ΠΕΡΙ ΜΙΑΣ
ΑΞΙΟΣΗΜΕΙΩΤΟΥ ΟΡΙΖΟΥΣΗΣ

ΥΠΟ

Κ. ΜΑΛΤΕΖΟΥ

ΜΕΛΟΥΣ ΤΗΣ ΑΚΑΔΗΜΙΑΣ ΑΘΗΝΩΝ

ΤΑΚΤΙΚΟΥ ΚΑΘΗΓΗΤΟΥ ΤΟΥ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟΥ

ΚΑΙ ΕΘΝΙΚΟΥ ΜΕΤΣΟΒΕΙΟΥ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟΥ

ΠΕΡΙ ΜΙΑΣ ΑΞΙΟΣΗΜΕΙΩΤΟΥ ΟΡΙΖΟΥΣΗΣ

Εἰς τὴν παροῦσαν μελέτην θεωροῦμεν ὁριζούσας τινάς, ἀνηκούσας εἰς τὴν κατηγορίαν τῶν ὁριζουσῶν τοῦ Van-der-Monde, ὧν ἡ τιμὴ εἶναι ἀνεξάρτητος παραμέτρου τινὸς περιεχομένης εἰς τὰ στοιχεῖα αὐτῆς.

1. Θεωροῦμεν τὴν ὁρίζουσαν.

$$\Delta(\nu) \equiv \begin{vmatrix} 1 & \nu & \nu^2 \\ 1 & \nu+1 & (\nu+1)^2 \\ 1 & \nu+2 & (\nu+2)^2 \end{vmatrix}$$

Ἀποδεικνύεται ὅτι ὁ ἀ ρ ι θ μ ὸ ς $\Delta(\nu)$ δ ὲ ν ἐ ξ α ρ τ ᾶ τ α ι ἐ κ τ ο ῦ ν.

Πράγματι ἔχομεν

$$\Delta'_{\nu}(\nu) \equiv \begin{vmatrix} 0 & \nu & \nu^2 \\ 0 & \nu+1 & (\nu+1)_2 \\ 0 & \nu+2 & (\nu+2)_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 & \nu^2 \\ 1 & 1 & (\nu+1)^2 \\ 1 & 1 & (\nu+2)^2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & \nu & 2\nu \\ 1 & \nu+1 & 2(\nu+1) \\ 1 & \nu+2 & 2(\nu+2) \end{vmatrix} = 0+0+0=0$$

ἐφαρμοζομένου τοῦ γνωστοῦ θεωρήματος παραγωγίσεως ὁριζούσης, καθ' ὃ αὕτη θὰ εἶναι ἄθροισμα τριῶν ὁριζουσῶν ἐχουσῶν στήλας ἀντιστοίχως τὰς παραγώγους τῆς α'. εἶτα τῆς β'. εἶτα τῆς γ'. στήλης ὡς πρὸς ν.

Ἐφ' ὅσον $\Delta'_{\nu}(\nu) \equiv 0$ ἄρα $\Delta(\nu)$ εἶναι ἀνεξάρτητος τοῦ ν. ὅ. ἔ. δ.

Εἰς τὸ αὐτὸ ἐξαγόμενον φθάνομεν προφανῶς διὰ τοῦ ὑπολογισμοῦ τῆς ὁριζούσης εὑρίσκοντες $\Delta(\nu) = 2$.

2. Λάβωμεν ἤδη τὴν γενικωτέραν ὁρίζουσαν.

$$\Delta(\nu,\mu,\varrho,\sigma) = \begin{vmatrix} 1 & \nu & \nu^2 & \nu^3 \\ 1 & (\nu+\mu) & (\nu+\mu)^2 & (\nu+\mu)^3 \\ 1 & (\nu+\varrho) & (\nu+\varrho)^2 & (\nu+\varrho)^3 \\ 1 & (\nu+\sigma) & (\nu+\sigma)^2 & (\nu+\sigma)^3 \end{vmatrix}, \ (\mu \neq \varrho \neq \sigma)$$

Εἶναι φανερόν, ὅτι ὁ ὑπ' αὐτῆς παριστώμενος ἀριθμὸς εἶναι διαιρετὸς διὰ μ, διότι

$$\Delta(0, \varrho, \sigma) \equiv 0$$

Ὁμοίως ἐπειδὴ $\Delta(\mu, 0, \sigma) \equiv 0$, $\Delta(\mu, \varrho, 0) \equiv 0$

συμπεραίνομεν, ὅτι ὁ Δ περιέχει τοὺς παράγοντας ϱ, σ.

Παρατηροῦμεν ἐπίσης ὅτι

$$\Delta\ (\mu,\ \mu,\ \sigma) \equiv o$$
$$\Delta\ (\mu,\ \varrho,\ \varrho) \equiv o$$
$$\Delta\ (\mu,\ \varrho,\ \mu) \equiv o$$

κατὰ συνέπειαν εἰς τὸ Δ περιέχονται οἱ παράγοντες $\varrho-\mu$, $\sigma-\varrho$, $\sigma-\mu$ ὥστε ἀναγκαίως ὁ Δ θὰ εἶναι τῆς μορφῆς

$$\Delta=\varrho\ \mu\ \sigma\ (\varrho-\mu)\ (\sigma-\varrho)\ (\sigma-\mu).\ K. \tag{1}$$

ἔνθα Κ δὲν ἐξαρτᾶται ἐκ τοῦ ν.

Πράγματι ἀρκεῖ νὰ βεβαιώσωμεν, ὅτι $\dfrac{d\Delta}{d\nu} \equiv o$

Δὲν ἔχομεν παρὰ νὰ λάβωμεν τὴν παράγωγον τῆς Δ ὡς πρὸς ν, ὅτε εὑρίσκομεν,

$$\frac{d\Delta}{d\nu}=\begin{vmatrix} o & \nu & \nu^2 & \nu^3 \\ o & \nu+\mu & (\nu+\mu)^2 & (\nu+\mu)^3 \\ o & \nu+\varrho & (\nu+\varrho)^2 & (\nu+\varrho)^3 \\ o & \nu+\sigma & (\nu+\sigma)^2 & (\nu+\sigma)^3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 & \nu^2 & \nu^3 \\ 1 & 1 & (\nu+\mu)^2 & (\nu+\mu)^3 \\ 1 & 1 & (\nu+\varrho)^2 & (\nu+\varrho)^3 \\ 1 & 1 & (\nu+\sigma)^2 & (\nu+\sigma)^3 \end{vmatrix} +$$

$$\begin{vmatrix} 1 & \nu & 2\nu & \nu^3 \\ 1 & \nu+\mu & 2(\nu+\mu) & (\nu+\mu)^3 \\ 1 & \nu+\varrho & 2(\nu+\varrho) & (\nu+\varrho)^3 \\ 1 & \nu+\sigma & 2(\nu+\sigma) & (\nu+\sigma)^3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & \nu & \nu^2 & 3\nu^2 \\ 1 & \nu+\mu & (\nu+\mu)^2 & 3(\nu+\mu)^2 \\ 1 & \nu+\varrho & (\nu+\varrho)^2 & 3(\nu+\varrho)^2 \\ 1 & \nu+\sigma & (\nu+\sigma)^2 & 3(\nu+\sigma)^2 \end{vmatrix} \equiv o$$

συνεπῶς ὁ Κ εἶναι παράγων ἀριθμητικός, ὃν ὑπολογίζομεν ἐνταῦθα ἐξισώνοντες τοὺς συντελεστὰς ἀμφοτέρων τῶν μελῶν τῆς (1) θεωρουμένων ὡς πολυωνύμων πρὸς μ, ϱ, σ.

Συντελεστὴς $\mu\ \varrho^2\ \sigma^3$ τοῦ Δ εἶναι (ἐκ τῆς θετικῆς διαγωνίου) 1

» » » $\varrho\ \mu\ \sigma\ (\varrho-\mu)(\sigma-\varrho)(\sigma-\mu)\ K$ εἶναι Κ ὅθεν $K=1$

καὶ ἔχομεν τὴν ἀξιοσημείωτον ταυτότητα.

$$\Delta \equiv \varrho\ \mu\ \sigma\ (\varrho-\mu)\ (\sigma-\varrho)\ (\sigma-\mu).$$

Διὰ $\mu=1$, $\varrho=2$, $\sigma=3$ ἔχομεν τὴν σχέσιν

$$\begin{vmatrix} 1 & \nu & \nu^2 & \nu^3 \\ 1 & \nu+1 & (\nu+1)^2 & (\nu+1)^3 \\ 1 & \nu+2 & (\nu+2)^2 & (\nu+2)^3 \\ 1 & \nu+3 & (\nu+3)^2 & (\nu+3)^3 \end{vmatrix} = 12$$

Παρατήρησις: Δυνάμεθα ἐπὶ παραδείγματι νὰ θεωρήσωμεν τὸ πρωτοβάθμιον πολυώνυμον $f\ (\nu) \equiv \alpha\nu+\beta$ ὡς πρὸς ν καὶ νὰ βεβαιώσωμεν, ὅτι ἡ ὁρίζουσα

$$\Delta=\begin{vmatrix} 1 & \alpha\nu+\beta & (\alpha\nu+\beta)^2 & (\alpha\nu+\beta)^3 \\ 1 & \alpha\nu+\beta+\varrho & (\alpha\nu+\beta+\mu)^2 & (\alpha\nu+\beta+\varrho)^3 \\ 1 & \alpha\nu+\beta+\mu & (\alpha\nu+\beta+\varrho)^2 & (\alpha\nu+\beta+\mu)^3 \\ 1 & \alpha\nu+\beta+\sigma & (\alpha\nu+\beta+\sigma)^2 & (\alpha\nu+\beta+\sigma)^3 \end{vmatrix},\ (\mu \neq \varrho \neq \sigma)$$

εἶναι ἀνεξάρτητος τοῦ ν, τοῦ α, καὶ τοῦ β.

Πράγματι: αἱ παράγωγοι

$$\frac{d\Delta}{d\nu}, \frac{d\Delta}{d\alpha}, \frac{d\Delta}{d\beta}$$

εἶναι μηδὲν καὶ συνεπῶς ἡ ὁρίζουσα Δ ἐξαρτᾶται μόνον ἐκ τῶν μ, ρ, σ ἔχουσα τιμὴν

$$\Delta = \rho\ \mu\ \sigma\ (\rho-\mu)\ (\sigma-\rho)\ (\sigma-\mu).$$

3. Θεωροῦμεν τέλος τὴν ὁρίζουσαν

$$\Delta(\nu, \mu_1, \mu_2 .., \mu_m) = \begin{vmatrix} 1 & \nu & \nu^2 & & \nu^m \\ 1 & \nu+\mu_1 & (\nu+\mu_1)^2 & \dots & (\nu+\mu_1)^m \\ 1 & \nu+\mu_2 & (\nu+\mu_2)^2 & \dots & (\nu+\mu_2)^m \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & \nu+\mu_m & (\nu+\mu_m)^2 & \dots & (\nu+\mu_m)^m \end{vmatrix} \equiv \Delta(\nu, \mu_i) (i=1,2,..,m)$$

Ἐπειδὴ $\Delta(\nu, o) \equiv o$ ἄρα ἡ ὁρίζουσα περιέχει τὸν παράγοντα μ_i καὶ συνεπῶς ὁ ὑπ' αὐτῆς παριστώμενος ἀριθμὸς εἶναι διαιρετὸς ὑπὸ τοῦ $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_m$

Ὁμοίως $\Delta(\nu, \mu_1, \mu_1, \mu_3, .., \mu_m) \equiv o$, ἄρα διαιρεῖται ἐπὶ πλέον ὑπὸ τῆς διαφορᾶς $\mu_2 - \mu_1$

Ἔχομεν κατ' αὐτὸν τὸν τρόπον ὅτι ὁ Δ διαιρεῖται ὑπὸ τοῦ γινομένου

$$\prod^{i,j} (\mu_i - \mu_j) \qquad \begin{pmatrix} i=1,2,..,m \\ j=1,2,..,m \end{pmatrix}, \quad (i \neq j)$$

αἱ διαφοραὶ $\mu_i - \mu_j$ ἀνάγονται εἰς τοὺς συνδυασμοὺς τῶν $\mu_1, \mu_2, .., \mu_m$ ἀνὰ δύο.

Κατὰ συνέπειαν

$$\Delta = c.\ \mu_1\ \mu_2\ ..\ \mu_m \prod^{i,j} (\mu_i - \mu_j),$$

ὁ c δὲν ἐξαρτᾶται ἐκ τοῦ ν διότι, διὰ παραγωγίσεως φαίνεται, ὡς καὶ εἰς τὰς προηγουμένας περιπτώσεις,

$$\frac{d\Delta}{d\nu} \equiv o$$

πρὸς ὑπολογισμὸν τοῦ c, λαμβάνομεν τὸν διαγώνιον ὅρον καὶ ἐξισοῦμεν τὸν συντελεστὴν τοῦ $\mu_1\ \mu_2^2\ \mu_3^3 \dots \mu_m^m$ καὶ ἔχομεν $c=1$.

Μερικὴ περίπτωσις. Διὰ $\mu_1 = 1$, $\mu_2 = 2, .., \mu_m = m$ εὑρίσκομεν.

$$\Delta = 1!\ 2!\ 3! \dots m!$$

4. Τὸ οὐσιῶδες συμπέρασμα εἰς τὰς ὡς ἄνω ὁριζούσας εἶναι, ὅτι ἡ ἀριθμητικὴ αὐτῶν τιμὴ εἶναι ἀνεξάρτητος παραμέτρου τινὸς περιεχομένης εἰς τὰ στοιχεῖα τῆς ὁριζούσης.

Ἐπὶ πλέον ὅτι ἡ ἀριθμητικὴ αὐτῶν τιμὴ εὑρίσκεται ἄνευ ἀριθμητικῶν ὑπολογισμῶν, στηρίζεται δὲ ἐπὶ τοῦ κλασσικοῦ θεωρήματος, ὅτι τὸ πολυώνυμον f (ν), ἂν f (α) $\equiv$ ο, εἶναι διαιρετὸν διὰ ν—α.

Θὰ ἦτο ἐνδιαφέρον νὰ μελετηθῇ ἡ μορφὴ τῶν ὁριζουσῶν, ὧν ἡ τιμὴ εἶναι ἀνεξάρτητος παραμέτρου τινὸς τῶν στοιχείων τῆς ὁριζούσης, ὡς συμβαίνει εἰς Δ (ν, μ_i).