ΠΕΡΙ ΤΟΥ ΜΕΤΡΟΥ ΤΩΝ ΡΙΖΩΝ ΤΩΝ ΠΟΛΥΩΝΥΜΩΝ

ΥΠΟ

Θ. ΒΑΡΟΠΟΥΛΟΥ

Περὶ τοῦ μέτρου τῶν ῥιζῶν τῶν πολυωνύμων

ὑπὸ *Θ. Βαροπούλου*

1. Θεωροῦμεν τὸ πολυώνυμον

$$f(z) = \alpha_0 + \alpha_1 z + \cdots + \alpha_{m-1} z^{m-1} + z^m \qquad (\alpha_m = 1)$$

εἰς τὸ ὁποῖον ὑποθέτομεν ὅτι ἔχομεν

$$|\alpha_0| + |\alpha_1| + \cdots + |\alpha_{m-1}| \leqq 1.$$

Εἶναι φανερὸν ὅτι πᾶσαι αἱ ῥίζαι τοῦ πολυωνύμου f (z) ἔχουσι μέτρον μικρότερον τῆς μονάδος.

Πράγματι, βάσει γνωστοῦ θεωρήματος (βλ. π. χ. Montel «Sur la limite supérieure du module des racines d'une équation algébrique» 2e Congrés des Mathématiciens Polonais à Wilno, 25 7bre 1931, p. 320), αἱ ῥίζαι τοῦ πολυωνύμου ἔχουσι μέτρον μικρότερον τοῦ μεγίστου τῶν ἀριθμῶν 1, $|\alpha_0| + |\alpha_1| + \cdots + |\alpha_{m-1}|$.

2. Τούτου τεθέντος, θὰ μελετήσωμεν τὴν ὑπὸ τοῦ D. Mayer ἐκφωνηθεῖσαν τὸ πρῶτον πρότασιν, εἰς τὸ ὑπόμνημα αὐτοῦ «Sur les équations algébriques», ἀφορῶσαν τὴν θέσιν τῶν ῥιζῶν τοῦ πολυωνύμου f (z). Ἡ πρότασις αὕτη ἐδημοσιεύθη τῷ 1891 εἰς τὰ Nouvelles annales de Mathématiques, 3e serie 1891, p. 111 [1]). Θὰ κάμωμεν τὴν ὡς ἄνω μελέτην βάσει μεθόδου ὀφειλομένης εἰς τὸν κ. P. Montel καὶ ἀνακοινωθείσης ἡμῖν διὰ δύο ἐπιστολῶν αὐτοῦ τῆς 1 Ὀκτωβρίου 1934 καὶ 10 Ὀκτωβρίου 1934.

---

1) Περὶ τῆς προτάσεως ταύτης βλέπε σχετικὸν ὑπόμνημα τοῦ κ. I. Ἀναστασιάδου, ἐν τῷ Δελτίῳ τῆς Ἑλληνικῆς Μαθηματικῆς Ἑταιρείας, 1934 — «Περὶ μιᾶς ἀνακοινώσεως τοῦ Διαβαλκανικοῦ συνεδρίου».

3. Ἐὰν οἱ συντελεσταὶ τοῦ πολυωνύμου

$$\alpha_0+\alpha_1 z+\cdots+\alpha_{p-1} z^{p-1}+z^p+\alpha_{p+1} z^{p+1}+\cdots+\alpha_m z^m$$

ἐπαληθεύουσι τὴν σχέσιν

$$|\alpha_0|+|\alpha_1|+\cdots+|\alpha_{p-1}|+|\alpha_{p+1}|+\cdots+|\alpha_m| \leqslant 1 \quad (1)$$

καὶ ἐὰν λ εἶναι πραγματικὸς ἀριθμὸς τοῦ διαστήματος 0……1, τὰ πολυώνυμα

$$f_\lambda(z)=\alpha_0+\alpha_1 z+\cdots+\alpha_{p-1} z^{p-1}+z^p+\lambda\left(\alpha_{p+1} z^{p+1}+\cdots+\alpha_m z^m\right)$$

διὰ $\quad 0 \leqslant \lambda < 1$

δὲν ἔχουσι ῥίζας ἐπὶ τῆς περιφερείας $|z|=1$

Διότι, ἄλλως, θὰ ὑπῆρχεν ἓν $z=z_0$, μέτρου ἑνός, καὶ τιμή τις $\lambda=\lambda_0$

$$0 \leqslant \lambda_0 < 1$$

τοιαύτη ὥστε $\quad f_{\lambda_0}(z_0)=0$

ἤτοι

$$-z_0^p=\alpha_0+\alpha_1 z_0+\cdots+\alpha_{p-1} z_0^{p-1}+\lambda_0\left(\alpha_{p+1} z_0^{p+1}+\cdots+\alpha_m z_0^m\right)$$

ὅτε

$$1 \leqslant |\alpha_0|+|\alpha_1|+\cdots+|\alpha_{p-1}|+\lambda_0\left\{|\alpha_{p+1}|+\cdots+|\alpha_m|\right\}$$

καὶ ἐπειδὴ $\lambda_0 < 1$ ἄρα

$$1 < |\alpha_0|+|\alpha_1|+\cdots+|\alpha_{p-1}|+|\alpha_{p+1}|+\cdots+|\alpha_m|$$

τοῦθ' ὅπερ δεικνύει τὴν πρότασιν.

4. Τὰ πολυώνυμα

$$f_\lambda(z)=\alpha_0+\alpha_1 z+\cdots+\alpha_{p-1} z^{p-1}+z^p+\lambda\left(\alpha_{p+1} z^{p+1}+\cdots+\alpha_m z^m\right)$$

ὅπου $\quad 0 \leqslant \lambda < 1$

καὶ $\quad |\alpha_0|+|\alpha_1|+\cdots+|\alpha_{p-1}|+|\alpha_{p+1}|+\cdots+|\alpha_m| \leqslant 1$

ἔχουσιν ἀκριβῶς p ῥίζας, εἰς τὸν τόπον $|z|<1$.

Τῷ ὄντι, τὸ πολυώνυμον $f_0(z)=\alpha_0+\alpha_1 z+\cdots+\alpha_{p-1} z^{p-1}+z^p$ ἐπειδὴ

$$|\alpha_0|+|\alpha_1|+\cdots+|\alpha_{p-1}| \leqq 1$$

ἔχει, κατὰ τὸ θεώρημα τοῦ κ. Montel, p ῥίζας εἰς τὸν τόπον $|z| < 1$ ἐπειδὴ δὲ αἱ ῥίζαι μεταβάλλονται συνεχῶς μετὰ τοῦ λ, οὐδεμία δὲ ἐσωτερικὴ ῥίζα τοῦ $f_\lambda(z)$ ἐξέρχεται ἢ ἐξωτερικὴ εἰσέρχεται εἰς τὸν τόπον, ὃν ὁρίζει ἡ $|z| = 1$, ἀφοῦ (§ 3) δὲν ἔχομεν ῥίζας ἐπὶ τῆς περιφερείας, διὰ τοῦτο τὰ πολυώνυμα $f_\lambda(z)$ ἔχουσιν ἀκριβῶς p ῥίζας εἰς τὸν τόπον $|z| < 1$.

5. Τὸ πολυώνυμον

$$f_1(z) = \alpha_0 + \alpha_1 + \cdots + \alpha_{p-1} z^{p-1} + z^p + \alpha_{p+1} z^{p+1} + \cdots + \alpha_m z^m$$

ὅταν $\quad |\alpha_0| + |\alpha_1| + \cdots + |\alpha_{p-1}| + |\alpha_{p+1}| + \cdots + |\alpha_m| < 1$

ἔχει ἀκριβῶς p ῥίζας εἰς τὸν τόπον $|z| < 1$.

Πράγματι θεωρήσωμεν τὰ πολυώνυμα $f_\lambda(z)$.

Τὸ $f_0(z)$ ἔχει p ῥίζας εἰς τὸν τόπον $|z| < 1$, ὅταν δὲ τὸ λ μεταβάλλεται συνεχῶς ἀπὸ 0 μέχρι καὶ 1 τότε αἱ ῥίζαι μεταβάλλονται συνεχῶς, καμμία ὅμως ῥίζα δὲν δύναται νὰ τοποθετηθῇ ἐπὶ τῆς $|z| = 1$.

Διότι ἄλλως θὰ εἴχομεν ἓν $\lambda = \lambda_0$ ὅπου $0 \leqq \lambda_0 \leqq 1$ καὶ ἓν $z = z_0$, μέτρου ἑνός, τοιαῦτα ὥστε $\quad f_{\lambda_0}(z_0) = 1$

ἤτοι

$$|-z_0|^p \leqq |\alpha_0| + |\alpha_1| \, |z_0| + \cdots + |\alpha_{p-1}| \, |z_0|^{p-1} +$$
$$+ \lambda_0 \left\{ |\alpha_{p+1}| \, |z_0|^{p+1} + \cdots + |\alpha_m| \, |z_0|^m \right\}$$

δηλαδὴ

$$1 \leqq |\alpha_0| + |\alpha_1| + \cdots + |\alpha_{p-1}| + |\alpha_{p+1}| + \cdots + |\alpha_m|$$

τοῦθ' ὅπερ εἶναι ἀδύνατον· ἡ πρότασις ἀπεδείχθη.

6. Τὰ πολυώνυμα

$$f_\lambda(z) = \alpha_0 + \alpha_1 z + \cdots + \alpha_{p-1} z^{p-1} + z^p + \lambda\left(\alpha_{p+1} z^{p+1} + \cdots + \alpha_m z^m\right)$$

ὅπου $\quad |\alpha_0| + |\alpha_1| + \cdots + |\alpha_{p-1}| + |\alpha_{p+1}| + \cdots + |\alpha_m| \leqq 1$

καὶ $\lambda = 1$ ἔχουσι εἰς τὸν τόπον $|z| < 1$ τὸ πολὺ p ῥίζας.

Διότι ἂν εἶχον $p + k$ $(k \geqslant 1)$ εἰς τὸν τόπον $|z| < 1$ διὰ $\lambda = 1$ τότε θὰ ἠδυνάμεθα λόγῳ τῆς συνεχείας νὰ εὕρωμεν τιμὴν τοῦ $\lambda = \lambda_0$ τοιαύτην ὥστε τὰ πολυώνυμα $f_{\lambda_0}(z)$ νὰ ἔχουν $p + k$ ῥίζας εἰς τὸν τόπον $|z| < 1$, ὅπερ ἀδύνατον, χάρις εἰς τὴν πρότασιν τῆς § 4.

7. Τὸ πολυώνυμον

$$f(z) = \alpha_0 + \alpha_1 z + \cdots + \alpha_{p-1} z^{p-1} + z^p + \alpha_{p+1} z^{p+1} + \cdots + \alpha_m z^m$$

εἰς τὸ ὁποῖον $|\alpha_0| + \dots + |\alpha_{p-1}| + |\alpha_{p+1}| + \dots + |\alpha_m| = 1$ ἔχει τοὐλάχιστον p ῥίζας εἰς τὸν τόπον $|z| \leqq 1$.

Διότι ἄλλως θὰ εἶχε ῥίζας εἰς πλῆθος $k \geqslant m-p+1$ εἰς τὸν τόπον $|z| > 1$. Ἀλλὰ ἐφ' ὅσον αἱ ῥίζαι μεταβάλλονται συνεχῶς μετὰ τοῦ λ θὰ ἠδυνάμεθα νὰ εὕρωμεν τιμὴν τοῦ $\lambda = \lambda_0 < 1$ δι' ἣν τὸ $f_{\lambda_0}(z)$ θὰ εἶχε ῥίζας πλείους τῶν $m-p$ εἰς τὸν τόπον $|z| > 1$, ἄρα τὸ $f_{\lambda_0}(z)$ θὰ εἶχε ῥίζας ὀλιγωτέρας τῶν p εἰς τὸν τόπον

$$|z| \leqq 1,$$

τοῦθ' ὅπερ ἀδύνατον ἀφοῦ τὸ $f_{\lambda_0}(z)$ ἔχει (§4), εἰς τὸν τόπον $|z| < 1$, ἀκριβῶς p ῥίζας.

Ὥστε ῥίζαι τοῦ πολυωνύμου εἶναι δυνατὸν νὰ τοποθετηθῶσιν ἐπὶ τῆς περιφερείας.

Περὶ τῆς θέσεως τῶν ῥιζῶν τούτων ἔχομεν τὸ ἑξῆς θεώρημα:

8. Αἱ ἐπὶ τῆς περιφερείας $|z| = 1$ ῥίζαι τοῦ πολυωνύμου

$$f(z) = \alpha_0 + \alpha_1 z + \alpha_2 z^2 + \dots + \alpha_{p-1} z^{p-1} + z^p + \alpha_{p+1} z^{p+1} + \dots + \alpha_m z^m$$

δι' ὅπερ $|\alpha_0| + |\alpha_1| + \dots + |\alpha_{p-1}| + |\alpha_{p+1}| + \dots + |\alpha_m| = 1$ κεῖνται ἐπὶ τῶν κορυφῶν κανονικοῦ πολυγώνου ἐγγεγραμμένου εἰς τὸν κύκλον $|z| = 1$ μὲ ἀριθμὸν πλευρῶν p.

Ἔστω $z = z_0$ μία ῥίζα μέτρου ἑνός.

Τότε

$$-z_0^p = \alpha_0 + \alpha_1 z_0 + \dots + \alpha_{p-1} z_0^{p-1} + \alpha_{p+1} z_0^{p+1} + \dots + \alpha_m z_0^m \equiv \Theta$$

προφανῶς

$$|\Theta| \leqq |\alpha_0| + |\alpha_1| + \dots + |\alpha_{p-1}| + |\alpha_{p+1}| + \dots + |\alpha_m| = 1$$

ἀφ' ἑτέρου

$$|-z_0|^p = |\Theta| = 1$$

ἄρα τὸ $\left|\alpha_0 + \alpha_1 z_0 + \dots + \alpha_{p-1} z_0^{p-1} + \alpha_{p+1} z_0^{p+1} + \dots + \alpha_m z^m\right|$ λαμβάνει τὸ μέγιστον μέτρον, ἄρα ὅλοι οἱ ὅροι τοῦ ἀθροίσματος Θ ἔχουν τὸ αὐτὸ ὄρισμα.

Ἔστωσαν $\varphi_0, \varphi_1, \dots \varphi_{p-1}, \varphi_{p+1}, \dots \varphi_m$ τὰ ὀρίσματα τῶν συντελεστῶν $\alpha_0, \alpha_1, \dots \alpha_{p-1}, \alpha_{p+1}, \dots \alpha_m$

τότε ἔχομεν

$$\varphi_0=\varphi_1+\varphi+2k_1\pi=\varphi_2+2\varphi+2k_2\pi=...=\varphi_m+m\varphi+2k_m\pi=\pi+p\varphi+2k\pi$$

ἐτέθη $z_0=e^{\varphi i}$, ἡ δὲ τελευταία ἰσότης εἶναι συνέπεια τῆς σχέσεως

$$-z_0^p=\Theta.$$

ὥστε $$\varphi=\frac{\varphi_0-(2k+1)\pi}{p}$$

καὶ κατὰ συνέπειαν τὸ $z_0=e^{\varphi i}$ εἶναι μία κορυφὴ κανονικοῦ μὲ p πλευρὰς ἐγγεγραμμένου πολυγώνου εἰς τὸν $|z|=1$, τοῦθ' ὅπερ ἀποδεικνύει τὴν πρότασιν.