY 1, February.
6. LINSLEY, R. K. - KOELER, M. A. and J. L. H. PAULHUS 1958.— Hydrology for engineers. *Mc Graw-Hill Book Co. Inc., New York,* N. Y.
7. REMENIERAS, G. 1965.— L'hydrologie de l'ingénieur, Eyrolles, Paris.
8. VARLET, H. 1966.— Barrages - Deversoirs, Tome I, Eyrolles, Paris.
9 LAURENT, P. J. 1961.— Méthodes spéciales du type de Runge-Kutta *Première Congrès AFCAL.* Gauthier Villars, Paris.
10. VEJVODA 1957.— Evaluation d'erreur de la formule de Runge-Kutta. *Apl. Mat,* **2.**