

ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗ ΜΕΘΟΔΩΝ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗΣ ΑΝΑΛΥΣΗΣ ΣΤΗΝ ΕΠΙΛΥΣΗ ΔΙΑΦΟΡΙΚΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ ΠΟΥ ΠΕΡΙΓΡΑΦΟΥΝ ΤΗ ΜΟΡΦΟΛΟΓΙΚΗ ΕΞΕΛΙΞΗ ΑΝΑΓΛΥΦΟΥ

Βασίλης Γ. Νούτσος¹, Γιώργος Αιμ. Σκιάνης²

¹ ΕΚΒΑΑ, Διεύθυνση Χαρτογράφησης, Τμήμα Γεωφυσικής, Σπ. Λούη, 13676, Αθήνα.: vnoutsis@igme.gr

² Τομέας Γεωγραφίας-Κλιματολογίας, Τμήμα Γεωλογίας και Γεωπεριβάλλοντος, Πανεπιστήμιο Αθηνών, Αθήνα 157 84, skianis@geol.uoa.gr

Abstract

The morphological development of a slope or a mountain may be described by a partial differential equation, in which time, altitude at various locations and various physical parameters are involved. The exact form of the differential equation depends on the physical process by which the morphological development is controlled. Therefore, several linear and non linear partial differential equations have been formulated to simulate the development of the relief with time, assuming various denudation processes. In certain cases analytical solutions of these equations may be found. In most cases however, the complexity of the terrain and the form of the differential equation are such that an analytical solution can not be easily found and the numerical solution is the only available.

However when an algorithm is applied in order to find the numerical solution, questions about the accuracy, the stability and the speed of the method may arise. Different numerical methods have been proposed and their efficiency in solving differential equations with a geomorphological interest is the subject of the present paper.

More specifically, the efficiency of three numerical methods (finite differences, Crank-Nicolson finite differences and simulation of the topography using splines) is studied.

First the three methods have been applied to solve the diffusion equation, assuming a simple form of the original relief, for which an analytical solution is available. It was found that the three numerical methods give results which are in good agreement with the accurate analytical solution, if proper values for the time step and space step are taken.

Then, real data taken by slope profiles are put as initial altitude values in order to find the numerical solution of three linear differential equations. It was found that the Crank Nicolson method is more stable than that of the finite differences, for a large time step Δt . The latter is quicker and presents stability for small Δt values. The method of the cubic splines is not suitable, because of lack of stability.

Certain non linear partial differential equations, involving factors $(1+(\partial y/\partial x)^2)^{1/2}$ or $(\partial y/\partial x)^2$, where also numerically solved. In this case the method of the cubic splines gave remarkably better results than those of the linear case.

The results and conclusions of this paper may be useful in assessing the efficiency of the numerical methods of solving partial differential equations in quantitative geomorphology.

Περίληψη

Η μορφολογική εξέλιξη μιας κλιτύς μπορεί να περιγραφεί από μια μερική διαφορική εξίσωση η οποία περιέχει τον χρόνο, τα υψόμετρα σε διάφορους σταθμούς και πληροφορίες για τις φυσικές παραμέτρους. Η ακριβής μορφή της διαφορικής εξίσωσης εξαρτάται από τη φυσική διαδικασία. Ως εκ τούτου έχουν διατυπωθεί μερικές γραμμικές και μη γραμμικές διαφορικές εξισώσεις ώστε να προσομοιώσουν την

εξέλιξη του αναγλύφου με το χρόνο, Κάθε διαφορική εξίσωση αντιστοιχεί σε διαφορετική διαδικασία απογύμνωσης. Σε ορισμένες περιπτώσεις μπορούν να βρεθούν οι αναλυτικές λύσεις αυτών των εξισώσεων. Στις περισσότερες περιπτώσεις όμως, η πολυπλοκότητα του εδάφους και η μορφή της διαφορικής εξίσωσης είναι τέτοιες ώστε να μην είναι εύκολο να βρεθεί η αναλυτική λύση και η μόνη λύση είναι η αριθμητική.

Για να λύσουμε τη διαφορική εξίσωση αριθμητικά πρέπει να φτιάξουμε έναν αλγόριθμο, επομένως δημιουργούνται ερωτήματα περί της ακρίβειας, της ευστάθειας και της ταχύτητας του αλγορίθμου. Σε αυτή την εργασία δοκιμάζουμε τρεις διαφορετικές αριθμητικές μεθόδους επίλυσης μερικών διαφορικών εξισώσεων με γεωμορφολογικό ενδιαφέρον και ελέγξαμε προς την αποδοτικότητα τους αλγορίθμους που προκύπτουν.

Πρώτα εφαρμόστηκαν οι τρεις αριθμητικές μέθοδοι στην επίλυση της εξίσωσης διάχυσης σε μια απλή μορφή αναγλύφου, για την οποία υπάρχει αναλυτική λύση. Για κατάλληλη επιλογή των παραμέτρων βήμα χρόνου Δt και βήμα απόστασης Δx , οι λύσεις των αριθμητικών μεθόδων είχαν καλή συμφωνία με την αναλυτική λύση.

Μετά περάσαμε στην επίλυση των διαφορικών εξισώσεων με πραγματικά δεδομένα. Για τις γραμμικές διαφορικές εξισώσεις η μέθοδος Crank-Nicolson είναι η καταλληλότερη, η μέθοδος πεπερασμένων διαφορών είναι η ταχύτερη αλλά απαιτεί μικρό βήμα χρόνου Δt ενώ η μέθοδος κυβικών spline δεν λειτουργεί ικανοποιητικά στις γραμμικές διαφορικές εξισώσεις λόγω αστάθειας του αλγορίθμου.

Στις μη γραμμικές εξισώσεις δεν εφαρμόζεται η μέθοδος Crank-Nicolson. Οι άλλες δύο αριθμητικές μέθοδοι έχουν ικανοποιητική ευστάθεια και σε μερικές περιπτώσεις η μέθοδος κυβικών spline αποδίδει καλύτερα από τη μέθοδο πεπερασμένων διαφορών.

Τα συμπεράσματα αυτής της εργασίας μπορεί να είναι χρήσιμα στη γεωμορφολογική έρευνα με αντικείμενο την ποσοτική περιγραφή χρονικής εξέλιξης αναγλύφου.

Λέξεις κλειδιά: μορφολογική εξέλιξη αναγλύφου, αριθμητικές μέθοδοι επίλυσης διαφορικών εξισώσεων, ευστάθεια αριθμητικών μεθόδων

Key words: morphological development of a relief, numerical methods for solving differential equations, stability of the numerical methods

1. Εισαγωγή

Ο Gilbert (1909) σχολιάζει ότι η ικανότητα μεταφοράς αποσαθρωμένου υλικού κατά μήκος μιας πλαγιάς ωθείται από την βαρύτητα, κίνηση η οποία εξαρτάται από την κλίση της πλαγιάς για την αποτελεσματικότητά της. Βασισμένοι σε αυτήν την εύλογη παρατήρηση, οι Zingg (1940), Musgrave (1947), Kirkby (1969) πρότειναν τύπους την μορφής

$$C = x^m \cdot (\text{slope})^n \quad (1)$$

όπου C η ικανότητα μεταφοράς ιζημάτων και slope η κλίση της πλαγιάς. Για διάφορες περιπτώσεις (μετρήσεις σε ποτάμια, σε λόφους, σε πεδιάδες, κτλ.) οι Leopold and Maddock, (1953), Schumm (1964) υπολόγισαν τους εκθέτες n, m .

Ο Culling (1960) θεώρησε ότι ο ρυθμός μεταφοράς ιζημάτων εκφράζεται με τον τύπο $S = -K \partial y / \partial x$ (K - συντελεστής διάχυσης, $\partial y / \partial x$ η κλίση του εδάφους) και συνδυάζοντάς τον με τον νόμο διατήρησης της μάζας $\partial y / \partial t = -\partial S / \partial x$ καταλήγει στην εξίσωση της διάχυσης. Ο συντελεστής διάχυσης εξαρτάται από το βαθμό ευκολίας με την οποία μπορεί να αποκολληθεί υλικό από την επιφάνεια του εδάφους, το βαθμό ευκολίας με την οποία μπορεί να κυλήσει το νερό μαζί με τα χώματα στην επιφάνεια του εδάφους, από τη φύση του εδάφους και τις δυνάμεις τριβής μεταξύ ρευστού και εδάφους.

Το πρόβλημα είναι ότι μόνο για συγκεκριμένες απλές γεωμορφές υπάρχει αναλυτική λύση. Γι αυτό είναι ανάγκη να αξιοποιηθούν μέθοδοι της αριθμητικής ανάλυσης για την επίλυση των διαφορικών εξισώσεων που προκύπτουν, σε οποιαδήποτε γεωμορφή.

Η εξίσωση διάχυσης είναι μια γραμμική διαφορική εξίσωση και εφαρμόζεται σε περιοχές με υγρό κλίμα και άφθονη βλάστηση, η μορφολογία των περιοχών αυτών τείνει να εξομαλυνθεί με την πάροδο του χρόνου. Σε περιοχές με ξηρό κλίμα, χωρίς πυκνή βλάστηση, στις οποίες τα νερά της βροχής δεν συγκρατούνται από το έδαφος, ρέουν με μεγάλες ταχύτητες κατά μήκος της κλιτύος και συμπαρασύρουν μεγάλες ποσότητες αποσαθρωμένου υλικού, δεν εφαρμόζεται η εξίσωση της διάχυσης. Σε τέτοιες περιπτώσεις, για την περιγραφή της απογύμνωσης ο Scheidegger (1961) κατέληξε στην παρακάτω μη γραμμική διαφορική εξίσωση:

$$\frac{\partial y}{\partial t} = -\alpha \sqrt{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2} \Phi \quad (2)$$

όπου α ένας συντελεστής διάβρωσης (ο Scheidegger την αναφέρει ως σταθερά αναλογίας) ο οποίος εξαρτάται από τις ιδιότητες του εδάφους και η ποσότητα Φ εκφράζει τρεις διαφορετικές υποθέσεις τις οποίες θα δούμε αργότερα.

Με την εξέλιξη των υπολογιστικών συστημάτων, η βασική προσέγγιση της χρησιμοποίησης των νόμων μεταφοράς στις εξισώσεις διατήρησης εφαρμόστηκε σε μαθηματικά μοντέλα σχεδιασμένα για μια μεγάλη γκάμα προβλημάτων (Ahnert 1988; Willgoose et al. 1991; Tucker and Slingerland 1994, 1997; Anderson 1994; Howard 1994; Kooi and Beaumont 1996; van der Beek and Braun 1999, Hancock and Willgoose 2001; Dietrich et al. 2003; Mudd and Furbish 2004; Tucker and Hancock 2010; Ganti et al. 2012; Heimsath and Jungers 2013). Οι συγγραφείς χρησιμοποίησαν πολυπλοκότερα μοντέλα: εισήγαγαν την έννοια της ισορροπίας μεταξύ του ρυθμού απογύμνωσης και του ρυθμού αποσάθρωσης, διέκριναν τη συμπεριφορά των μοντέλων για ρέματα και κλιτύες και εισήγαγαν περισσότερες παραμέτρους στο μοντέλο οι οποίες προκύπτουν από παρατηρήσεις και μετρήσεις υπαίθρου (πυκνότητα ιζημάτων, το πορώδες των ιζημάτων, ρυθμό μεταφοράς ιζημάτων, ρυθμός τεκτονικής ανύψωσης). Όλα αυτά οδήγησαν στη διατύπωση νέων διαφορικών εξισώσεων για την περιγραφή της μορφολογικής εξέλιξης ενός αναγλύφου και τη αριθμητική επίλυσή τους.

Στην παρούσα εργασία θα ασχοληθούμε μόνο με την αριθμητική επίλυση των διαφορικών εξισώσεων που περιγράφουν τις διαδικασίες απογύμνωσης. Όταν χρησιμοποιείται ένας αλγόριθμος για την επίλυση διαφορικών εξισώσεων, δημιουργούνται ερωτήματα για την ακρίβεια του αλγορίθμου, την ευστάθεια και την ταχύτητά του. Προτείνονται τρεις μέθοδοι αριθμητικής ανάλυσης για την επίλυση των διαφορικών εξισώσεων και ελέγχθηκαν προς την ακρίβεια, την ευστάθεια και την ταχύτητα κατά τη επίλυση αυτών των διαφορικών εξισώσεων.

Έγιναν δοκιμές για την επίλυση της εξίσωσης διάχυσης σε μαθηματικό μοντέλο αναγλύφου για το οποίο υπάρχει αναλυτική λύση και είχαμε ικανοποιητική σύγκλιση, επομένως εφαρμόσαμε τις αριθμητικές μεθόδους σε πραγματικά δεδομένα με μια σειρά διαφορικών εξισώσεων οι οποίες περιγράφουν διαφορετικές διαδικασίες απογύμνωσης. Από τις δοκιμές βγήκαν χρήσιμα συμπεράσματα προς ποια αριθμητική μέθοδο είναι η καταλληλότερη για κάθε διαφορική εξίσωση, διότι κατά την αριθμητική επίλυση κάποιας διαφορικής εξίσωσης με μια όχι κατάλληλη αριθμητική μέθοδο μπορεί να οδηγήσει σε ένα ασταθή αλγόριθμο ή τα αποτελέσματα της αριθμητικής επίλυσης να είναι ανακριβή. Από τις δοκιμές επιβεβαιώνεται η θεωρία των πεπερασμένων διαφορών για την ανάγκη χρήσης ψηφιακών χαρτών υψηλής ανάλυσης.

2. Αριθμητικές μέθοδοι επίλυσης διαφορικών εξισώσεων

Στις διαφορικές εξισώσεις που μελετώνται στην παρούσα εργασία, υπεισέρχονται παράγωγοι ως προς δύο μεταβλητές: το χρόνο t και την απόσταση από την αρχή της τομής x .

Κάθε διαφορική εξίσωση που προκύπτει είναι της μορφής

$$\frac{\partial y}{\partial t} = F\left(x, y, \frac{\partial y}{\partial x}, \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right) \quad (3)$$

Για να υπολογίσουμε αριθμητικά την εξίσωση (3), παίρνουμε m διακριτά <<στιγμιότυπα>>, από 0 μέχρι τον ζητούμενο χρόνο υπολογισμού της μορφολογικής εξέλιξης t_{dnd} με βήμα Δt , ώστε να έχουμε τα χρονικά διαστήματα $t_0=0, t_1=\Delta t, t_2=2\Delta t, \dots, t_m=m\Delta t=t_{dnd}$. Για ομοιόμορφο διαμερισμό της τομής μας $x_0=0, x_1=\Delta x, x_2=2\Delta x, \dots, x_n=n\Delta x$ η απόσταση ανάμεσα σε δύο διαδοχικά σημεία είναι Δx . Η σχέση (3) παίρνει τη διακριτή μορφή

$$\frac{\partial y_i}{\partial t_k} = F\left(x_i, y_i, \frac{\partial y_i}{\partial x_i}, \frac{\partial^2 y_i}{\partial x_i^2}\right) = F_{i,k}, \quad k=1, \dots, m, \quad i=1, \dots, n \quad (4).$$

Σε κάθε χρονικό βήμα t_k υπολογίζεται η ποσότητα $F_{i,k}$ για κάθε σημείο i της τομής. Η χρονική παράγωγος υπολογίζεται από το άθροισμα $\frac{\partial y_i}{\partial t} = \Delta t \sum_{k=1}^m F_{i,k}, i=1, \dots, n$.

Για τον υπολογισμό της ποσότητας $F_{i,k}$ χρειαζόμαστε τον αριθμητικό υπολογισμό της πρώτης και δεύτερης χωρικής παραγώγου. Επιλέξαμε τις ακόλουθες μεθόδους αριθμητικής ανάλυσης:

1. Πεπερασμένες διαφορές

Τα δεδομένα είναι ένα σύνολο από διακριτές τιμές $x_i, y_i, i=1, \dots, n$ όπου με x συμβολίζουμε την απόσταση από την αρχή της τομής και με y το υψόμετρο των n σημείων. Για κάθε σημείο $i=2, \dots, n-1$ υπολογίζεται η πρώτη και η δεύτερη χωρική παράγωγο βάση των τύπων:

$$\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_i = \frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i}, \quad \left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right)_i = \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{(x_{i+1} - x_i)(x_i - x_{i-1})} \quad (5).$$

Η παραπάνω προσεγγίσεις των παραγώγων (3) προκύπτουν από το ανάπτυγμα Taylor (πολυωνυμική προσέγγιση του υψομέτρου, θεώρημα του απειροστικού λογισμού) και έχουν σφάλμα της τάξης του Δx και Δx^2 αντίστοιχα. Επομένως είναι αναγκαίο να έχουμε μικρό Δx το οποίο επιτυγχάνεται μόνο ψηφιοποιώντας χάρτες τοπογραφικών δεδομένων υψηλής ανάλυσης.

2. Μέθοδος πεπερασμένων διαφορών Crank-Nicolson (Gerald and Wheatley 1994)

Κατά την επίλυση της διαφορικής εξίσωσης διάχυσης για κάθε χρονικό στιγμιότυπο $t_k, k=1, \dots, m$, λαμβάνεται υπ' όψη η δεύτερη παράγωγος του y , ως προς το χρόνο και ως προς το χώρο. Είναι μια άμεση (explicit) διαδικασία ενώ η μέθοδος 1 είναι έμμεση (implicit), επομένως η μέθοδος 2 θεωρείται πιο ευσταθής.

3. Προσομοίωση τοπογραφίας με κυβικές splines (πολυώνυμο 3^ο βαθμού)

Η αριθμητική ανάλυση (Ακριβής και Δουγκαλής 2006) μας ενέπνευσε να προσεγγίσουμε την τοπογραφία μας με μια συνάρτηση. Ανάμεσα σε κάθε δύο σημεία παίρνουμε ένα πολυώνυμο 3^ο βαθμού με τέτοιο τρόπο ώστε να εξασφαλίζεται η συνέχεια της συνάρτησης, της πρώτης και της δεύτερης παραγώγου σε κάθε $i=2, \dots, n-1$. Αποδεικνύεται ότι αυτή η συνάρτηση είναι μοναδική. Παραγωγίζοντας τα πολυώνυμα, έχουμε σε κάθε σημείο i τις χωρικές παραγώγους

$$\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_i, \quad \left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right)_i, \quad i=2, \dots, n-1$$

2.1 Η μέθοδος Crank-Nicolson εφαρμόζεται μόνο στις γραμμικές διαφορικές εξισώσεις

Η μέθοδος Crank-Nicolson υπολογίζει την δεύτερη χωρική παράγωγο $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$ της εξίσωσης διάχυσης στους χρόνους t_k και t_{k+1} χρησιμοποιώντας έναν μέσο όρο. Η διακριτή μορφή της εξίσωσης διάχυσης με τη μέθοδο Crank-Nicolson είναι

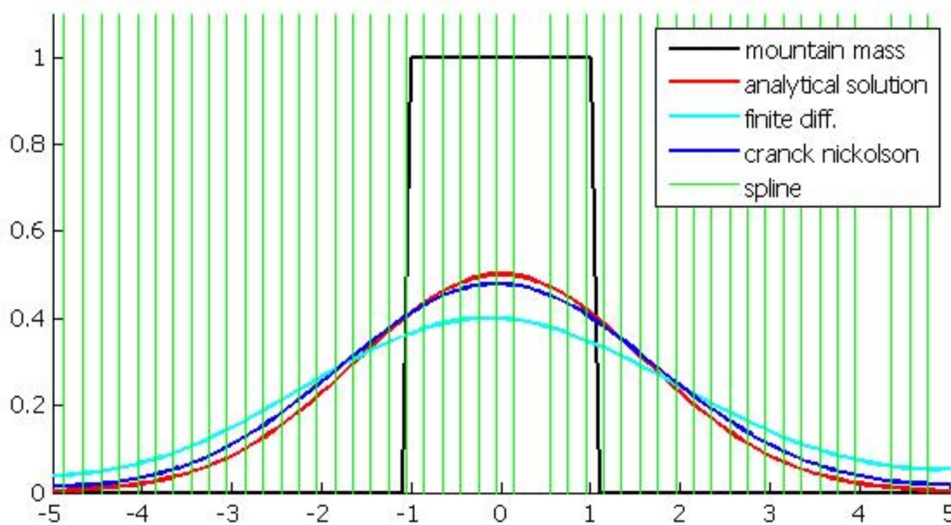
3. Αριθμητική λύση διαφορικών εξισώσεων χρησιμοποιώντας πραγματικά δεδομένα

3.1 Γραμμικές διαφορικές εξισώσεις

3.1.1 Εφαρμογή της εξίσωσης διάχυσης σε προσομοίωση ορεινού όγκου με πεπερασμένη βάση

Προσομοιώνουμε τον ορεινό όγκο με το ακόλουθο μοντέλο: τιμή $y=1$ όταν το x ανήκει στο διάστημα $[-1,1]$ και $y=0$ έξω από αυτό το διάστημα. Η αναλυτική λύση της εξίσωσης είναι γνωστή (Zauderer 1989).. Από τη στιγμή που υπάρχει αναλυτική λύση, μπορούμε να λύσουμε τη διαφορική εξίσωση με τις τρεις μεθόδους αριθμητικής ανάλυσης και να συγκρίνουμε τα αποτελέσματα με την αναλυτική λύση.

Τα δεδομένα μας θα αποτελούν ένα ομοιόμορφο διαμερισμό του χώρου $[-5, 5]$ με βήμα Δx . Σύμφωνα με τη μέθοδο των πεπερασμένων διαφορών (Gerald and Wheatley 1994) για να είναι η ο αλγόριθμος που προκύπτει ευσταθής πρέπει να ισχύει $\Delta t < 1/2\Delta x^2$. Στην περίπτωση μας, επιλέξαμε $\Delta x=0.1$ άρα για τη μέθοδο 1 πρέπει να ισχύει $\Delta t < 0.005$. Ας δούμε την συμπεριφορά των τριών μεθόδων στο όριο $\Delta t=0.005$



Εικόνα 1: γραφική αναπαράσταση των τριών αριθμητικών μεθόδων για βήμα $\Delta t=0.005$, $\Delta x=0.1$

Στην εικόνα 1 παρατηρούμε την υπεροχή της μεθόδου 2 πεπερασμένων διαφορών Crank-Nicolson σε σχέση με τις άλλες δύο μεθόδους: η μέθοδος 1 αποκλίνει σημαντικά από την ακριβή αναλυτική λύση ενώ η μέθοδος 3 είναι ασταθής.

Για διάφορες τιμές του Δt πήραμε τα ακόλουθα σφάλματα: $\text{σφάλμα} = \frac{\sum_{i=1}^n (y_{an_i} - y_{c_i})^2}{\sum_{i=1}^n (y_{an_i})^2}$ όπου y_{an} είναι η

αναλυτική λύση και y_c η υπολογισμένη από την αριθμητική μέθοδο

Πίνακας 1: απόκλιση των τριών αριθμητικών μεθόδων από την αναλυτική λύση

Δt	σφάλμα μεθόδου 1	σφάλμα μεθόδου 2	σφάλμα μεθόδου 3
0.001	4.3%	4.1%	5.3%
0.002	5.2%	4.3%	Ασταθής
0.005	21.5%	7.0%	Ασταθής
0.009	65.8%	17.5%	Ασταθής

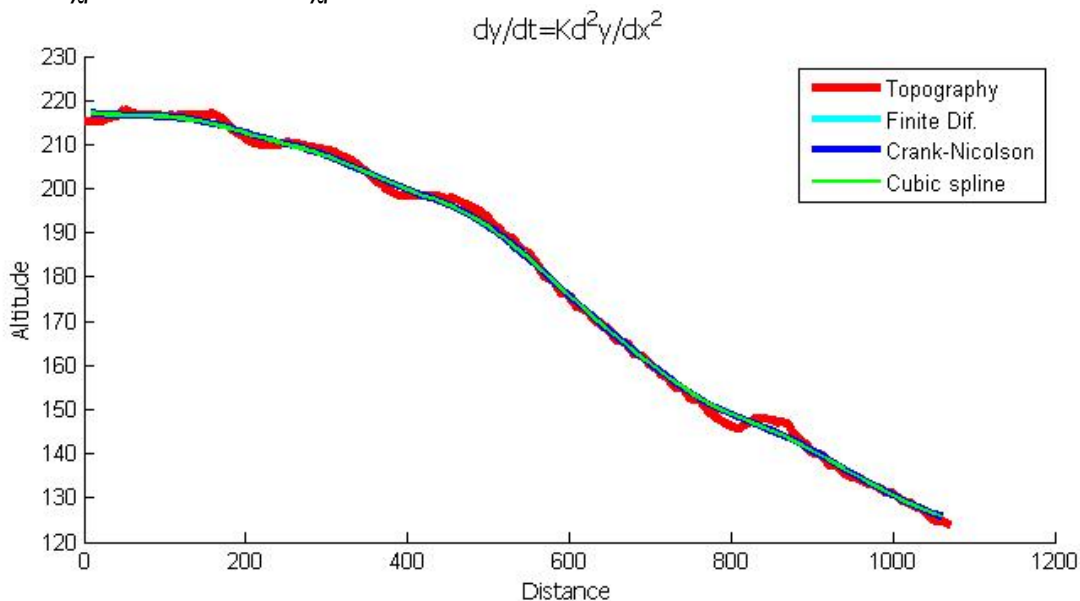
Για $\Delta t < 0.001$ και οι τρεις μέθοδοι είναι ευσταθείς. Όσο μεγαλώνουμε το Δt πρώτα αποκλίνει η μέθοδος 3, μετά αποκλίνει και η μέθοδος 1 ενώ η μέθοδος 3 γίνεται ασταθής. Συμπέρασμα, για την εξίσωση διάχυσης η μέθοδος 2 πεπερασμένων διαφορών Crank-Nicolson είναι η καταλληλότερη.

3.1.2 Εφαρμογή της εξίσωσης διάχυσης σε πραγματικά δεδομένα

Στην περιοχή της Τανάγρας το Εθνικό Κέντρο Βιώσιμης και Αειφόρου Ανάπτυξης (ΕΚΒΑΑ πρώην ΙΓΜΕ) έκανε μια γεωλογική έρευνα για την αποτύπωση των ρηγμάτων και την εκτίμηση των υδατικών αποθεμάτων. Έγιναν γεωφυσικές μετρήσεις βαρύτητας σε τομές και για κάθε σημείο μέτρησης είναι αποθηκευμένη τόσο η τιμή του βαρυτικού πεδίου όσο και οι συντεταγμένες κάθε σημείου.

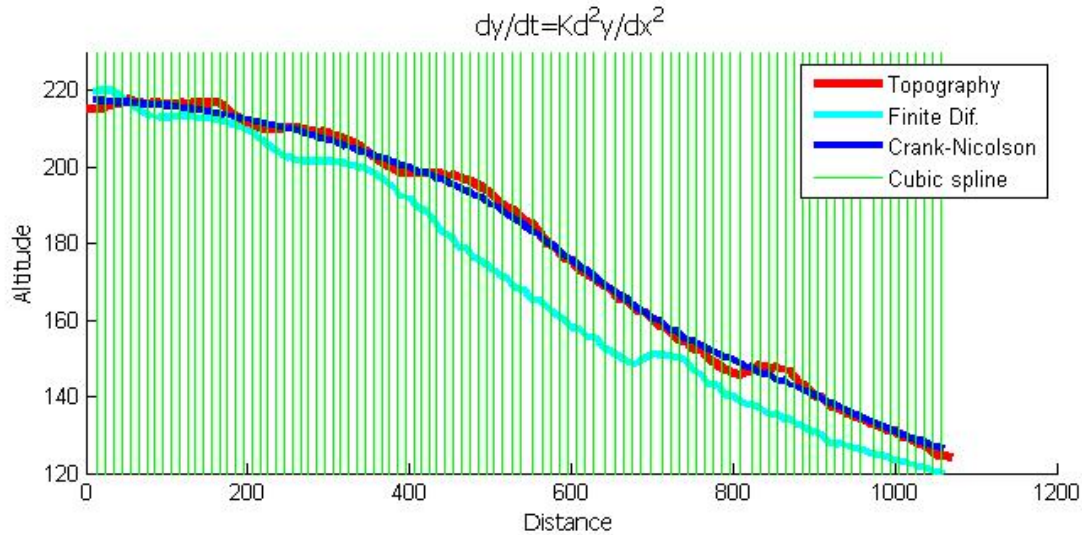
Επειδή οι μετρήσεις είναι πραγματικές και όχι μια προσομοίωση, θα χρησιμοποιήσουμε ρεαλιστικές τιμές για τη παράμετρο K . Έχουν γίνει προσπάθειες να εκτιμηθεί η σταθερά K από τους Kirkby (1971), Martin and Church (1997), Fernandes and Dietrich (1997), Gabet (2000). Στην εργασία Roering et al. (1999) υπάρχει μια διαδικασία υπολογισμού της σταθεράς K μέσω μιας προσομοίωσης Monte Carlo και κατέληξαν στην τιμή $K = 0.0049 \pm 0.0009$ για δεδομένα μιας περιοχής. Στις δοκιμές θα χρησιμοποιήσουμε την τιμή $K = 0.005$.

Βλέπουμε την εικόνα που προκύπτει εφαρμόζοντας την εξίσωση της διάχυσης σε μια τομή για $t_{end} = 250000$ χρόνια και $\Delta t = 1000$ χρόνια.



Εικόνα 2: λύση της εξίσωσης διάχυσης με τρεις αριθμητικές μεθόδους για πραγματικά δεδομένα για $K = 5 \cdot 10^{-3}$, $\Delta x = 10$ μέτρα, $\Delta t = 1000$ χρόνια, $t_{end} = 250000$ χρόνια

Στην εικόνα 2 παρατηρούμε την πολύ καλή σύγκλιση των τριών μεθόδων. Στο μοντέλο του ορεινού όγκου είχαμε την σταθερά διάχυσης $K = 1$ ενώ στα πραγματικά δεδομένα έχουμε $K = 0.005$, επομένως η συνθήκη ευστάθειας του αλγορίθμου είναι $\Delta t < 1 / (2K) \Delta x^2$. Στην περίπτωση μας που έχουμε $\Delta x = 10$ m προκύπτει η συνθήκη ευστάθειας $\Delta t < 10000$. Οι δοκιμές έδειξαν ότι η μέθοδος των κυβικών spline αποκλίνει για $\Delta t > 3000$ ενώ για $\Delta t > 18000$ αρχίζει να αποκλίνει και η μέθοδος πεπερασμένων διαφορών ενώ η μέθοδος Crank-Nicolson παραμένει σταθερή ή ευσταθής,



Εικόνα 3: ευστάθεια των αριθμητικών μεθόδων κατά την επίλυση της εξίσωσης διάχυσης
 Για $K=5 \cdot 10^{-3}$, $\Delta x=10$ μέτρα, $\Delta t=20000$ χρόνια, $t_{end}=250000$ χρόνια

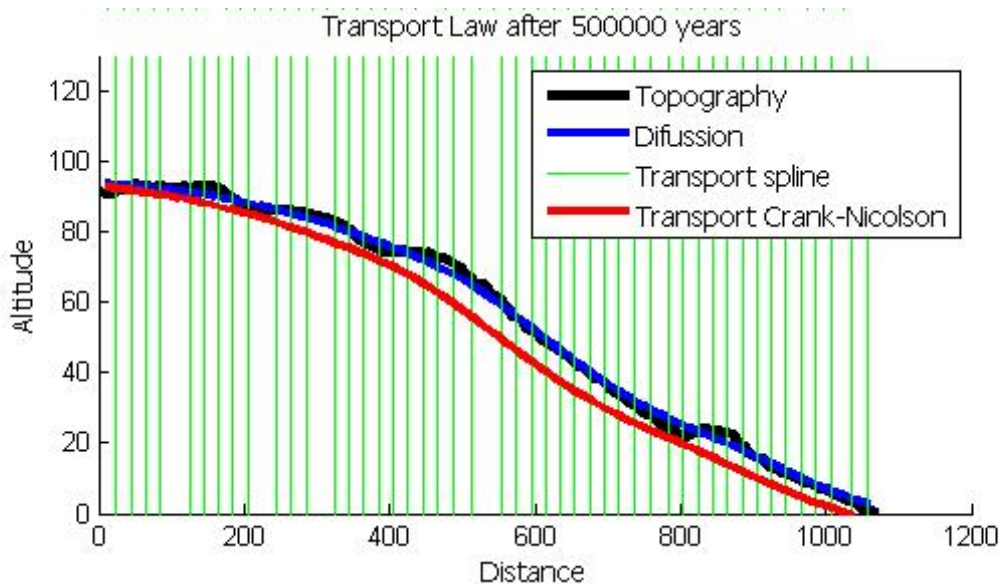
Στην εικόνα 3 για $\Delta t=20000$ επιβεβαιώνεται η άποψη ότι η μέθοδος Crank-Nicolson είναι η καταλληλότερη για την αριθμητική λύση της εξίσωσης διάχυσης: η μέθοδος 1. πεπερασμένων διαφορών αποκλίνει από τη λύση ενώ η μέθοδος 3. κυβικών splines είναι πολύ ασταθής.

3.1.3 Εξίσωση μεταφοράς και εφαρμογή της σε πραγματικά δεδομένα

Η εξίσωση διάχυσης εφαρμόζεται σε περιοχές στις οποίες τα επιφανειακά ύδατα ρέουν με μικρή ταχύτητα. Μια άλλη γραμμική διαφορική εξίσωση η οποία εξυπηρετεί στην περιγραφή διαδικασιών απογύμνωσης σε περιοχές στις οποίες τα επιφανειακά ύδατα ρέουν με μεγάλη ταχύτητα είναι η εξίσωση μεταφοράς. Ο Hirano (1975) διατυπώνει την παρακάτω εξίσωση

$$\frac{\partial y}{\partial t} = K \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + T \frac{\partial y}{\partial x} \quad (6).$$

T είναι ο συντελεστής μεταφοράς. Η μεταβολή του υψομέτρου σε κάθε σημείο για κάθε χρονικό στιγμιότυπο Δt εξαρτάται από τον όρο διάχυσης $K \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$ (ευνοεί την μορφολογική εξέλιξη κλιτύων που έχουν την τάση να εξομαλυνθούν με την πάροδο του χρόνου) και τον όρο μεταφοράς $T \frac{\partial y}{\partial x}$ (ευνοεί την παράλληλη υποχώρηση της γεωμορφής).



Εικόνα 4: ευστάθεια των αριθμητικών μεθόδων στην λύση της εξίσωσης μεταφοράς για $K=5 \cdot 10^{-3}$, $T=2.5 \cdot 10^{-4}$, $\Delta x=10$ μέτρα, $\Delta t=20000$ χρόνια, $t_{end}=250000$ χρόνια

Στην εικόνα 4 φαίνεται ότι στο όριο $\Delta t=20000$ μόνο η μέθοδος Crank-Nicolson δίνει σωστά αποτελέσματα, ενώ οι άλλες δύο μέθοδοι έχουν ίδια συμπεριφορά όπως στην εξίσωση της διάχυσης.

Το συμπέρασμα είναι ότι η μέθοδος 2 Crank-Nicolson είναι η καταλληλότερη για την αριθμητική επίλυση των γραμμικών διαφορικών εξισώσεων για μεγάλο Δt , όταν ζητάμε τον υπολογισμό της μορφολογικής εξέλιξης για μεγάλο χρονικό διάστημα (εκατομμύρια έτη). Για μικρά χρονικά διαστήματα (από δεκάδες μέχρι μερικές εκατοντάδες χιλιάδες χρόνια) θέλουμε μικρό Δt για καλύτερη ακρίβεια (περισσότερους υπολογισμούς), επομένως χρησιμοποιούμε την ταχύτερη μέθοδο 1 πεπερασμένων διαφορών.

3.2 Μη γραμμικές διαφορικές εξισώσεις

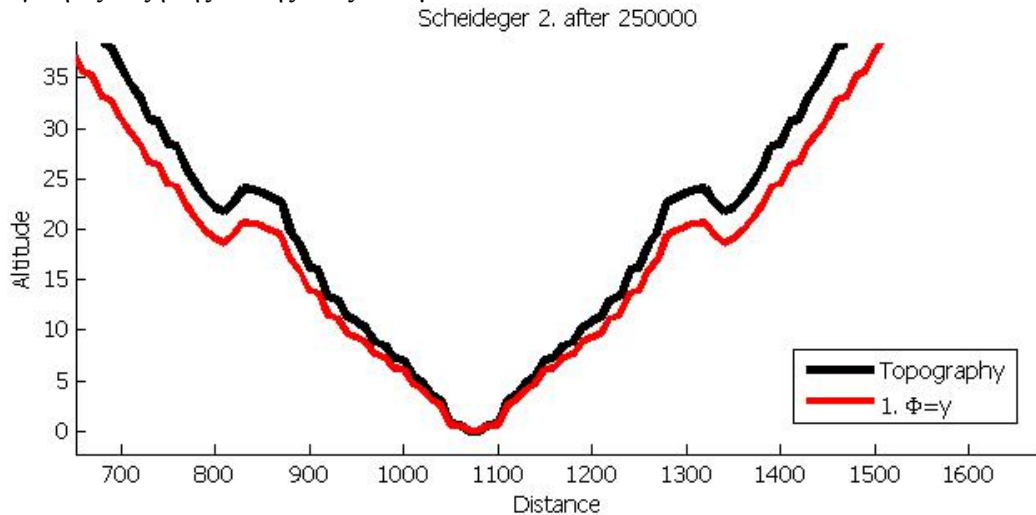
Όπως είδαμε στην εισαγωγή, η εξίσωση διάχυσης και η εξίσωση μεταφοράς εφαρμόζονται σε περιοχές με υγρό κλίμα και άφθονη βλάστηση στις οποίες το ανάγλυφο έχει την τάση να εξομαλυνθεί με την πάροδο του χρόνου. Για περιοχές στις οποίες τα νερά της βροχής δεν συγκρατούνται από το έδαφος, ρέουν με μεγάλες ταχύτητες κατά μήκος της κλιτύς και συμπαρασύρουν μεγάλες ποσότητες αποσάθρομένου υλικού ο Scheidegger (1961) κατέληξε στη μη γραμμική διαφορική εξίσωση (3) στην οποία η ποσότητα $(1+(dy/dx)^2)^{1/2}$ αντιπροσωπεύει το αποτέλεσμα της αποσάθρωσης η οποία δρα κάθετα προς την πλαγιά. Η ποσότητα α εξαρτάται από τις ιδιότητες του εδάφους και η ποσότητα Φ εκφράζεται με διαφορετικές μορφές ανάλογα με τις φυσικές υποθέσεις για τη διαδικασία απογύμνωσης:

1. $\Phi=1$ που σημαίνει ότι με την πάροδο του χρόνου η πλαγιά υποχωρεί
2. $\Phi=y$ που σημαίνει ότι η απογύμνωση είναι ανάλογη του υψόμετρου. Αυτή η υπόθεση στηρίζεται σε παρατηρήσεις ότι σε ορισμένες περιοχές η βροχόπτωση είναι μεγαλύτερη στα μεγάλα υψόμετρα.
3. $\Phi = \frac{\partial y}{\partial x}$ εκφράζει την εύλογη υπόθεση ότι όσο μεγαλύτερη είναι η κλίση τόσο μεγαλύτερη είναι η απογύμνωση.

Στην εργασία του ο Scheidegger (1961) χρησιμοποίησε διάφορα απλά μοντέλα προσομοίωσης και θεωρούσε ότι μπορεί να μετατραπεί η κλίμακα του χρόνου ώστε να έχουμε $\alpha=1$. Ως σταθερά αναλογίας, μπορούμε να δώσουμε στην ποσότητα α τιμές τέτοιες ώστε να πετύχουμε την επιθυμητή απογύμνωση. Θα έχουμε τρεις σταθερές αναλογίας για τις τρεις διαφορετικές διαδικασίες απογύμνωσης. Από τη στιγμή που για την εξίσωση διάχυσης έχουμε δεχτεί $K=5 \cdot 10^{-3}$, μπορούμε να προσεγγίσουμε τις τιμές των

σταθερών αναλογίας με τον εξής τρόπο: επειδή η εξισώσεις του Scheidegger εφαρμόζονται σε περιοχές στις οποίες τα νερά της βροχής ρέουν με μεγάλες ταχύτητες συμπαρασύροντας μεγάλες ποσότητες αποσπασμένου υλικού, μετά από χρόνια θα έχουμε μεγαλύτερη μεταφορά μάζας από το να χρησιμοποιήσουμε την διαδικασία διάχυσης. Γνωρίζοντας την μεταφορά μάζας για την εξίσωση διάχυσης με $K=5*10^{-3}$, $t_{dnd}=250000$ χρόνια, αντιστρέψαμε την φορά υπολογισμού των πράξεων και βρήκαμε $a_1>7*10^{-6}$, $a_2>7*10^{-8}$, $a_3>5*10^{-5}$ για τις τρεις διαδικασίες απογύμνωσης.

Ενδιαφέρον παρουσιάζει η διαδικασία $2 \Phi=y$ η οποία μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να περιγράψει την μορφολογική εξέλιξη της κοίτης ενός ποταμού:

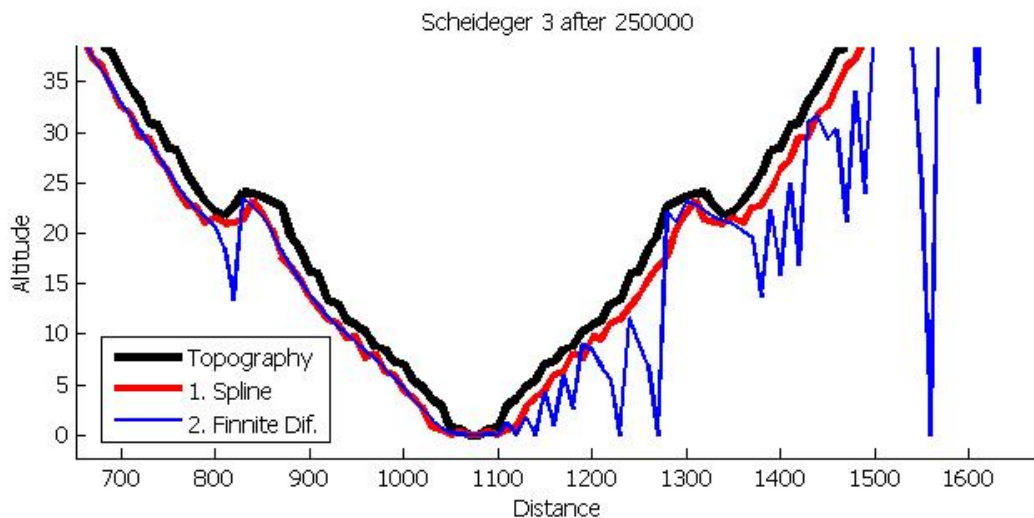


Εικόνα 5: επίλυση της διαφορικής εξίσωσης $dy/dt=y((1+(dy/dx)^2)^{1/2})$ για $a_1=10^{-7}$, $\Delta x=10$ μέτρα, $\Delta t=1000$ χρόνια, $t_{dnd}=250000$ χρόνια

Στη εικόνα 5 παρατηρούμε την κοίτη του ποταμού που μένει αναλλοίωτη με το πέρασμα των χρόνων. Από την συνθήκη ευστάθειας του αλγορίθμου $\Delta t < 1/(2K)\Delta x^2$, επειδή η σταθερά a_2 είναι πολύ μικρότερη της σταθεράς διάχυσης K (10^{-7} αντί $5*10^{-3}$), προκύπτει $\Delta t < 100000000$ το οποίο σημαίνει ότι ο αλγόριθμος είναι ευσταθής για τις δύο αριθμητικές μεθόδους για οποιαδήποτε επιλογή του Δt (όπως είδαμε στην ενότητα 2.1 η μέθοδος Crank-Nicolson δεν εφαρμόζεται σε μη γραμμικές διαφορικές εξισώσεις).

Στην διαδικασία $\Phi = \frac{\partial y}{\partial x}$ επειδή ο ρυθμός απογύμνωσης αποσπασμένου υλικού είναι θετικός

πήραμε το απόλυτο της κλίσης $\Phi = \left| \frac{\partial y}{\partial x} \right|$ με τα ακόλουθα αποτελέσματα:



Εικόνα 6: επίλυση της διαφορικής εξίσωσης $dy/dt=|dy/dx|((1+(dy/dx)^2)^{1/2})$ για $\alpha_3=8*10^{-5}$, $\Delta x=10$ μέτρα, $\Delta t=1000$ χρόνια, $t_{end}=250000$ χρόνια

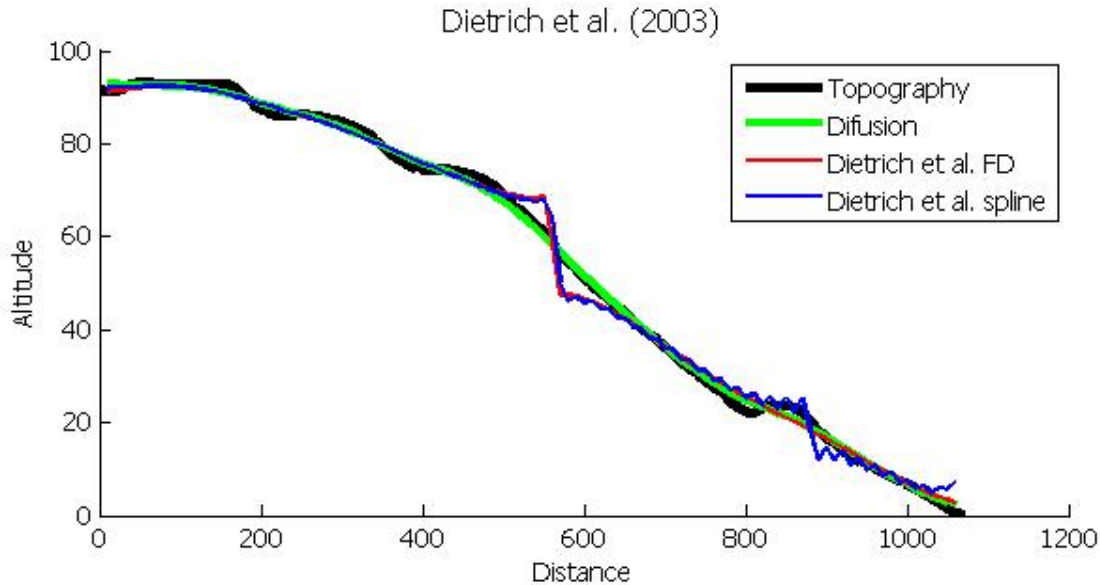
Στην εικόνα 6 παρατηρούμε την αστάθεια της μεθόδου 1 πεπερασμένων διαφορών και την καλή λειτουργία της μεθόδου 3 προσομοίωσης της τοπογραφίας με κυβικές spline. Έγιναν δοκιμές και σε αρκετές άλλες τομές με τα αποτελέσματα να αποδεικνύουν ότι για αυτή τη διαφορική εξίσωση η μέθοδος προσομοίωσης της τοπογραφίας με κυβικές spline είναι η καταλληλότερη.

3.2.1 Αριθμητική επίλυση δυο πρόσφατων διαφορικών εξισώσεων μορφολογικής εξέλιξης αναγλύφου

Στην εργασία Dietrich et al. (2003) διατυπώνεται ο νόμος διατήρησης της μάζας με την εξίσωση $\frac{\partial y}{\partial t} = U - \frac{\partial S}{\partial x}$ στην οποία U είναι ο ρυθμός ανύψωσης και S ο ρυθμός μεταφοράς του αποσαθρωμένου υλικού. Στην παραπάνω εργασία προτείνεται ένας μη γραμμικός ως προς $\frac{\partial y}{\partial x}$ ρυθμός μεταφοράς αποσαθρωμένου υλικού, που ισχύει για κλίσεις πάνω από μια «κρίσιμη» τιμή της μεταβλητής S_c (έστω $S_c = 20\%$) και διατυπώνεται η διαφορική εξίσωση

$$\frac{\partial y}{\partial t} = \frac{K \frac{\partial y}{\partial x}}{1 - \left(\frac{\partial y}{\partial x} / S_c \right)^2} \quad (7)$$

Λύνοντας αριθμητικά την διαφορική εξίσωση (7) λαμβάνουμε γραφική παράσταση:



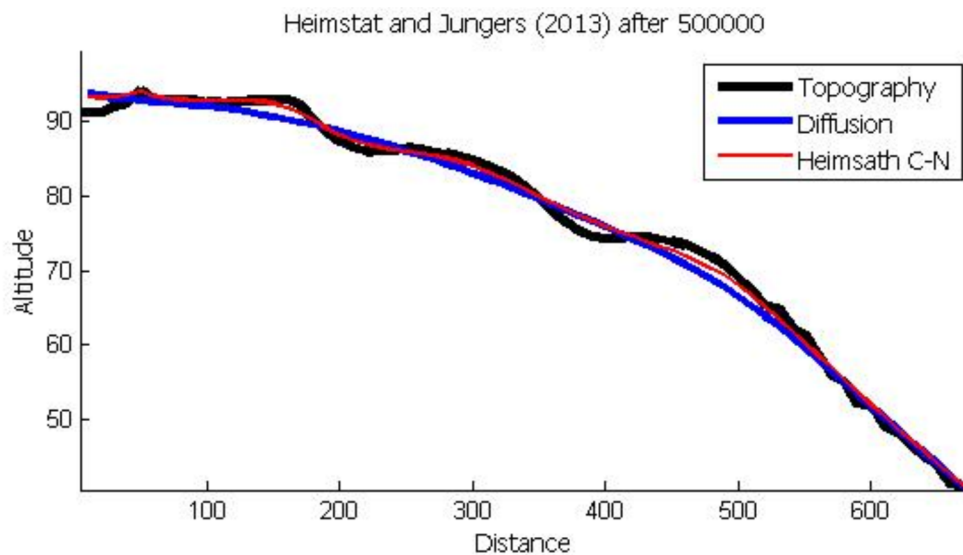
Εικόνα 7: επίλυση της διαφορικής εξίσωσης (7) για $K=5 \cdot 10^{-3}$, $\Delta x=10$ μέτρα, $\Delta t=1000$ χρόνια, $t_{end}=250000$ χρόνια

Διαπιστώθηκε ότι στα σημεία με $x=550$, $x=560$ μέτρα έχουμε κλίση μεγαλύτερη της τιμής 0.2 για αυτό χρησιμοποιήσαμε τιμή $S_c=0.2$. Παρατηρούμε στην εικόνα 7 ότι η καμπύλη που προκύπτει από τον τύπο των Dietrich et al. (2003) ακολουθεί την καμπύλη της διάχυσης εκτός της γειτονιάς των σημείων που υπερβαίνουν την κρίσιμη κλίση. Επίσης, παρατηρούμε ότι η αριθμητική μέθοδος 3 κυβικών splines είναι κάπως ασταθής μετά από το σημείο που υπερβαίνει τη κρίσιμη κλίση ενώ η μέθοδος 1 πεπερασμένων διαφορών είναι ευσταθής. Επομένως για τη διαδικασία απογύμνωσης που προτείνεται από τους Dietrich et al. (2003) πλεονεκτεί ως προς την ευστάθεια, η μέθοδος των πεπερασμένων διαφορών.

Στην εργασία των Heimsath and Jungers (2013) προτείνεται η ακόλουθη εξίσωση που απορρέει από το νόμο διατήρησης της μάζας:

$$\rho_r \frac{\partial y}{\partial t} = - \frac{\partial S}{\partial x} \quad (8)$$

όπου S ο ρυθμός μεταφοράς του αποσαθρωμένου υλικού και ρ_r πυκνότητα των επιφανειακών πετρωμάτων. Η (8) είναι μια γραμμική διαφορική εξίσωση και τα αποτελέσματα επιβεβαιώνουν τα συμπεράσματα της ενότητας 3.1.2 ότι η αριθμητική μέθοδος 2 Crank-Nicolson είναι η καταλληλότερη ενώ η μέθοδος 1 πεπερασμένων διαφορών είναι η ταχύτερη.



Εικόνα 8: επίλυση της διαφορικής εξίσωσης (8) για $K=5 \cdot 10^{-3}$, $\Delta x=10$ μέτρα, $\Delta t=1000$ χρόνια, $t_{end}=500000$ χρόνια

Στην εικόνα 8 στα μεγάλα υψόμετρα οι επιφανειακή πυκνότητα είναι μεγαλύτερη καθώς το υπόβαθρο εκδηλώνεται επιφανειακά για αυτό θα έχουμε μικρότερη απογύμνωση σε σχέση με αυτήν που προβλέπει η διαφορική εξίσωση διάχυσης.

4. Συμπεράσματα

Στην παρούσα εργασία συγκρίναμε την απόδοση τριών μεθόδων αριθμητικής ανάλυσης για την επίλυση γραμμικών και μη γραμμικών διαφορικών εξισώσεων με μερικές παραγώγους. Η ανάγκη χρήσης αριθμητικών μεθόδων προκύπτει από την έλλειψη αναλυτικής λύσης των διαφορικών εξισώσεων για πραγματικά δεδομένα. Έγιναν δοκιμές των αριθμητικών μεθόδων με την εξίσωση διάχυσης σε προσομοίωση ορεινού όγκου με πεπερασμένη βάση, καθώς για την εξίσωση αυτή υπάρχει αναλυτική λύση, και υπήρξε συμφωνία μεταξύ αναλυτικών και αριθμητικών λύσεων, για κατάλληλο βήμα Δx και Δt . Στη συνέχεια περάσαμε στην επίλυση των γραμμικών διαφορικών εξισώσεων χρησιμοποιώντας πραγματικά δεδομένα (δεδομένα μιας τομής τοπογραφικού χάρτη, απόσταση από την αρχή της τομής, υψόμετρο).

Από την θεωρία των πεπερασμένων διαφορών προκύπτει η ανάγκη χρήσης τοπογραφικών χαρτών υψηλής ανάλυσης ώστε να μπορούμε να ψηφιοποιήσουμε τις τομές μας με μικρό βήμα Δx (απόσταση ανάμεσα σε δυο διαδοχικά υψομετρικά). Η ακρίβεια των αριθμητικών μεθόδων εξαρτάται από τα βήματα που επιλέγουμε: χρονικό Δt και χωρικό Δx .

Είδαμε ότι για την λύση της διαφορική εξίσωση διάχυσης, η οποία είναι μια γραμμική διαφορική εξίσωση, η καταλληλότερη αριθμητική μέθοδος είναι η 2 Crank-Nicolson η οποία ανταποκρίνεται και για επιλογή πολύ μεγάλου Δt . Συνιστάται για υπολογισμό μορφολογικής εξέλιξης αναγλύφου μετά από μεγάλο χρονικό διάστημα. Η αριθμητική μέθοδος 1 πεπερασμένων διαφορών είναι η ταχύτερη αλλά είναι ευσταθής για μικρότερη τιμή Δt . Χρησιμοποιείται για τον υπολογισμό της μορφολογικής εξέλιξης αναγλύφου μετά από μικρό διάστημα. Η αριθμητική μέθοδος 3 κυβικών spline δεν συνιστάται για την λύση της εξίσωσης διάχυσης. Η αριθμητική επίλυση της εξίσωσης μεταφοράς (μια άλλη γραμμική διαφορική εξίσωση) μας οδήγησε σε ίδια συμπεράσματα με της εξίσωσης διάχυσης.

Στις μη γραμμικές διαφορικές εξισώσεις η αριθμητική μέθοδος 2 Crank-Nicolson δεν εφαρμόζεται. Κατά τις δοκιμές των αριθμητικών λύσεων των μη γραμμικών διαφορικών εξισώσεων διαπιστώθηκε ότι για τη

διαδικασία απογύμνωσης που προτείνει ο Scheidegger (1961) με $\Phi = \left| \frac{\partial y}{\partial x} \right|$ η μέθοδος 3 κυβικών spline είναι καταλληλότερη της μεθόδου 1 πεπερασμένων διαφορών. Για τη διαφορική εξίσωση που πρότειναν οι Dietrich et al. (2003) η μέθοδος 1 πεπερασμένων διαφορών είναι ευσταθέστερη της μεθόδου 3 κυβικών spline. Στις περισσότερες μη γραμμικές διαφορικές εξισώσεις (Scheidegger $\Phi=1$, Scheidegger $\Phi=y$) οι δύο αριθμητικοί μέθοδοι έχουν σύγκλιση.

Επειδή κάθε διαφορική εξίσωση αντιστοιχεί σε κάποια διαδικασία απογύμνωσης, σχεδιάζεται η ανάπτυξη λογισμικού που θα δίνει τη δυνατότητα στο χρήστη, με βάση τη διαδικασία απογύμνωσης που εκτιμάται ότι λαμβάνει χώρα, να επιλέγει την κατάλληλη διαφορική εξίσωση και την κατάλληλη αριθμητική μέθοδο για την περιγραφή της μορφολογικής εξέλιξης του ανάγλυφου. Ένα τέτοιο εργαλείο μπορεί να είναι χρήσιμο στη γεωμορφολογική έρευνα με αντικείμενο την ποσοτική περιγραφή χρονικής εξέλιξης γεομορφών.

Ευχαριστίες

Ευχαριστούμε το ΕΚΒΑΑ για τα δεδομένα που μας παρείχαν και το εργαστήριο Λίθος του ΕΚΒΑΑ για τον προσδιορισμό των επιφανειακών πυκνοτήτων.

Βιβλιογραφία

- Ahnert, F., 1988. Modeling landform change, Modeling Geomorphological Systems, pp. 375-400, J. Wiley.
- Anderson, R. S., 1994. Evolution of the Santa Cruz Mountains, California, through tectonic growth and geomorphic decay, J. Geophys. Res., 99, 20,161-20,174.
- Culling, W., 1960. Analytical theory of erosion, Journal of geology 68, 336-344.
- Dietrich, W., Bellugi, D., Sklar, L., Stock, J., 2003. Geomorphic transport laws for predicting landscape form and dynamics, American Geophysical Un. Monogr. series 135, 103-132.
- Fernandez, N. F., Dietrich, W. E., 1997. Hillslope evolution by diffusive process: the timescale for equilibrium adjustments, Water Resour. Res., 33(6), 1307-1318.
- Gabet, E. J., 2000. Gopher bioturbation: field evidence for non-linear hillslope diffusion, Earth Surf. Processes Landforms, 25, 1419-1428.
- Ganti V., Passalacqua P., Fofoula-Georgiou E., 2012. A sub-grid scale closure for nonlinear hillslope sediment transport model, J. Geophys. Res. Vol. 117.
- Gerald C. F., Wheatley P. O., 1994. Applied Numerical Analysis, Addison Wesley.
- Gilbert G. K., 1909. The convexity of hilltops, Journal Geol., 17, 344-350.
- Hancock G., Willgoose G., 2001. The production of digital elevation models for experimental model landscapes, Earth surf. Proc. And landforms, vol. 26, issue 5, pp. 457-490.
- Kirkby, M. J., 1969. Erosion by water on hillslopes in Water, earth, ed. R. J. Chorley, 220-38
- Heimsath, A. M., Jungers, M. C., 2013. Processes, Transport, Deposition and Landforms: Quantifying Creep, for non-commercial research educational use only, Elsevier.
- Hirano, M., 1975. Mathematical model and the concept of equilibrium in connection with slope shear ratio, Z. Geomorph. N. F., Suppl. Bd 25, 50-71.
- Howard, A. D., Dietrich, E. W., Seidl, M. A., 1994. Modeling fluvial erosion on regional to continental scales, J. Geoph. Res., vol. 99, pp. 13,971-13,986.
- Kirkby, M. J., 1971. Hillslope process-response models based on the continuity equation, Instr. Br. Geogr. Spec. Publ., 3, 15-30.
- Kooi, H., Beaumont, C., 1996. Large scale geomorphology: classical concepts reconciled and integrated with contemporary ideas via a surface process model, J. Geoph. Res., vol. 101, pp. 3361-3386.

- Leopold, L. B. and T. Maddock (1953). The hydraulic geometry of stream channels and some physiographic implications, U. S. geol. Surv. Prof. Pap. 252.
- Martin, Y., Church, M., 1997. Diffusion in landscape development models: on the nature of basic transport relations, *Earth Surf. Processes and Landforms*, 22, 273-279.
- Mudd, S. M., Furbish, D. J., 2004. Influence of chemical denudation on hillslope morphology, *J. Geoph. Res.*, 109.
- Musgrave, G. W. (1947). The quantitative evaluation of factors in water erosion: a first approximation, *J. Soil Wat. Conserv* 2, 133-8.
- Roering, J. J., Kirchner, J. W., Dietrich, W. E., 1999. Evidence for nonlinear, diffusive sediment transport on hillslopes and implications for landscape morphology, *Water Resour. Res.*, 36(3), 853-870.
- Scheidegger, A. E., 1961. Mathematical models of slope development, *B. Geol. Soc. Amer.*, 72, 37-50.
- Schumm, S. A., 1964. Seasonal variations of erosion rates on hillslopes in Western Colorado, *Z. Geomorph., Suppl.* 5, 215-238.
- Tucker, G. E., and Slingerland, R. L., 1997. Drainage basin responses to climate change, *Water Resour. Res.*, 33, 2031-2047.
- Tucker, G. E., Hancock, G. R., 2010. Modeling landscape evolution, *Earth Surf. Processes Landforms*, 35, 28-50.
- van der Beek, P., Braun, J., 1999. Numerical modeling of landscape evolution on geological time-scales: a parameter analysis and comparison with south-eastern highlands of Australia, *Basin Res.*, 10, 49-68.
- Zauderer, E., 1989. *Partial differential equations of applied mathematics* 2nd edition, John Wiley and Sons. New York.
- Zingg, W., 1940. Degree and length of land slope as it affects soil loss, *Agric. Ang.* 21, 59-64
- Ακριβής, Γ., Δουγκαλής, Β., 2006. Αριθμητικές μέθοδοι για διαφορικές εξισώσεις, Εκδ. Παν. Κρήτης.