

**ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΜΕΛΕΤΗ ΤΗΣ ΜΟΡΦΟΛΟΓΙΚΗΣ ΕΞΕΛΙΞΗΣ ΗΦΑΙΣΤΕΙΑΚΟΥ ΚΩΝΟΥ ΛΟΓΩ ΔΙΑΒΡΩΤΙΚΩΝ ΔΙΕΡΓΑΣΙΩΝ<sup>1</sup>**

**ΔΗΜΗΤΡΙΟΣ Α. ΒΑΪΟΠΟΥΛΟΣ<sup>2</sup>, ΓΕΩΡΓΙΟΣ ΑΙΜ. ΣΚΙΑΝΗΣ<sup>2</sup>, ΒΑΣΙΛΕΙΟΣ ΤΣΑΡΜΠΟΣ<sup>2</sup>**

**ΠΕΡΙΛΗΨΗ**

Στην παρούσα εργασία, επιχειρείται μια μαθηματική περιγραφή της γεωμορφολογικής εξέλιξης ηφαιστειακού κώνου. Διατυπώνεται η διαφορική εξίσωση της χρονικής εξέλιξης του ηφαιστειακού κώνου, με και χωρίς προσφορά μάζας ή ενέργειας από το περιβάλλον, και επιλύεται αυτή, για διάφορες αρχικές και οριακές συνθήκες. Συγκρίνονται οι λύσεις που προκύπτουν και σχολιάζεται η φυσική τους σημασία. Τέλος, μελετάται ο ρόλος ορισμένων παραμέτρων που επηρεάζουν τη συμπεριφορά του φυσικού συστήματος. Τα πορίσματα αυτής της εργασίας, μπορούν να αξιοποιηθούν στη γεωμορφολογική έρευνα με αντικείμενο τη χρονική εξέλιξη ορεινών όγκων και κλιτύων, λόγω διαβρωτικών διεργασιών.

**ABSTRACT**

In the present paper, we study the morphological evolution of a volcanic cone, as a result of erosional processes. A radial symmetry is introduced in the mathematical model, in order to describe the physical process in three dimensions, without taking into account azimuthal variations in the relief.

Firstly, the diffusion equation is formulated, in polar coordinates, with no boundary conditions upon or around the volcanic cone. It expresses the erosional process with no supply of mass or energy from endogenic processes. The solution of the differential equation is expressed as a definite integral, which may be calculated numerically, for various time instants and locations. According to the numerical calculations it is concluded that, as time passes, the volcanic cone is transformed to a bell shaped surface, the relief gets smoother and the altitude of the peak of the volcano is reduced and tends to zero. The smoothening of the relief and the reduction of the altitude are faster than that of a hill with the same base and very steep slopes in its initial state (vertical cylinder).

A further analytical treatment of the solution of the diffusion equation shows that the inclination of the slope of the volcano, in a certain time and at a certain place, is proportional to the initial inclination. On the other hand, the rate of time variation of the volcano increases with ratio  $K/r_0^2$ , where  $K$  is the erosion coefficient and  $r_0$  is the radius of the base of the volcano, in the initial state.

The solution of the diffusion equation with no boundary conditions is then compared to that of the model of the volcanic cone with a steady base (at zero altitude and constant radius). It is pointed out that the model of the steady base evolves faster with time than the diffusion model of the volcanic cone with no boundary conditions.

Finally, a constant term is introduced in the differential equation, which expresses the mass or energy supply to the volcano by endogenic processes.

An equilibrium state is considered, which can be described by a time independent (steady state) ordinary differential equation. The solution of this differential equation gives a steady surface of a parabolic type, with a steep slope at the base of the volcano.

The results and conclusions of this paper may help in predicting and understanding, in quantitative terms, the morphological evolution of volcanic cones, as well as which factors influence the behavior of the physical system.

**ΛΕΞΕΙΣ ΚΛΕΙΔΙΑ:** Διάβρωση, μορφολογική εξέλιξη, συντελεστής διάβρωσης, διαφορική εξίσωση διάχυσης, διαφορική εξίσωση σταθερής κατάστασης.

1: A MATHEMATICAL STUDY OF THE MORPHOLOGICAL EVOLUTION OF A VOLCANIC CONE, AS A RESULT OF EROSIONAL PROCESSES

2: Εργαστήριο Τηλεανίχνευσης, Τμήμα Γεωλογίας, Πανεπιστήμιο Αθηνών.  
Πανεπιστημιόπολη, Αθήνα 157 84

**KEY WORDS:** erosion, morphological evolution, erosion coefficient, diffusion differential equation, steady state differential equation.

## 1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Σε προγενέστερη εργασία μας (Βαϊόπουλος κ.α. 2001), είχαμε αναφερθεί συνοπτικά στις δυο κύριες τάσεις μοντελοποίησης διαβρωτικών διεργασιών σε ορεινούς όγκους. Η πρώτη τάση είναι η αναλυτική προσέγγιση (Culling 1963, Hirano 1975, Scheidegger 1991). Η δεύτερη τάση είναι η αριθμητική προσέγγιση, με αυτοματοποιημένα ψηφιδωτά μοντέλα (cellular automata) (Armstrong 1976, Favis-Mortlock 1998).

Από την πλευρά μας επιλέξαμε την αναλυτική προσέγγιση για την περιγραφή της γεωμορφολογικής εξέλιξης ορεινού όγκου, στις δυο και στις τρεις διαστάσεις. Συγκρίνοντας τις λύσεις των δυο μοντέλων, είδαμε ότι στις τρεις διαστάσεις, η μορφολογική εξέλιξη είναι σημαντικά ταχύτερη από ό,τι στις δυο (Βαϊόπουλος κ. α. 2001). Και επειδή το φυσικό περιβάλλον είναι τρισδιάστατο, είναι σημαντικό να προταθούν τρισδιάστατα μοντέλα που να είναι δυνατόν να μελετηθούν με αναλυτικές μεθόδους, από τις οποίες να μπορούν να συναχθούν γενικότερα συμπεράσματα για τους νόμους που διέπουν τη γεωμορφολογική εξέλιξη ορεινών όγκων.

Στα πλαίσια μιας τέτοιας ερευνητικής κατεύθυνσης, κρίναμε σκόπιμο να επικεντρωθούμε στην ανάπτυξη τρισδιάστατων μοντέλων με ακτινική συμμετρία, με την οποία μπορεί να μελετηθεί η επιρροή φυσικών και γεωμετρικών παραμέτρων στη μορφολογική εξέλιξη του υπό μελέτη συστήματος, χωρίς να υπεισέρχονται αζιμουθιακές διαφοροποιήσεις του αναγλύφου. Αυτή η αφαίρεση, εκτιμούμε πως μπορεί να διευκολύνει τη μοντελοποίηση του φυσικού συστήματος, χωρίς να οδηγήσει σε υπεραπλουστεύσεις και σε αναξιόπιστα συμπεράσματα.

Στην παρούσα εργασία, επιχειρείται μια μαθηματική περιγραφή της γεωμορφολογικής εξέλιξης ηφαιστειακού κώνου, λόγω διαβρωτικών διεργασιών. Στην αρχή, διατυπώνεται και επιλύεται η διαφορική εξίσωση της χρονικής εξέλιξης του ηφαιστείου, χωρίς προσφορά μάζας ή ενέργειας από ενδογενείς παράγοντες, και για δυο διαφορετικές συννοριακές συνθήκες. Οι λύσεις που προκύπτουν συγκρίνονται και σχολιάζεται η φυσική τους σημασία. Επίσης, μελετάται ο ρόλος ορισμένων παραμέτρων που επηρεάζουν τη συμπεριφορά του φυσικού συστήματος. Τέλος, μελετάται η κατάσταση ισορροπίας, κατά την οποία η απομάκρυνση υλικού λόγω διαβρωτικών διεργασιών αντισταθμίζεται από την προσφορά ύλης μέσω ενδογενών διεργασιών. Προσδιορίζεται η επιφάνεια που προκύπτει από τη λύση της διαφορικής εξίσωσης και συγκρίνεται αυτή με την αντίστοιχη λύση για μηδενική προσφορά ύλης.

Τα πορίσματα αυτής της εργασίας, μπορούν να αξιοποιηθούν στη γεωμορφολογική έρευνα με αντικείμενο τη χρονική εξέλιξη ορεινών όγκων και κλιτύων, λόγω διαβρωτικών διεργασιών.

## 2. ΤΟ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟ ΜΟΝΤΕΛΟ

Το μοντέλο του ηφαιστειακού κώνου με ύψος  $y_0$  και ακτίνα βάσης  $r_0$ , στην αρχική κατάσταση, αναπαριστάται στο παρακάτω (σχ. 1).

Σε πολικές συντεταγμένες, η διαφορική εξίσωση που περιγράφει τη χρονική εξέλιξη του κώνου είναι η (Βαϊόπουλος κ. α. 2001):

$$\frac{\partial y}{\partial t} = K[\partial^2 y / \partial r^2 + (1/r) \cdot \partial y / \partial r] \quad (1)$$

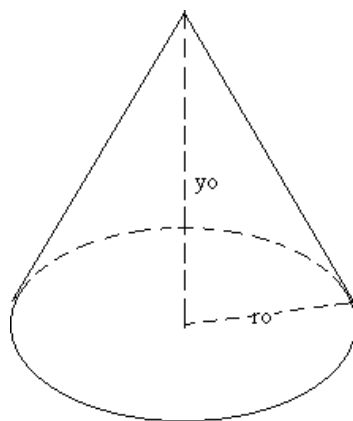
$y$  είναι το υψόμετρο και  $r$  είναι η απόσταση από το κέντρο της βάσης του κώνου.  $K$  είναι ο συντελεστής διάβρωσης, που εξαρτάται από τις διαδικασίες διάβρωσης του μέσου. Η παραπάνω διαφορική εξίσωση, συνάχθηκε με βάση τη γενικά αποδεκτή παραδοχή ότι η ροή αποσαθρωμένου υλικού είναι ευθέως ανάλογη της κλίσης της κλιτύς. Την πλήρη συλλογιστική για το πώς συνάγεται η σχέση (1), μπορεί κανείς να δει στον Scheidegger 1991 και στον Βαϊόπουλο κ. α. 2001. Η εξίσωση (1) έχει τη μορφή της διαφορικής εξίσωσης της διάχυσης, που έχει μελετηθεί επισταμένως και υπάρχουν γι'αυτήν πολλές βιβλιογραφικές αναφορές. Με βάση μια λύση γενικότερης μορφής, που υπάρχει στον Zauderer 1989, συνάγεται εύκολα ότι η λύση της διαφορικής εξίσωσης (1) για τη μορφολογική εξέλιξη του ηφαιστειακού κώνου είναι η:

$$y(r,t) = \frac{1}{2Kt} \int_0^{r_0} \exp\left(-\frac{r^2 + s^2}{2Kt}\right) \cdot I_0\left(\frac{rs}{2Kt}\right) s(y_0 - cs) ds \quad (2)$$

$c$  είναι η αρχική κλίση των κλιτύων και μπορεί να εκφραστεί ως

$$c = y_0/r_0 \quad (3)$$

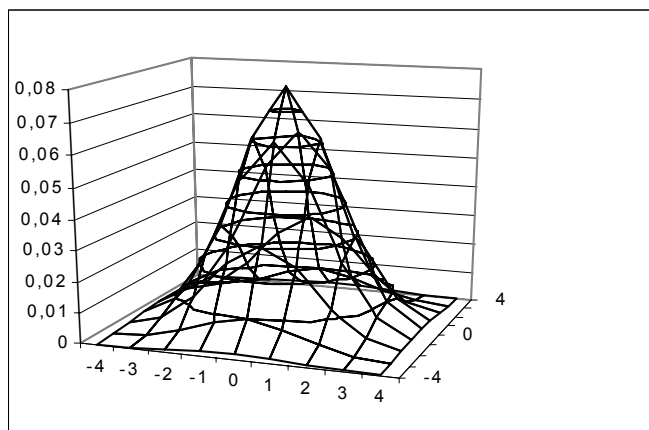
$I_0$  είναι η τροποποιημένη συνάρτηση Bessel, πρώτου είδους και μηδενικής τάξης. Με βάση τη σχέση (2), είναι δυνατόν να μελετηθεί η χρονική εξέλιξη του ηφαιστειακού κώνου, στις δυο και στις τρεις διαστάσεις.



Σχ. 1. Το μοντέλο του ηφαιστειακού κώνου (αρχικές συνθήκες)  
Fig. 1. The model of the volcanic cone (initial conditions)

### 3. ΓΡΑΦΗΜΑΤΑ ΤΗΣ ΧΡΟΝΙΚΗΣ ΕΞΕΛΙΞΗΣ ΤΟΥ ΗΦΑΙΣΤΕΙΑΚΟΥ ΚΩΝΟΥ

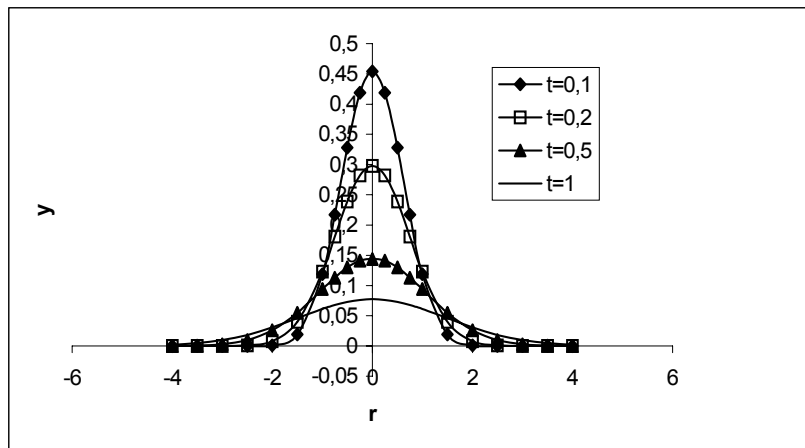
Στο (σχ. 2), παρουσιάζεται ο ηφαιστειακός κώνος μετά από παρέλευση ορισμένου χρόνου, με βάση τη σχέση (2).



Σχ. 2. Το ηφαιστείο τη χρονική στιγμή  $t=1$  ( $y_0=1$ ,  $r_0=1$ ,  $K=1$ )  
Fig. 2. The volcano at time  $t=1$  ( $y_0=1$ ,  $r_0=1$ ,  $K=1$ )

Είναι φανερό ότι με την πάροδο του χρόνου, ο αρχικός κώνος μετατρέπεται σε όγκο κωδωνοειδούς μορφής.

Στο (σχ. 3), παρουσιάζονται τομές του ηφαιστειακού κώνου για διάφορες χρονικές στιγμές. Όσο αυξάνεται ο χρόνος  $t$ , μειώνονται τόσο το υψόμετρο της κορυφής, όσο και οι κλίσεις κατά μήκος της κλιτύς.



Σχ. 3. Τομές του ηφαιστειακού κώνου σε διάφορες χρονικές στιγμές ( $K=1$ ,  $y_0=1$ ,  $r_0=1$ )

Fig. 3. Profiles of the volcanic cone for various time instants ( $K=1$ ,  $y_0=1$ ,  $r_0=1$ )

Παρουσιάζει ενδιαφέρον η σύγκριση της χρονικής εξέλιξης του μοντέλου του ηφαιστειακού κώνου με αυτήν του κατακόρυφου κυλίνδρου. Για το σκοπό αυτό, μελετήσαμε τη συμπεριφορά των εκφράσεων για τη χρονική εξέλιξη του υψομέτρου της κορυφής των δυο αυτών ορεινών όγκων.

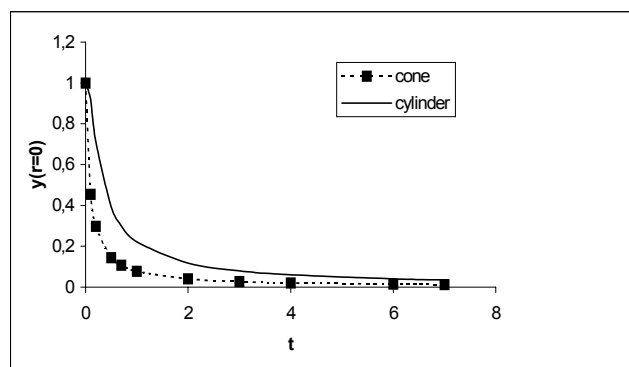
Στην περίπτωση του ηφαιστειακού κώνου, η έκφραση για τη χρονική εξέλιξη του υψομέτρου της κορυφής  $y(r=0)$  συνάγεται από τη σχέση (2) και αποδεικνύεται ότι είναι η:

$$y(r=0,t) = y_0[1-(Kt\pi/r_0)^{1/2} \cdot \text{erf}\{r_0^2/(4Kt)\}^{1/2}] \quad (4)$$

$\text{erf}$  είναι η συνάρτηση σφάλματος.

Επίσης, είναι γνωστό (Βαϊόπουλος κ. α. 2001β), ότι η πτωτική τάση του υψομέτρου της κορυφής του κατακόρυφου κυλίνδρου περιγράφεται από τη σχέση:

$$y(r=0, t) = y_0\{1-\exp[-r_0^2/(4Kt)]\} \quad (5)$$



Σχ. 4. Γραφική παράσταση της χρονικής μεταβολής του υψομέτρου της κορυφής του κατακόρυφου κυλίνδρου και του κώνου ( $r_0=1$ ,  $y_0=1$ ,  $K=1$ )

Fig. 4. A graphical representation of the time variation of the maximum altitude of a cone and a vertical cylinder ( $r_0=1$ ,  $y_0=1$ ,  $K=1$ )

Στο (σχ. 4), παρουσιάζονται οι καμπύλες μεταβολής του υψομέτρου κορυφής των δυο μοντέλων, με βάση τις σχέσεις (4) και (5). Είναι φανερό ότι η μείωση του υψομέτρου του ηφαιστειακού κώνου ως προς το χρόνο είναι ταχύτερη από αυτήν του ορθογώνιου κυλίνδρου (ορεινού όγκου με απόκρημνες κλιτύς), κατά το χρονικό

διάστημα αμέσως μετά την έναρξη της διαβρωτικής διεργασίας (σε μεταγενέστερες χρονικές στιγμές ισχύει το αντίστροφο). Αυτό θα πρέπει να οφείλεται στο ότι ο ηφαιστειακός κώνος έχει, αρχικά, περιορισμένη ποσότητα υλικού στην κορυφή του, με αποτέλεσμα να μειώνεται ταχέως το υψόμετρο με την απομάκρυνση του υλικού και την απόθεσή του σε χαμηλότερα υψόμετρα.

#### 4. ΠΑΡΑΜΕΤΡΟΙ ΠΟΥ ΕΠΗΡΕΑΖΟΥΝ ΤΗ ΧΡΟΝΙΚΗ ΕΞΕΛΙΞΗ ΤΟΥ ΗΦΑΙΣΤΕΙΑΚΟΥ ΚΩΝΟΥ

Παραγωγίζοντας τη σχέση (2) ως προς  $r$ , επιλύοντας ως προς  $y_0$  στη σχέση (3) και αντικαθιστώντας την έκφραση για το  $y_0$  στη μερική παράγωγο, λαμβάνουμε την έκφραση για την κλίση του ηφαιστειακού κώνου σε δεδομένη θέση και για δεδομένο χρόνο, που είναι η:

$$\frac{\partial y}{\partial r} = \frac{c}{4K^2t^2} \int_0^{r_0} \exp\left(-\frac{r^2+s^2}{4Kt}\right) \cdot s(-r_0+s) \cdot \left[ rI_0\left(\frac{rs}{2Kt}\right) - sI_1\left(\frac{rs}{2Kt}\right) \right] ds \quad (6)$$

$I_0$  και  $I_1$  είναι οι πρώτου είδους τροποποιημένες συναρτήσεις Bessel μηδενικής και πρώτης τάξης, αντίστοιχα.

Από τη σχέση (6), φαίνεται ότι η κλίση σε χρόνο  $t$  είναι ανάλογη της αρχικής κλίσης  $c$ . Όμως η εκατοστιαία μεταβολή της κλίσης επί την αρχική, είναι ανεξάρτητη του  $c$ . Οι παράμετροι που κυρίως επηρεάζουν τη μορφολογική εξέλιξη του ηφαιστειακού κώνου είναι ο συντελεστής διάβρωσης  $K$  και η ακτίνα βάσης  $r_0$ .

Αυτό φαίνεται αν σχηματιστεί ο λόγος  $a$ , με βάση τη σχέση

$$a = y(r=0, t=1)/y(r=0, t=0) \quad (7)$$

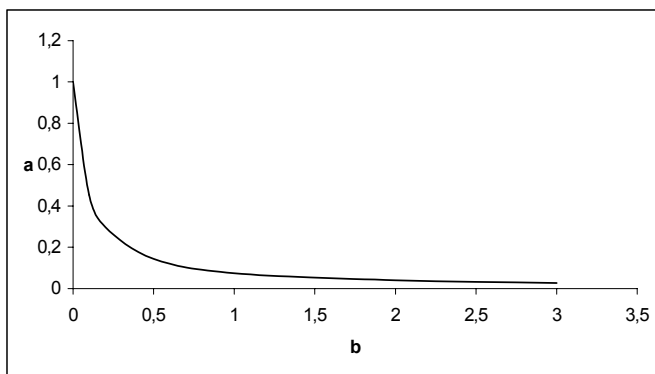
Το  $a$  είναι ένα μέτρο της ταχύτητας μεταβολής του μεγίστου υψομέτρου. Εύκολα αποδεικνύεται ότι

$$a = 1 - (\pi b)^{1/2} \cdot \text{erf}[2b^{-1/2}] \quad (8)$$

όπου

$$b = K/r_0^2 \quad (9)$$

Με βάση τη σχέση (8), έγινε η γραφική παράσταση του (σχ. 5), από την οποία είναι φανερό ότι η ταχύτητα μεταβολής του υψομέτρου αυξάνεται (ή αλλιώς η μορφολογική εξέλιξη του ηφαιστειακού κώνου επιταχύνεται), στο βαθμό που αυξάνεται ο λόγος  $K/r_0^2$ .



Σχ. 5. Γραφική παράσταση του  $a$  ως προς  $b$

Fig. 5. A graphical representation of  $a$  against  $b$

#### 5. ΣΥΓΚΡΙΣΗ ΤΗΣ ΛΥΣΗΣ ΤΗΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΗΣ ΕΞΙΣΩΣΗΣ ΔΙΑΧΥΣΗΣ ΧΩΡΙΣ ΣΥΝΟΡΙΑΚΕΣ ΣΥΝΘΗΚΕΣ, ΜΕ ΤΗ ΛΥΣΗ ΠΟΥ ΠΡΟΚΥΠΤΕΙ ΓΙΑ ΣΤΑΘΕΡΗ ΒΑΣΗ ΜΕ ΜΗΔΕΝΙΚΟ ΥΨΟΜΕΤΡΟ

Η σχέση (2), πάνω στην οποία βασίστηκε ως τώρα η μελέτη της μορφολογικής εξέλιξης του ηφαιστειακού κώνου, είναι η λύση της διαφορικής εξίσωσης διάχυσης (σχέση (1)), χωρίς καμιά συνοριακή συνθήκη (ή μάλλον με την υπόρρητη, όσο και

εύλογη απαίτηση για μηδενισμό του  $y$  όταν  $r \rightarrow \infty$ ). Ο Culling 1963, έλυσε τη διαφορική εξίσωση (1) με τη συνοριακή συνθήκη

$$y = 0, \text{ όταν } r = r_0 \quad (10)$$

Σύμφωνα με τον Culling 1963, η παραπάνω συνοριακή συνθήκη εκφράζει μια ηφαιστειοησίδα, γύρω από την οποία η στάθμη της θάλασσας παραμένει σταθερή ως προς το χρόνο και μπορεί να οριστεί ως η στάθμη μηδενικού υψομέτρου.

Η λύση της διαφορικής εξίσωσης (1), με τη συνοριακή συνθήκη (10), είναι η:

$$y = \sum_{n=1}^{\infty} a_n J_0(\alpha_n r) \cdot \exp(-K\alpha_n^2 t) \quad (11)$$

όπου

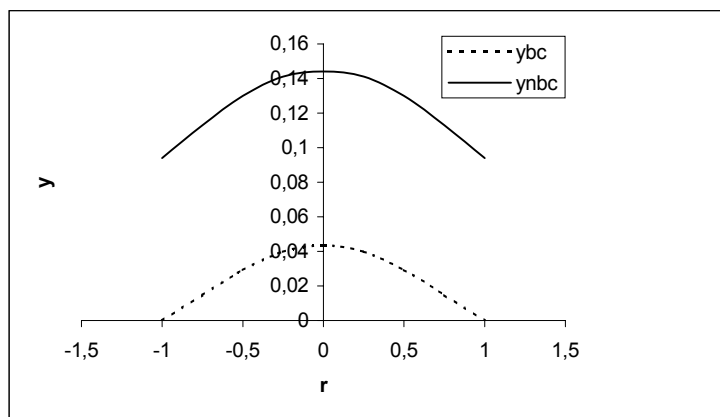
$$a_n = \frac{2}{r_0^2 J_1^2(\alpha_n r_0)} \cdot \int_0^{r_0} r \cdot (y_0 - cr) \cdot J_0(\alpha_n r) dr \quad (12)$$

και  $\alpha_n$  είναι οι ρίζες της εξίσωσης

$$J_0(\alpha r_0) = 0 \quad (13)$$

$J_0$  και  $J_1$  είναι οι κανονικές συναρτήσεις Bessel μηδενικής και πρώτης τάξης, αντίστοιχα. Οι αριθμητικές λύσεις της εξίσωσης (13) είναι γνωστές από τη βιβλιογραφία (Abramowitz & Stegun 1965) και, αν εισαχθούν αυτές στις σχέσεις (11) και (12), είναι δυνατόν να προσδιοριστούν τομές του ηφαιστειακού κώνου για διάφορες χρονικές στιγμές.

Στο (σχ. 6), παρουσιάζονται συγκριτικά οι τομές του ηφαιστειακού κώνου την ίδια χρονική στιγμή, με και χωρίς τη συνοριακή συνθήκη της σταθερής βάσης. Είναι φανερό ότι με τη συνοριακή συνθήκη της σταθερής βάσης (μηδενικό υψόμετρο στις θέσεις  $r=r_0$ ), η χρονική εξέλιξη του ηφαιστείου είναι πολύ ταχύτερη.



Σχ. 6. Τομή ηφαιστειακού κώνου με τη συνοριακή συνθήκη της σταθερής βάσης (καμπύλη ybc) και χωρίς συνοριακή συνθήκη (καμπύλη ynbc).  $y_0=1$ ,  $r_0=1$ ,  $c=1$ ,  $K=1$ ,  $t=0,5$

Fig. 6. Profiles of the volcanic cone with the steady base boundary condition (curve ybc) and no boundary condition (curve ynbc).  $y_0=1$ ,  $c=1$ ,  $K=1$ ,  $t=0,5$

## 6. Η ΟΡΙΑΚΗ ΚΑΤΑΣΤΑΣΗ ΙΣΟΡΡΟΠΙΑΣ, ΥΠΟ ΣΥΝΘΗΚΕΣ ΠΡΟΣΦΟΡΑΣ ΥΛΗΣ ΑΠΟ ΕΝΔΟΓΕΝΕΙΣ ΔΙΕΡΓΑΣΙΕΣ

Στη μαθηματική ανάλυση που πραγματοποιήσαμε ως τώρα, θεωρήσαμε ότι από το χρόνο μηδέν και μετά, ο ηφαιστειακός κώνος εξελίσσεται υπό την επιρροή διαβρωτικών διεργασιών μόνο, χωρίς να παρέχεται μάζα ή ενέργεια από ενδογενείς διεργασίες. Στην περίπτωση όμως που προσφέρεται μάζα από το εσωτερικό της γής μέσω των ηφαιστειακών εκρήξεων, ή εκδηλώνονται ανυψωτικές κινήσεις, θα πρέπει, στην εξίσωση για τη χρονική εξέλιξη του ηφαιστείου, να εισαχθεί ένας παράγοντας

Ε που, για να απλουστευτεί κατά το δυνατόν το πρόβλημα, μπορεί να θεωρηθεί σταθερός ως προς τον τόπο και το χρόνο.

Σχ. 7. Το ηφαίστειο σε κατάσταση ισορροπίας.  $E=16$ ,  $K=1$ ,  $r_{lim}=4$

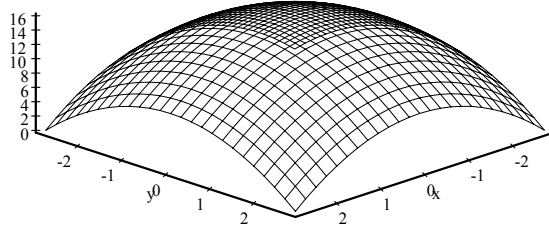


Fig. 7. The volcano in an equilibrium state.  $E=16$ ,  $K=1$ ,  $r_{lim}=4$

Στην ανάλυση που ακολουθεί, θεωρείται ότι το υλικό του ηφαιστειακού κώνου είναι ομοιογενές και δεν υπάρχουν ασυνέχειες στα πετρώματα που τον απαρτίζουν.

Η διαφορική εξίσωση της χρονικής εξέλιξης του ηφαιστειακού κώνου, γίνεται

$$\frac{\partial y}{\partial t} = K[\partial^2 y / \partial r^2 + (1/r) \cdot \partial y / \partial r] + E \quad (14)$$

Με την πάροδο του χρόνου, μπορεί να επέλθει μια κατάσταση ισορροπίας, κατά την οποία το υψόμετρο παραμένει σταθερό ως προς το χρόνο.

Σε μια τέτοια περίπτωση, το αριστερό μέλος της παραπάνω διαφορικής εξίσωσης μηδενίζεται και προκύπτει η παρακάτω διαφορική εξίσωση ως προς μια μεταβλητή:

$$K[d^2 y / dr^2 + (1/r) \cdot dy / dr] + E = 0 \quad (15)$$

Η γενική λύση αυτής είναι:

$$y(r) = (-1/4)(E/K)r^2 + C_1 + C_2 \ln r, \quad r > 0 \quad (16)$$

όπου  $C_1$  και  $C_2$  είναι αυθαίρετες σταθερές. Θέτοντας την οριακή συνθήκη

$$\frac{dy}{dr} \rightarrow 0 \quad \text{όταν} \quad r \rightarrow 0 \quad (17)$$

που σημαίνει ότι στην κορυφή του ηφαιστείου η επιφάνεια θα είναι οριζόντια, προκύπτει ότι

$$C_2 = 0 \quad (18)$$

Αν επίσης δεχτούμε ότι από μια απόσταση  $r_{lim}$  και μετά δεν υπάρχει προσφορά μάζας ή ενέργειας, τότε έχουμε την οριακή συνθήκη:

$$y(r_{lim}) = 0 \quad \text{όταν} \quad r_{lim} \geq r_0 \quad (19)$$

οπότε, με βάση τη σχέση (16), προκύπτει ότι:

$$C_1 = (1/4)(E/K)r_{lim}^2 \quad (20)$$

Από τις σχέσεις (16), (18) και (20), συνάγεται ότι η λύση της διαφορικής εξίσωσης με τις συνοριακές συνθήκες που τέθηκαν είναι:

$$y(r) = (1/4)(E/K)(r_{lim}^2 - r^2) \quad \text{όταν} \quad r \leq r_{lim} \quad (21)$$

$$y(r) = 0$$

όταν  $r > r_{lim}$

Στο τρισδιάστατο γράφημα του (σχ. 7), αναπαριστάνεται ο ηφαιστειακός κώνος στην κατάσταση ισορροπίας. Το σχήμα του είναι παραβολοειδές, σε αντίθεση με την κωδωνοειδή επιφάνεια του (σχ. 2), που προέκυψε από τη διαφορική εξίσωση της διάχυσης, με μηδενική προσφορά μάζας και ενέργειας. Πρόκειται για ένα ιδεατό σχήμα, στο οποίο δεν λαμβάνεται υπόψη η παρουσία βυθίσματος με μαγματικό υλικό στην κορυφή του ηφαιστείου. Ωστόσο, το μοντέλο αυτό μπορεί να δώσει μια πρώτη εικόνα για την κατατομή του ηφαιστείου στην κατάσταση ισορροπίας.

## 7. ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Χωρίς προσφορά μάζας ή ενέργειας από έξω, ο ηφαιστειακός κώνος μετατρέπεται, με την πάροδο του χρόνου, σε επιφάνεια κωδωνοειδούς μορφής. Το μέγιστο υψόμετρο τείνει να μειωθεί.

Η εξομάλυνση του αναγλύφου και η μείωση του υψομέτρου του ηφαιστειακού κώνου είναι ταχύτερη από αυτήν ενός ορεινού όγκου με σχήμα ορθού κυλίνδρου, στην αρχική του κατάσταση.

Ο παράγοντας που κυρίως καθορίζει την ταχύτητα χρονικής μεταβολής του αναγλύφου είναι η ποσότητα  $K/r_0^2$ , αυξανόμενης της οποίας, αυξάνεται και η ταχύτητα μεταβολής.

Ηφαιστειακός κώνος που η βάση του παραμένει σε σταθερό (μηδενικό) υψόμετρο, όπως, για παράδειγμα, μια ηφαιστειοησίδα σε θάλασσα με σταθερή στάθμη ως προς το χρόνο, εξελίσσεται χρονικά με ταχύτερους ρυθμούς από όσο ένα ηφαίστειο στο οποίο οι διαβρωτικές διεργασίες τελούνται χωρίς περιορισμούς ως προς τις διαστάσεις και το υψόμετρο της βάσης.

Αν προσφέρεται ενέργεια ή μάζα στον ηφαιστειακό κώνο, αυτός μπορεί να έλθει, με την πάροδο του χρόνου, σε μια κατάσταση ισορροπίας, το σχήμα του οποίου θα είναι παραβολοειδές, με αυξανόμενη κλίση από την κορυφή προς τη βάση, και οι διαστάσεις του χρονικά σταθερές.

Οι παραδοχές πάνω στις οποίες στηρίχτηκε η όλη μαθηματική ανάλυση (ομοιογενές ηφαιστειακό υλικό, χωρίς ασυνέχειες στα πετρώματα που απαρτίζουν τον ηφαιστειακό όγκο), παραπέμπουν σε ένα ιδεατό μοντέλο που δεν απαντάται βέβαια στη φύση, αλλά που πιστεύουμε ότι μπορεί να βοηθήσει στο να διερευνηθούν ορισμένες όψεις της φυσικής πραγματικότητας, και πιο συγκεκριμένα η χρονική εξέλιξη ορεινών όγκων και κλιτύων, λόγω διαβρωτικών διεργασιών.

## ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

- [1] ABRAMOWITZ, M., STEGUN, I., 1965: *Handbook of Mathematical Functions*. Dover Publications. New York.
- [2] ARMSTRONG, A., 1976: A three-dimensional simulation of slope forms. *Z. Geomorph. N. F.*, Suppl. Bd. 25, 20-28.
- [3] ΒΑΪΟΠΟΥΛΟΣ, Δ. Α., ΣΚΙΑΝΗΣ, Γ. ΑΙΜ., ΤΣΑΡΜΠΟΣ, Β., ΣΑΜΠΩ, Β., 2001: Ένα τρισδιάστατο μοντέλο γεωμορφολογικής εξέλιξης ορεινών όγκων, λόγω της διαβρωτικής δράσης των υδάτων. *Πρακτικά του 9ου Διεθνούς Συνεδρίου της Ελληνικής Γεωλογικής Εταιρείας, Αθήνα 26-28 Σεπτεμβρίου 2001*, σελ. 363-370.
- [3] CULLING, W. E. H., 1963: Soil creep and the development of hill-side slopes. *Jour. Geology*, 71, 127-161.
- [4] FAVIS-MORTLOCK, D., 1998: A self-organizing dynamic systems approach to the simulation of rill initiation and development on hillslopes. *Computers and Geosciences* 24, No4, 353-372.
- [5] SCHEIDEGGER, A. E., 1991: *Theoretical Geomorphology*. 3<sup>rd</sup> Edition. Springer-Verlag. Berlin.
- [6] TROFIMOV, A. M. & MOSKOVKIN, V. M., 1984: Diffusion models of slope development. *Earth Surface Processes and Landforms*, 9, 435-453.
- [7] ZAUDERER, E., 1989: *Partial Differential Equations of Applied Mathematics*. Second edition. John Wiley & Sons. New York.