ΠΕΡΙ ΤΗΣ ΚΙΝΗΣΕΩΣ ΥΛΙΚΟΥ ΣΗΜΕΙΟΥ ΕΠΙ ΣΤΑΘΕΡΑΣ ΚΩΝΙΚΗΣ ΕΠΙΦΑΝΕΙΑΣ

ΥΠΟ

ΟΘΩΝΟΣ ΠΥΛΑΡΙΝΟΥ

ΚΑΘΗΓΗΤΟΥ ΤΟΥ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟΥ ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

Ψηφιακή Βιβλιοθήκη Θεόφραστος - Τμήμα Γεωλογίας. Α.Π.Θ.

ΠΕΡΙ ΤΗΣ ΚΙΝΗΣΕΩΣ ΥΛΙΚΟΥ ΣΗΜΕΙΟΥ ΕΠΙ ΣΤΑΘΕΡΑΣ ΚΩΝΙΚΗΣ ΕΠΙΦΑΝΕΙΑΣ

Ἡ κίνησις ὑλικοῦ σημείου ἐπὶ τυχούσης σταθερᾶς ἐπιφανείας ἄνευ τριβῆς εἶναι πάντοτε δυνατόν, ὡς γνωστόν, νὰ μελετηθῇ τῇ βοηθείᾳ ἐξισώσεων ἀνεξαρτήτων τῆς ἐπὶ τοῦ σημείου ἀσκουμένης ἀντιδράσεως τῆς ἐπιφανείας, χρησιμοποιουμένων εἴτε ἀμφοτέρων τῶν ἐν τῇ περιπτώσει ταύτῃ ἀντιστοιχουσῶν ἐξισώσεων τοῦ Lagrange, εἴτε τῆς μιᾶς τούτων καὶ τῆς ἐξισώσεως τῆς κινητικῆς ἐνεργείας.

Ὅταν ὅμως ἡ ἐπιφάνεια ἐφ' ἧς κινεῖται τὸ σημεῖον εἶναι *κωνική* δυνάμεθα νὰ μορφώσωμεν καὶ ἄλλην ἐξίσωσιν ἀνεξάρτητον τῆς ἀντιδράσεως τῆς ἐπιφανείας, τῆς ὁποίας ἡ χρησιμοποίησις ἐνδείκνυται εἰς ὡρισμένας περιπτώσεις.

Ἄν, ὄντως, F ἡ ἐπὶ τοῦ σημείου ἀπ' εὐθείας ἐνεργοῦσα δύναμις, N ἡ ἀντίδρασις τῆς ἐπιφανείας, κάθετος ἐπὶ τὴν ἐπιφάνειαν εἰς ἑκάστην θέσιν τοῦ κινητοῦ μὴ ὑπαρχούσης τριβῆς, καὶ b ἡ ἐπιτάχυνσις αὐτοῦ, ἡ κινοῦσα τὸ σημεῖον δύναμις θὰ εἶναι

(1) $$m\,b = F + N,$$

ἡ δὲ ροπὴ ταύτης ὡς πρὸς τὴν κορυφὴν τῆς ἐπιφανείας, λαμβανομένην ὡς ἀρχὴν τοῦ συστήματος ἀναφορᾶς,

(2) $$m\,b \wedge r = F \wedge r + N \wedge r,$$ [1]) ἔνθα

r ἡ ὁρίζουσα τὸ σημεῖον ἀπὸ τῆς κορυφῆς τῆς ἐπιφανείας διανυσματικὴ ἀκτίς.

Ἐξ ἄλλου ἂν v ἡ ταχύτης τοῦ σημείου, ἡ κινητικὴ ροπὴ αὐτοῦ ὡς πρὸς τὴν ἀρχὴν τῶν συντεταγμένων θὰ εἶναι

$$m\,v \wedge r,$$

---

[1]) Διὰ τῶν συμβόλων $\wedge$ καὶ $\times$ παριστῶμεν ἀντιστοίχως τὸ γεωμετρικὸν καὶ τὸ ἀλγεβρικὸν γινόμενον δύο διανυσμάτων.

Ψηφιακή Βιβλιοθήκη Θεόφραστος - Τμήμα Γεωλογίας. Α.Π.Θ.

ἡ δὲ παράγωγος τοῦ τετραγώνου τοῦ διανύσματος τούτου ὡς πρὸς τὸν χρόνον:

$$\frac{d}{dt}\left|(mv)\wedge r\right|^2 = 2\left|(mv)\wedge r\right| \times \frac{d}{dt}\left|(mv)\wedge r\right| =$$

$$2\left|(mv)\wedge r\right| \times \left|(mb)\wedge r\right|\cdot$$

καὶ λόγῳ τῆς (2)

$$(3)\ \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left|(mv)\wedge r\right|^2 = \left|(mv)\wedge r\right| \times \left|F\wedge r\right| + \left|(mv)\wedge r\right| \times \left|N\wedge r\right|\cdot$$

ἀλλὰ

$$\left|(mv)\wedge r\right| \times \left|N\wedge r\right| = m\left|(v\times N)\, r^2 - (v\times r)(N\times r)\right| = 0,$$

διότι $v\times N = N\times r = 0$·

ἑπομένως

$$(4)\qquad \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left|(mv)\wedge r\right|^2 = \left|(mv)\wedge r\right| \times \left|F\wedge r\right|:$$

ἐξίσωσις ἀνεξάρτητος τῆς ἀντιδράσεως τῆς ἐπιφανείας.

Θὰ ἐξετάσωμεν ἤδη δύο περιπτώσεις εἰς τὰς ὁποίας ἡ χρησιμοποίησις τῆς ἐξισώσεως ταύτης ἄγει εἰς συμπεράσματα ἄξια λόγου.

I. Θεωρήσωμεν ὑλικὸν σημεῖον εὑρισκόμενον ἐν τῷ πεδίῳ κεντρικῆς δυνάμεως καὶ ἠναγκασμένον νὰ κινῆται ἐπὶ κωνικῆς ἐπιφανείας ἐχούσης κορυφὴν τὸ κέντρον ἀφ᾿ οὗ ἐκπορεύεται ἡ δύναμις τοῦ πεδίου.

Ἂν, ὡς ἀνωτέρω, ληφθῇ ἡ κορυφὴ τῆς ἐπιφανείας ὡς ἀρχὴ τοῦ συστήματος ἀναφορᾶς, θὰ εἶναι

$$F\wedge r = 0,$$

διότι ἡ F εἶναι ἐν τῇ ἐν λόγῳ περιπτώσει δύναμις κεντρικὴ ἐκπορευομένη ἀπὸ τῆς ἀρχῆς καὶ ἡ (4) γίνεται

$$\frac{d}{dt}\left|(mv)\wedge r\right|^2 = 0 \quad \text{ἤτοι}$$

$$(5)\qquad \left|(mv)\wedge r\right|^2 = \text{σταθερᾷ}:$$

ἄλλαις λέξεσι *τὸ μέτρον τῆς κινητικῆς ῥοπῆς τοῦ σημείου ὡς πρὸς τὴν κορυφὴν τῆς ἐπιφανείας παραμένει κατὰ τὴν διάρκειαν τῆς κινήσεως σταθερόν.*

Ἐπίσης, ὡς εὐκόλως ἀναγνωρίζεται, τὸ μέτρον τῆς κινητικῆς ῥοπῆς τοῦ σημείου παραμένει σταθερὸν καὶ εἰς τὴν περίπτωσιν καθ᾿ ἣν τοῦτο εἶναι ὑποχρεωμένον νὰ κινῆται ἄνευ τριβῆς ἐπὶ σφαίρας ἐχούσης κέντρον τὸ σημεῖον ἀφ᾿ οὗ ἐκπορεύεται ἡ δύναμις τοῦ πεδίου.

Ψηφιακή Βιβλιοθήκη Θεόφραστος - Τμήμα Γεωλογίας. Α.Π.Θ.

Ἀλλὰ καὶ ἀντιστρόφως, ἂν ὑλικὸν σημεῖον εὑρισκόμενον ἐν τῷ πεδίῳ κεντρικῆς δυνάμεως εἶναι ἠναγκασμένον νὰ κινῆται ἐπὶ σταθερᾶς ἐπιφανείας ἄνευ τριβῆς, τὸ μέτρον τῆς κινητικῆς ροπῆς αὐτοῦ παραμένει κατὰ τὴν κίνησιν σταθερόν, μόνον ὅταν ἡ κίνησις γίνεται ἢ ἐπὶ κωνικῆς ἐπιφανείας ἐχούσης κορυφὴν τὸ κέντρον ἀφ᾽ οὗ ἐκπορεύεται ἡ δύναμις τοῦ πεδίου, ἢ ἐπὶ σφαίρας ἐχούσης κέντρον τὸ σημεῖον τοῦτο.

Πράγματι: ἂν τὸ κέντρον ἀφ᾽ οὗ ἐκπορεύεται ἡ δύναμις τοῦ πεδίου ληφθῇ ὡς ἀρχὴ τοῦ συστήματος ἀναφορᾶς εἶναι δὲ

$$\left|(mv)\wedge r\right|^2 = \text{σταθερᾷ},$$

ἐπειδὴ $F\wedge r = 0$, ἐκ τῆς (3) προκύπτει

$$\left|(mv)\wedge r\right| \times \left|N\wedge r\right| = 0,$$

ἤ, ἐπειδὴ εἶναι $vxN = 0$ μὴ ὑπαρχούσης τριβῆς

$$(v\times r)\ (N\times r) = 0, \text{ ὁπόθεν}$$

ἢ (α) $$v\times r = 0$$

ἢ (β) $$N\times r = 0.$$

Αἱ ἐπιφάνειαι αἱ ἀντιστοιχοῦσαι εἰς τὴν (α) εἶναι σφαῖραι ἔχουσαι κοινὸν κέντρον τὴν ἀρχήν: διότι

$$v\times r = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}(r^2)$$

καὶ ἐκ τῆς (α) $r^2 =$ σταθ.

Αἱ δὲ ἀντιστοιχοῦσαι εἰς τὴν (β) εἶναι κῶνοι ἔχοντες ὡς κορυφὴν τὴν ἀρχήν:

Διότι, ἂν $f(x, y, z) = 0$ ἡ ἐξίσωσις τῆς ἐπιφανείας ἐφ᾽ ἧς ὑποτίθεται κινούμενον τὸ σημεῖον, ἡ ἀντίδρασις N, ὡς κάθετος ἐπὶ τὴν ἐπιφάνειαν θὰ εἶναι συγγραμμικὴ πρὸς τὸ διάνυσμα $\text{gradf}\left(\frac{df}{dx}, \frac{df}{dy}, \frac{df}{dx}\right)$, ἐπομένως θὰ εἶναι

(γ) $$N = \lambda\ \text{gradf}$$

Δι᾽ ἀπαλοιφῆς τοῦ N μεταξὺ τῶν (β) καὶ (γ) προκύπτει

$$\lambda\ \text{grad}\ f\times r = 0,$$

ἐπειδὴ δὲ $\lambda \neq 0$, ἐφ᾽ ὅσον ἀποκλείομεν τὰ διὰ τῆς ἀρχῆς διερχόμενα ἐπίπεδα ἐφ᾽ ὧν ἡ κίνησις εἶναι ἐλευθέρα, θὰ εἶναι

$$\text{gradf}\times r = 0 \text{ ἢ}$$

$$x\frac{df}{dx} + y\frac{df}{dy} + z\frac{df}{dz} = 0$$

Ψηφιακή Βιβλιοθήκη Θεόφραστος - Τμήμα Γεωλογίας. Α.Π.Θ.

Αἱ διαφορικαὶ ἐξισώσεις τοῦ σμήνους τῶν χαρακτηριστικῶν τῆς ἐξισώσεως ταύτης εἶναι

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{z},$$

ὥστε αἱ χαρακτηριστικαὶ εἶναι αἱ εὐθεῖαι τῆς δέσμης τῆς ἐχούσης κέντρον τὴν ἀρχὴν καὶ ἑπομένως αἱ ὁλοκληρωτικαὶ ἐπιφάνειαι εἶναι οἱ κῶνοι *οἱ ἔχοντες κορυφὴν τὴν ἀρχὴν τῶν συντεταγμένων.*

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω δυνάμεθα λοιπὸν νὰ διατυπώσωμεν τὴν ἀκόλουθον πρότασιν :

Κατὰ τὴν ἄνευ τριβῆς κίνησιν ὑλικοῦ σημείου ἐπὶ σταθερᾶς ἐπιφανείας, εὑρισκομένης ἐν τῷ πεδίῳ κεντρικῆς δυνάμεως, ὑπὸ τὴν ἐνέργειαν τῆς δυνάμεως ταύτης, τὸ μέτρον τῆς κινητικῆς ῥοπῆς, ἑπομένως δὲ καὶ τῆς ῥοπῆς τῆς ταχύτητος αὐτοῦ, ὡς πρὸς τὸ κέντρον ἀφ' οὗ ἐκπορεύεται ἡ δύναμις τοῦ πεδίου παραμένει κατὰ τὴν διάρκειαν τῆς κινήσεως σταθερόν, πάντοτε καὶ μόνον ὅταν ἡ ἐπιφάνεια εἶναι κῶνος ἔχων κορυφὴν τὸ κέντρον τοῦ πεδίου ἢ σφαῖρα ἔχουσα κέντρον τὸ σημεῖον τοῦτο.

Ὑπάρχει, ἄλλαις λέξεσιν, εἰς τὰς ἀνωτέρω περιπτώσεις τὸ πρῶτον ὁλοκλήρωμα τοῦ συστήματος τῶν διαφορικῶν ἐξισώσεων τῆς κινήσεως

$$(v \wedge r)^2 = C^2 .$$

Περιοριζόμενοι εἰς τὴν περίπτωσιν τῆς κινήσεως ἐπὶ κωνικῆς ἐπιφανείας καὶ λαμβάνοντες ὑπ' ὄψει ὅτι τὸ μέτρον τῆς ῥοπῆς τῆς ταχύτητος ὑλικοῦ σημείου ὡς πρὸς τὴν ἀρχὴν εἶναι τὸ διπλάσιον τῆς παραγώγου, ὡς πρὸς τὸν χρόνον, τοῦ ἐμβαδοῦ τῆς ἐπιφανείας τῆς γραφομένης ὑπὸ τῆς διανυσματικῆς ἀκτῖνος τῆς ὁριζούσης τὸ κινητὸν ἀπὸ τοῦ σημείου τούτου, δυνάμεθα καὶ ἐδῶ νὰ διατυπώσωμεν τὴν ἐντελῶς ἀνάλογον μὲ τὸ εἰς τὴν περίπτωσιν τῆς ἐλευθέρας κεντρικῆς κινήσεως θεώρημα τῶν ἐμβαδῶν πρότασιν :

Τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τμήματος τῆς ἐπιφανείας τοῦ γραφομένου ὑπὸ τῆς ὁριζούσης τὸ κινητὸν ἀπὸ τῆς κορυφῆς αὐτῆς διανυσματικῆς ἀκτῖνος εἶναι ἀνάλογον τοῦ χρόνου.

Εἰς τὴν περίπτωσιν δὲ καθ' ἣν ἡ δύναμις τοῦ πεδίου προέρχεται ἐκ *δυναμικοῦ*, ὁπότε, ὡς γνωστόν, ἡ ἔντασις αὐτῆς εἶναι συνάρτησις μόνης τῆς ἀποστάσεως τοῦ κινουμένου σημείου ἀπὸ τοῦ κέντρου τοῦ πεδίου, τῇ βοηθείᾳ τοῦ ἐν λόγῳ πρώτου ὁλοκληρώματος καὶ τοῦ ἐν τῇ περιπτώσει ταύτῃ ἐκ τῆς ἐξισώσεως τῆς κινητικῆς ἐνεργείας προκύπτοντος, τὸ σύστημα τῶν διαφορικῶν ἐξισώσεων τῆς κινήσεως ἀνάγεται εἰς σύστημα πρώτης τάξεως.

Πράγματι : Ἂν ὡς σύστημα ἀναφορᾶς ληφθῇ σύστημα πολικῶν ἐν τῷ χώρῳ συντεταγμένων μὲ πόλον τὴν κορυφὴν τῆς ἐπιφανείας, ἡ ταχύτης τοῦ κινητοῦ θὰ εἶναι

Ψηφιακή Βιβλιοθήκη Θεόφραστος - Τμήμα Γεωλογίας. Α.Π.Θ.

$$v\left(\frac{dr}{dt},\ r\frac{d\theta}{dt},\ r\ \eta\mu\theta\frac{d\varphi}{dt}\right),$$

ἡ δὲ ροπὴ ταύτης ὡς πρὸς τὴν ἀρχὴν

$$v\wedge r\left(0,\ -r\ \eta\mu.\theta\ \frac{d\varphi}{dt},\ r^2\ \frac{d\theta}{dt}\right)\cdot \text{ ὥστε}$$

$$(v\wedge r)^2 = r^4\ \left|\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 + \eta\mu.\ \theta\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2\right| = c.^2$$

ὁπόθεν

$$(6)\qquad \sqrt{1+\eta\mu.\ \theta\left(\frac{d\varphi}{d\theta}\right)^2}\ \frac{d\theta}{dt} = \pm\ \frac{c}{r^2},$$

ἔνθα $\varphi = \varphi\ (\theta)$ ἡ ἐξίσωσις τῆς κωνικῆς ἐπιφανείας εἰς τὸ ὑπ' ὄψει σύστημα συντεταγμένων.

Ἐξ ἄλλου ἂν σ (r) ἡ ἔντασις τῆς δυνάμεως τοῦ πεδίου καὶ $T=\frac{1}{2}mv^2$ ἡ κινητικὴ ἐνέργεια τοῦ σημείου, ἐκ τῆς ἐξισώσεως τῆς κινητικῆς ἐνεργείας προκύπτει

$$(\alpha)\qquad T = T_0 + \int_{r_0}^{r} \sigma\ (r)\ dr, \quad \text{ἔνθα}$$

T_0 ἡ ἀρχικὴ τιμὴ τῆς κινητικῆς ἐνεργείας καὶ r_0 ἡ ἀρχικὴ ἀπόστασις τοῦ σημείου ἀπὸ τῆς ἀρχῆς.

Ἐκ τῆς (α) προκύπτει

$$(\beta)\qquad v^2 = f\ (r) + h,$$

ἔνθα $$f\ (r) = \frac{2}{m}\int \sigma\ (r)\ dr \text{ καὶ } h \text{ σταθερά.}$$

Ἐπειδὴ δὲ συγχρόνως εἶναι $(v\wedge r)^2 = c^2$, ἐνῶ

$$(\gamma)\qquad (v\wedge r)^2 = v\ r^2 - (v\times r)^2 = v^2 r^2 - r^2\ \left(\frac{dr}{dt}\right)^2$$

ἐκ τῶν (β) καὶ (γ) προκύπτει

$$\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 = v^2 - \frac{c^2}{r^2} = f\ (r) - \frac{c^2}{r^2} + h = \psi\ (r),$$

ὁπόθεν

$$(7)\qquad dt = \pm\frac{dr}{\sqrt{\psi\ (r)}}.$$

Τὸ σημεῖον τοῦ ριζικοῦ ὁρίζεται ἐκ τῶν ἀρχικῶν δεδομένων τῆς κινήσεως ὅπως καὶ εἰς τὴν περίπτωσιν τῆς ἐλευθέρας κεντρικῆς κινήσεως [1]).

---

[1]) Appel. Traité de Mécanique Rationelle. tom. I. p. 388.

Ψηφιακή Βιβλιοθήκη Θεόφραστος - Τμήμα Γεωλογίας. Α.Π.Θ.

Αἱ ἐξισώσεις (6) καὶ (7), ἐξισώσεις πρώτης τάξεως, εἶναι αἱ διαφορικαὶ ἐξισώσεις τῆς κινήσεως· αἱ εἰς ταύτας εἰσερχόμεναι σταθεραὶ ὁρίζονται ἐκ τῶν ἀρχικῶν δεδομένων τῆς κινήσεως.

Δι' ἀπαλοιφῆς τοῦ dt μεταξὺ τῶν (6) καὶ (7) λαμβάνομεν

$$\sqrt{1 + \text{ημ.}^2\theta \left(\frac{d\varphi}{d\theta}\right)^2} = \pm \frac{cdr}{\sqrt{\psi(r)}};$$

τὴν διαφορικὴν ἐξίσωσιν τῆς οἰκογενείας τῶν τροχιῶν, αἱ ὁποῖαι ἀντιστοιχοῦν εἰς ὡρισμένον σύστημα τιμῶν τῶν σταθερῶν c καὶ h.

Ἐὰν ἤδη ἐπὶ πλέον ὑποτεθῇ ὅτι αἱ ὀρθογώνιοι τροχιαὶ τῶν γενετειρῶν τῆς ἐπιφανείας, καμπύλαι ὁμοιόθετοι ὡς πρὸς τὴν κορυφὴν αὐτῆς, εἶναι καμπύλαι κλεισταὶ ἄνευ ἀνωμάλων σημείων, τὰ ἐκ τῆς διερευνήσεως τῶν ἐξισώσεων τῆς κινήσεως προκύπτοντα συμπεράσματα, ἰδίᾳ τὰ ἀφορῶντα τὴν μορφὴν τῶν τροχιῶν αἵτινες ἀντιστοιχοῦν εἰς ὡρισμένον σύστημα τιμῶν τῶν σταθερῶν c καὶ h, εἶναι ἐν πολλοῖς ἀνάλογα μὲ τὰ εἰς τὴν ὑπὸ τὰς αὐτὰς συνθήκας ἐλευθέραν κεντρικὴν κίνησιν διατυπούμενα [1]), δεδομένου ἄλλωστε ὅτι ἡ (7) εἶναι ἡ αὐτὴ μὲ τὴν εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην ἐμφανιζομένην.

Ἐν πρώτοις παρατηροῦμεν ὅτι εἰς τὴν οἰκογένειαν τῶν τροχιῶν αἵτινες ἀντιστοιχοῦν εἰς τὸ ἐκλεγὲν σύστημα τῶν τιμῶν τῶν σταθερῶν c καὶ h, ἀνήκουν καὶ ὅσαι τῶν ὀρθογωνίων τροχιῶν τῶν γενετειρῶν τῆς ἐπιφανείας, τῆς οἰκογενείας τῶν ὁποίων ἡ ἐξίσωσις εἶναι $r = \text{σταθ}$, ἀντιστοιχοῦν εἰς πολλαπλᾶς ῥίζας τῆς συναρτήσεως $\psi(r)$.

Πράγματι: διότι ἐν τῇ περιπτώσει ταύτῃ πρέπει νὰ εἶναι συγχρόνως $\frac{dr}{dt} = 0$ καὶ $\frac{d^2r}{dt^2} = 0$. Ἂν ὅμως r_0 εἶναι ἡ σταθερὰ ἀπόστασις τοῦ κινητοῦ ἀπὸ τῆς ἀρχῆς ἐκ τῆς (7) προκύπτει ἀφ' ἑνὸς μὲν $\psi(r_0) = 0$ καὶ ἀφ' ἑτέρου $\psi'(r_0) = 0$·

$$\text{διότι} \quad \frac{d^2r}{dt^2} = \frac{d}{dt}\sqrt{\psi(r)} = \frac{\psi'(r)}{2\sqrt{\psi(r)}}\frac{dr}{dt} = \frac{1}{2}\psi'(r).$$

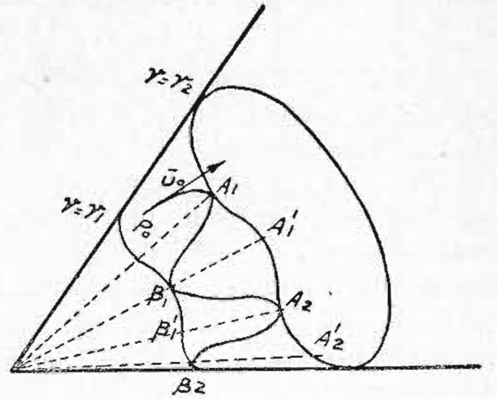
Θεωρήσωμεν ἤδη τὸ τμῆμα τῆς ἐπιφανείας τὸ περιλαμβανόμενον μεταξὺ τῶν ὀρθογωνίων τροχιῶν $r = r_1$ καὶ $r = r_2$ τῶν γενετειρῶν, ἔνθα r_1 καὶ r_2 δύο ἁπλαῖ διαδοχικαὶ ῥίζαι τῆς συναρτήσεως $\psi(r)$, ἐνῷ $r_1 < r_2$, ὑποθέσωμεν δὲ ὅτι $\psi(r) > 0$ ἐν τῷ μεταξὺ τῶν ῥιζῶν τούτων διαστήματι, διότι ἂν $\psi(r) < 0$ ἐν τῷ διαστήματι τούτῳ, δὲν ὑπάρχουν τροχιαὶ τοῦ κινητοῦ ἐν τῷ μεταξὺ τῶν δύο ἐν λόγῳ καμπύλων τμήματι τῆς ἐπιφανείας.

---

1) L. Lecornu. Conrs de Mécanique. T. I. p. 300-305.

Ψηφιακή Βιβλιοθήκη Θεόφραστος - Τμήμα Γεωλογίας. Α.Π.Θ.

Ἂν P_o (σχῆμα 1) ἡ ἀρχικὴ θέσις τοῦ κινητοῦ ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας καὶ λ. χ. $\left(\frac{dr}{dt}\right)_o > 0$, τὸ σημεῖον ἀπομακρυνόμενον τῆς ἀρχῆς συναντᾷ εἰς πεπερασμένον χρονικὸν διάστημα τὴν καμπύλην $r = r_2$, ἡ δὲ τροχιὰ αὐτοῦ ἐφάπτεται τῆς καμπύλης ταύτης· ἐπειδὴ δὲ δὲν δύναται νὰ κινηθῇ οὔτε ἐπὶ τῆς καμπύλης οὔτε πέραν αὐτῆς διότι ὅταν $r > r_2$ $\psi(r) < 0$, ἀπὸ τῆς θέσεως ταύτης θὰ κινηθῇ πλησιάζον πρὸς τὴν κορυφὴν μέχρις ὅτου συναντήσῃ τὴν καμπύλην $r = r_1$ ἧς πάλιν ἐφάπτεται· ἀπὸ τῆς νέας ταύτης ἄκρας θέσεως, κινούμενον πάντοτε κατὰ τὴν φορὰν ἀπομακρύνεται τῆς κορυφῆς, εἰς τρόπον ὥστε ἡ τροχιὰ αὐτοῦ περιλαμβανομένη πάντοτε ἐν τῷ μεταξὺ τῶν δύο καμπύλων $r = r_1$ καὶ $r = r_2$ τμήματι τῆς ἐπιφανείας, ἐφάπτεται διαδοχικῶς τῶν καμπύλων τούτων.



Σχ. 1

Ἔστωσαν A_1, B_1, A_2, B_2 κ. κ. ἑ. τὰ διαδοχικὰ σημεῖα ἐπαφῆς τῆς τροχιᾶς μετὰ τῶν δύο τούτων καμπύλων· ἂν t_1 καὶ t_2 οἱ ἀπαιτούμενοι χρόνοι διὰ νὰ διανυθοῦν τὰ τόξα $A_1 B_1$ καὶ $B_1 A_2$, θὰ εἶναι

$$t_1 = - \int_{r_2}^{r_1} \frac{dr}{\sqrt{\psi(r)}} \quad \text{καὶ} \quad t_2 = \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{\sqrt{\psi(r)}}$$

ἑπομένως $t_1 = t_2$ · ὥστε

Τὰ μεταξὺ τῶν ἄκρων διαδοχικῶν θέσεων τοῦ σημείου ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας τόξα τῆς τροχιᾶς αὐτοῦ διανύονται εἰς ἴσους χρόνους.

Ἐπειδὴ δὲ τὸ ὑπὸ τῆς διανυσματικῆς ἀκτῖνος, τῆς ὁριζούσης τὸ κινητὸν ἀπὸ τῆς κορυφῆς, γραφόμενον ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας ἐμβαδὸν εἶναι ἀνάλογον τοῦ χρόνου, προκύπτει ἐπίσης ὅτι καὶ *τὰ ὑπὸ τῶν γενετειρῶν τῶν ἀντιστοιχουσῶν εἰς τὰς διαδοχικὰς ἄκρας θέσεις καὶ τῶν τόξων τῆς τροχιᾶς περικλειόμενα τμήματα τῆς ἐπιφανείας ἔχουν ἐμβαδὰ ἴσα.*

Ἐπίσης ἂν διὰ s_1 καὶ s_2 παραστήσωμεν ἀντιστοίχως τὰ μήκη τῶν τόξων τῶν δύο καμπύλων $r = r_1$ καὶ $r = r_2$ μετρουμένων ἀπό τινος ἀρχῆς, θὰ εἶναι

$$ds_1 = r_1 \sqrt{(d\theta)^2 + \eta\mu.^2\theta\,(d\varphi)^2} \quad \text{καὶ} \quad ds_2 = r_2 \sqrt{(d\theta)^2 + \eta\mu.^2\theta\,(d\varphi)^2}$$

Ψηφιακή Βιβλιοθήκη Θεόφραστος - Τμήμα Γεωλογίας. Α.Π.Θ.

καὶ ἐκ τῶν (6) καὶ (7)

$$ds_1 = \pm \frac{r_1 \, cdr}{r^2 \sqrt{\psi(r)}} \quad \text{καὶ} \quad ds_2 = \pm \frac{r_2 \, cdr}{r^2 \sqrt{\psi(r)}}$$

Ἑπομένως τὰ τόξα τῶν δύο τούτων καμπύλων τὰ περιλαμβανόμενα μεταξὺ τῶν γενετειρῶν OA_1 καὶ OB_1 θὰ εἶναι

$$s_1 = -\int_{r_2}^{r_1} \frac{r_1 \, cdr}{r^2 \sqrt{\psi(r)}} \quad \text{καὶ} \quad s_2 = -\int_{r_2}^{r_1} \frac{r_2 \, cdr}{r^2 \sqrt{\psi(r)}}$$

τὰ δὲ περιλαμβανόμενα μεταξὺ τῶν OB_1 καὶ OA_2

$$s'_1 = \int_{r_1}^{r_2} \frac{r_1 \, cdr}{r_2 \sqrt{\psi(r)}} \quad \text{καὶ} \quad s'_2 = \int_{r_1}^{r_2} \frac{r_2 \, cdr}{r^2 \sqrt{\psi(r)}},$$

ἤτοι $s_1 = s'_1$ καὶ $s_2 = s'_2$ · ἄλλαις λέξεσι:

Τὰ μεταξὺ τῶν γενετειρῶν τῶν διαδοχικῶν ἄκρων θέσεων τοῦ κινητοῦ περιλαμβανόμενα τόξα ἑκατέρας τῶν δύο καμπύλων $r = r_1$ *καὶ* $r = r_2$ *εἶναι ἰσομήκη.*

Ἐκ τῆς ἰδιότητος ταύτης προκύπτει ὅτι ἡ τροχιὰ θὰ εἶναι καμπύλη κλειστή, τοῦ κινητοῦ διερχομένου διὰ τῶν αὐτῶν θέσεων, ὅταν τὸ ὅλον μῆκος ἑκάστης τῶν δύο καμπύλων $r = r_1$ καὶ $r = r_2$ εἶναι ἀκέραιον πολλαπλάσιον τοῦ μήκους τοῦ τμήματος αὐτῆς τοῦ περιλαμβανομένου μεταξὺ τῶν γενετειρῶν αἵτινες ἀντιστοιχοῦν εἰς δύο διαδοχικὰς ἄκρας θέσεις αὐτοῦ.

Σημειωτέον ὅτι τὰ ὁλοκληρώματα $\int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{\sqrt{\psi(r)}}$ καὶ $\int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r^2 \sqrt{\psi(r)}}$ εἶναι *πεπερασμένα* ἐφ' ὅσον r_1 καὶ r_2 εἶναι ἁπλαῖ ῥίζαι τῆς συναρτήσεως $\psi(r)$· διότι, ἐν τοιαύτῃ περιπτώσει, δυνάμεθα νὰ θέσωμεν

$$\psi(r) = (r - r_1)\,(r_2 - r)\,\psi_1(r), \text{ ἔνθα}$$

$\psi_1(r) > 0$ ἐν τῷ διαστήματι $r_2 \geq r \geq r_1$.

Ἑπομένως

$$\int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{\sqrt{\psi(r)}} = \int_{r_1}^{r_2} \frac{1}{\sqrt{\psi_1(r)}} \frac{dr}{\sqrt{(r - r_1)\,(r_2 - r)}} < \frac{1}{\sqrt{E}} \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{\sqrt{(r - r_1)\,(r_2 - r)}}$$

ἔνθα E τὸ ἐλάχιστον τῆς $\psi_1(r)$ ἐν τῷ μεταξὺ r_1 καὶ r_2 διαστήματι· ἂν θέσωμεν

$$r = r_1 \, \text{συν}^2 \upsilon + r_2 \, \text{ημ}^2 \upsilon$$

λαμβάνομεν

$$\int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{\sqrt{(r - r_1)\,(r_2 - r)}} = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\frac{r_2 - r_1}{r_2 + r_1}} \, d\upsilon = \pi \sqrt{\frac{r_2 - r_1}{r_2 + r_1}}$$

Ψηφιακή Βιβλιοθήκη Θεόφραστος - Τμήμα Γεωλογίας. Α.Π.Θ.

ὥστε

$$\int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{\sqrt{\psi(r)}} < \frac{\pi}{\sqrt{E}} \sqrt{\frac{r_2 - r_1}{r_2 + r_1}}$$

καὶ

$$\int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r_2 \sqrt{\psi(r)}} < \frac{\pi}{r_1^2 \sqrt{E}} \sqrt{\frac{r_2 - r_1}{r_2 + r_1}} \quad \text{ὅ. ἔ. δ.}$$

Ἔλθωμεν τέλος εἰς τὴν περιοχὴν μιᾶς διπλῆς ρίζης τῆς $\psi(r)$, ὑποθέτοντες μάλιστα ὅτι αὕτη περιλαμβάνεται μεταξὺ δύο ἁπλῶν ριζῶν αὐτῆς ἔστωσαν δὲ ϱ ἡ διπλῆ ρίζα καὶ r_1, r_2 αἱ δύο ἁπλαῖ, ἐνῶ $r_1 < \varrho < r_2$.

Ἡ καμπύλη $r=\varrho$ ἀνήκει εἰς τὴν οἰκογένειαν τῶν τροχιῶν, ὡς ἀνωτέρω ἐδείχθη· ἐπειδὴ δὲ ἐν τῷ μεταξὺ τῶν ριζῶν r_1 καὶ r_2 διαστήματι ἡ συνάρτησις $\psi(r)$ διατηρεῖ τὸ αὐτὸ σημεῖον, ἂν $\psi(r) < o$ ἐν τῷ διαστήματι τούτῳ, δὲν ὑπάρχει ἐν τῷ μεταξὺ τῶν δύο καμπύλων $r=r_1$ καὶ $r=r_2$ τμήματι τῆς ἐπιφανείας ἄλλη καμπύλη πλὴν τῆς $r=\varrho$, ἀνήκουσα εἰς τὴν οἰκογένειαν τῶν τροχιῶν· ἀντιθέτως ἂν $\psi(r) > o$ ὑπάρχουν ἄπειροι.

Ἔστω λοιπὸν $\psi(r) > o$ ἐν τῷ διαστήματι τούτῳ· ἂν τὸ σημεῖον εὑρίσκηται ἀρχικῶς ἐν τῷ μεταξὺ τῶν καμπύλων $r=r_1$ καὶ $r = \varrho$ τμήματι τῆς ἐπιφανείας, εἶναι δὲ συγχρόνως $\left(\frac{dr}{dt}\right)_o > o$, τὸ r θὰ εἶναι αὔξουσα συνάρτησις τοῦ χρόνου καὶ ἑπομένως τὸ κινητὸν θὰ πλησιάζῃ πρὸς τὴν καμπύλην $r = \varrho$· ἐφ᾽ ὅσον ὅμως $\psi(r) > 0$ ἐν τῷ ἐν λόγῳ διαστήματι δυνάμεθα νὰ θέσωμεν $\psi(r) = (\varrho - r)^2 \psi_1(r)$, ἔνθα $\psi_1(r) > 0$ διὰ $r_o \leq r \leq \varrho$, ὁπότε

$$\int_{r_o}^{\varrho} \frac{dr}{\sqrt{\psi(r)}} = \int_{r_o}^{\varrho} \frac{1}{\sqrt{\psi_1(r)}} \frac{dr}{\varrho - r} > \frac{1}{\sqrt{M}} \int_{r_o}^{\varrho} \frac{dr}{\varrho - r} = \infty$$

ἔνθα M τὸ μέγιστον τῆς $\psi_1(r)$ ἐν τῷ ἐν λόγῳ διαστήματι· ἐπειδὴ δὲ τὸ ἀνωτέρω ὁλοκλήρωμα ἰσοῦται πρὸς τὸ χρονικὸν διάστημα τὸ ἀπαιτούμενον ἵνα τὸ κινητὸν συναντήσῃ τὴν καμπύλην $r = \varrho$ προκύπτει ὅτι:

Τὸ σημεῖον παραμένει πάντοτε ἐν τῷ μεταξὺ τῶν δύο καμπύλων $r=r_1$ *καὶ* $r = \varrho$ *τμήματι τῆς ἐπιφανείας, συναντῶν μετὰ ἄπειρον χρόνον τὴν δευτέραν καμπύλην* $r = \varrho$.

Ἐξ ἄλλου τὸ τόξον s τῆς καμπύλης $r = \varrho$, τὸ περιλαμβανόμενον μεταξὺ τῆς γενετείρας τῆς ἀρχικῆς θέσεως καὶ τῆς εἰς τὴν τυχοῦσαν θέσιν τοῦ κινητοῦ ἀντιστοιχούσης θὰ εἶναι

$$s = \int_{r_o}^{r} \frac{\varrho c dr}{r^2 \sqrt{\psi(v)}} > \frac{c}{\varrho \sqrt{M}} \int_{r_o}^{\varrho} \frac{dr}{\varrho - r}$$

καὶ διὰ $r = \varrho$ εἶναι $s = \infty$· ἑπομένως:

Ἡ τροχιὰ ἔχει τὴν μορφὴν σπείρας ἀσυμπτώτου τῆς καμπύλης $r = \varrho$.

Ψηφιακή Βιβλιοθήκη Θεόφραστος - Τμήμα Γεωλογίας. Α.Π.Θ.

Εἰς ἐντελῶς ἀνάλογα συμπεράσματα φθάνομεν ὑποθέτοντες ἀρχικῶς τό σημεῖον εὑρισκόμενον ἐν τῷ μεταξὺ τῶν καμπύλων $r = \varrho$ καὶ $r = r_2$ τμήματι τῆς ἐπιφανείας. ἑπομένως:

Ἂν ϱ διπλῆ ρίζα τῆς συναρτήσεως $\psi(r)$ εὑρισκομένη μεταξὺ δύο ἁπλῶν ριζῶν r_1 καὶ r_2 αὐτῆς καὶ $\psi(r) > 0$ ἐν τῇ περιοχῇ τῆς ϱ αἱ ἐν τῷ μεταξὺ τῶν καμπύλων $r = r_1$ καὶ $r = r_2$ τμήματι τῆς ἐπιφανείας τροχιαὶ ἔχουν τὴν μορφὴν σπειρῶν κειμένων ἑκατέρωθεν τῆς καμπύλης $r = \varrho$ καὶ ἀσυμπτώτων αὐτῆς.

II. Ὑποθέσωμεν ἤδη ὅτι τὸ σημεῖον κινεῖται ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας ἄνευ ἀπ᾽ εὐθείας ἐπ᾽ αὐτοῦ ἐνεργούσης δυνάμεως.

Ἐν τοιαύτῃ περιπτώσει, ὡς γνωστόν, ἡ κίνησις εἶναι ὁμοιόμορφος, τοῦ μέτρου τῆς ταχύτητος παραμένοντος κατὰ τὴν διάρκειαν τῆς κινήσεως σταθεροῦ, ἡ δὲ τροχιὰ τοῦ σημείου εἶναι γεωδαισιακὴ γραμμὴ τῆς ἐπιφανείας.

Καὶ εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην, ἐφ᾽ ὅσον $F = 0$, ὑπάρχει ἐπίσης τὸ πρῶτον ὁλοκλήρωμα (5) καὶ ἑπομένως αἱ ἐξισώσεις τῆς κινήσεως θὰ προκύψουν ἐκ τῶν (6) καὶ (7) ἂν ὅπου $\psi(r)$ θέσωμεν $v_o^2 - \frac{c^2}{r^2}$, ἔνθα v_o τὸ σταθερὸν μέτρον τῆς ταχύτητος τοῦ σημείου:

$$dt = \pm \frac{r dr}{\sqrt{v_o^2 r^2 - c^2}}$$

καὶ

$$\sqrt{1 + \eta\mu.^2\theta \left(\frac{d\varphi}{d\theta}\right)^2}\ \frac{d\theta}{dt} = \pm \frac{c}{r^2}$$

δι᾽ ἀπαλοιφῆς δὲ τοῦ dt μεταξὺ τῶν δύο τούτων ἐξισώσεων λαμβάνομεν

$$\sqrt{1 + \eta\mu.^2\theta \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2}\ d\theta = \pm \frac{c dr}{r\sqrt{v_o^2 r^2 - c^2}}$$

ὁπόθεν δι᾽ ὁλοκληρώσεως

$$\int \sqrt{1 + \eta\mu.^2\theta \left(\frac{d\varphi}{d\theta}\right)^2}\ d\theta = \pm \int \frac{k dr}{r\sqrt{r^2 - k^2}} + \lambda, \text{ ἔνθα } k = \frac{c}{v_o},$$

λαμβάνομεν *τὴν ἐξίσωσιν τῆς οἰκογενείας τῶν γεωδαισιακῶν γραμμῶν τῆς κωνικῆς ἐπιφανείας* (μὲ δύο παράμετρους k καὶ λ).

Ψηφιακή Βιβλιοθήκη Θεόφραστος - Τμήμα Γεωλογίας. Α.Π.Θ.

Ἐπειδὴ δέ, ὡς ἀνωτέρω ἐδείχθη, εἶναι καὶ ἐν τῇ περιπτώσει ταύτῃ $(\mathrm{v}\wedge\mathrm{r})^2 = \mathrm{c}^2$, λαμβανομένου ὑπ᾿ ὄψει ὅτι $|\mathrm{v}\wedge\mathrm{r}| = \mathrm{v}\mathrm{r}\,\eta\mu\omega$, ἔνθα ω ἡ γωνία τῶν διανυσμάτων v καὶ r ἐνῶ $\mathrm{v} = \mathrm{v}_o =$ σταθ. θὰ εἶναι

$$\eta\mu\omega = \frac{\mathrm{c}}{\mathrm{v}_o\,\mathrm{r}} = \frac{\mathrm{k}}{\mathrm{r}}\cdot$$ ἄλλαις λέξεσι:

Τὸ ἡμίτονον τῆς γωνίας τὴν ὁποίαν σχηματίζει μία γεωδαισιακὴ γραμμὴ κωνικῆς ἐπιφανείας εἰς τυχὸν σημεῖον αὐτῆς μὲ τὴν διὰ τοῦ σημείου τούτου διερχομένην γενέτειραν τῆς ἐπιφανείας, εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογος τῆς ἀποστάσεως τοῦ σημείου τούτου ἀπὸ τῆς κορυφῆς τῆς ἐπιφανείας.

Παρατήρησις: Ἡ ἀνωτέρω θεωρηθεῖσα ὁμοιόμορφος κίνησις ἐπὶ γεωδαισιακῆς γραμμῆς κωνικῆς ἐπιφανείας, καθ᾿ ἣν μόνη ἐπὶ τοῦ σημείου ἐνεργοῦσα δύναμις εἶναι ἡ κάθετος ἀντίδρασις τῆς ἐπιφανείας, κάθετος ἑπομένως καὶ ἐπὶ τὴν διανυσματικὴν ἀκτῖνα τὴν ὁρίζουσαν τὸ σημεῖον ἀπὸ τῆς κορυφῆς τῆς ἐπιφανείας, εἶναι εἰδικὴ περίπτωσις τῆς λεγομένης ***καθέτου κινήσεως*** (mouvement normal), καθ᾿ ἣν ἡ ἐπιτάχυνσις τοῦ κινητοῦ εἶναι σταθερῶς κάθετος ἐπὶ τὴν ὁρίζουσαν τοῦτο ἀπό τινος σταθεροῦ κέντρου διανυσματικὴν ἀκτῖνα. Ἀνεγνωρίσθη δ᾿ ὅτι εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην τὸ μέτρον τῆς κινητικῆς ροπῆς αὐτοῦ ὡς πρὸς τὴν ἀρχὴν παραμένει κατὰ τὴν κίνησιν σταθερόν.

Δύναται ὅμως νὰ δειχθῇ γενικώτερον ὅτι εἰς τὴν περίπτωσιν καθ᾿ ἣν ἡ κίνησις ὑλικοῦ σημείου εἶναι ὁμοιόμορφος, τὸ δὲ μέτρον τῆς κινητικῆς ροπῆς αὐτοῦ ὡς πρὸς τὴν ἀρχὴν τοῦ συστήματος ἀναφορᾶς εἶναι σταθερὸν ἡ κίνησις εἶναι συγχρόνως καὶ κάθετος, ἐφ᾿ ὅσον ἡ ἀπόστασις τοῦ σημείου ἀπὸ τῆς ἀρχῆς εἶναι μεταβλητή.

Πράγματι: διὰ διαφορίσεως ὡς πρὸς τὸν χρόνον τῆς σχέσεως $(\mathrm{v}\wedge\mathrm{r})^2 = \mathrm{c}^2$ λαμβάνομεν

$$\frac{d}{dt}(\mathrm{v}\wedge\mathrm{r})^2 = 2\,(\mathrm{v}\wedge\mathrm{r}) \times (\mathrm{b}\wedge\mathrm{r}) = 0 \text{ ἢ}$$

$$\frac{d}{dt}(\mathrm{v}\wedge\mathrm{r})^2 = 2\,\left|(\mathrm{vxb})\,\mathrm{r}^2 - (\mathrm{vxr})\,(\mathrm{bxr})\right| = 0$$

ἐπειδὴ δὲ $\mathrm{vxb} = 0$, τῆς κινήσεως οὔσης ὁμοιομόρφου, καὶ $\mathrm{vxr} \neq 0$ ἐφ᾿ ὅσον ἐξ ὑποθέσεως r μεταβλητόν, θὰ εἶναι $\mathrm{bxr} = 0$, δηλαδὴ ἡ ἐπιτάχυνσις θὰ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ἀντίστοιχον διανυσματικὴν ἀκτῖνα.

Ψηφιακή Βιβλιοθήκη Θεόφραστος - Τμήμα Γεωλογίας. Α.Π.Θ.