ΕΝ ΘΕΩΡΗΜΑ ΤΗΣ ΑΛΓΕΒΡΑΣ

ΥΠΟ

ΘΕΟΔΩΡΟΥ ΒΑΡΟΠΟΥΛΟΥ

1. Ὁ κ. P. Montel εἰς τὴν σελ. 3 τοῦ ὑπομνήματός του «Sur les modules des zéros des polynomes» [1] ἀπέδειξε τὸ ἑξῆς θεμελιῶδες θεώρημα τῆς Ἀλγέβρας

«ἡ ἐξίσωσις

$$P_k(x) \equiv 1 + x + a_1 x^{n_1} + a_2 x^{n_2} + \dots + a_{k-1} x^{n_{k-1}} = 0$$

$$(1 < n_1 < n_2 < \dots < n_{k-1})$$

ἔχει πάντοτε μίαν ρίζαν ἧς τὸ μέτρον δὲν ὑπερβαίνει τὸν ἀριθμὸν k»

Εἰς τὸ ὡς ἄνω ὑπόμνημα τοῦ κ. Montel γίνεται ἡ ἀπόδειξις πρῶτον δι᾿ ἐξισώσεις τῆς μορφῆς

$$P_2(x) = 1 + x + ax^n \qquad (1 < n)$$

2. Προτιθέμεθα νὰ δόσωμεν μίαν ἁπλουστάτην ἀπόδειξιν τῆς ὡς ἄνω προτάσεως τοῦ κ. Montel, παρατηροῦντες ὅτι τὸ ὅριον διὰ τὴν ρίζαν τῆς τριωνύμου ἐξισώσεως εἶναι ὁ ἀριθμὸς $\frac{n}{n-1}$, ὅστις δὲν ἐξαρτᾶται εἰ μὴ ἐκ τοῦ ἐκθέτου n, οὐδόλως δὲ ἐκ τοῦ συντελεστοῦ a.

Τότε ἀποδεικνύομεν ὅτι διὰ τὸ πολυώνυμον $P_k(\chi)$ ὑπάρχει μία ρίζα ἧς τὸ μέτρον δὲν ὑπερβαίνει τὸν ἀριθμὸν

$$\frac{n_1}{n_1-1} \cdot \frac{n_2}{n_2-1} \cdot \dots \cdot \frac{n_{k-1}}{n_{k-1}-1}$$

ὅστις προφανῶς δὲν ὑπερβαίνει τὸν k.

Πράγματι, θεωροῦμεν τὸ πολυώνυμον $Q(x_1)$ ὅπερ ἔχει ρίζας τὰ ἀντίστροφα τῶν ριζῶν τοῦ $P_k(x)$, καὶ λαμβάνομεν τὸ πολυώνυμον $R_{k-1}(X_1)$, τῆς σελίδος 4 τοῦ ὡς ἄνω ὑπομνήματος τοῦ κ. Montel, καὶ X, τὴν ρίζαν τοῦ μεγίστου μέτρου, τότε

$$x_1 = \left(1 - \frac{1}{n_{k-1}}\right) X_1$$

εἶναι ἡ ρίζα μεγίστου μέτρου τοῦ πολυωνύμου $Q_k(x_1)$.

ὅθεν

$$|x_1| = \left|1 - \frac{1}{n_{k-1}}\right| \, |X_1| \,,$$

[1] Annales de l' École Normale Superieure, (3), XL, Janvier 1923.

καὶ

$$|x| = \frac{n_{k-1}}{n_{k-1}-1}\,|X|,$$

ὅπου $|X|$ παριστᾷ τὸ μέγιστον μέτρον τῶν ῥιζῶν τοῦ πολυωνύμου:

$$1 + X \cdots + a_{k-2}X^{n_{k-2}}$$

Συνεπῶς ἂν τὸ θεώρημα ἰσχύῃ διὰ $P_{k-1}(x)$, θὰ ἰσχύῃ καὶ διὰ τὸ πολυώνυμον $P_k(x)$, ἐπειδὴ δὲ διὰ $K=1,2$ εἶναι ἀληθὲς ἄρα ὑπάρχει ῥίζα τοῦ $P_k(x)$ ἐπαληθεύουσα τὴν σχέσιν

$$|x| \leqq \frac{n_1}{n_1-1}\cdot\frac{n_2}{n_2-1}\cdots\frac{n_{k-1}}{n_{k-1}-1} \leqq k.$$

καὶ τὸ θεώρημα εὑρίσκεται ἀποδεδειγμένον.