ΠΕΡΙ ΕΝΟΣ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ ΤΟΥ Κ^{ΟΥ} ΜΑΛΤΕΖΟΥ

ΥΠΟ

Α. ΤΖΩΡΤΖΗ

ΥΦΗΓΗΤΟΥ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΕΝ ΤΩ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΩ ΑΘΗΝΩΝ

ΠΕΡΙ ΕΝΟΣ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ ΤΟΥ Κ^{ου} ΜΑΛΤΕΖΟΥ

Ὁ κ. Μαλτέζος εἰς τὴν ἐργασίαν του «περὶ μιᾶς ἀξιοσημειώτου ὁριζούσης»[1] μελετῶν μίαν κατηγορίαν ὁριζουσῶν τοῦ Van der Monde, αἵτινες ἔχουν τιμὰς ἀριθμητικάς, ἀνεξαρτήτους παραμέτρου τινος εἰσερχομένης εἰς τὰ στοιχεῖα αὐτῶν, θέτει τὸ ζήτημα τῆς εὑρέσεως τῆς γενικῆς μορφῆς τῶν ὁριζουσῶν αἵτινες ἔχουν τὴν ὡς ἄνω ἰδιότητα.

Ἡ λύσις τοῦ προβλήματος τούτου εἶναι ἀρρήκτως συνδεδεμένη μὲ τὴν μελέτην τῆς διαφορικῆς ἐξισώσεως

$$\frac{d\,\Delta}{d\,\nu}=0$$

ὅπου Δ ἡ ὁρίζουσα καὶ ν ἡ παράμετρος ἥτις δὲν εἰσέρχεται εἰς τὴν τιμὴν τῆς Δ.

Λαμβάνοντες ὡς ἀφετηρίαν τὴν ἀνωτέρω διαφορικὴν ἐξίσωσιν παρέχομεν, εἰς τὰς ὀλίγας ταύτας γραμμάς, τὸν βαθμὸν τῆς γενικότητος τοῦ προβλήματος τοῦ κ. Μαλτέζου καὶ ἀνευρίσκομεν, διὰ μεθόδου καθαρῶς ἀλγεβρικῆς, μίαν γενικὴν κατηγορίαν ὁριζουσῶν τοῦ Van de Monde ὧν ἡ τιμὴ εἶναι ἀνεξάρτητος παραμέτρου τινος.

Θεωρήσωμεν τὴν ὁρίζουσαν.

$$\Delta(\nu)=\begin{vmatrix} \alpha_1^1 & \alpha_2^1 & \cdots & \alpha_{n-1}^1 & \alpha_n^1 \\ \alpha_1^2 & \alpha_2^2 & \cdots & \alpha_{n-1}^2 & \alpha_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \alpha_1^{n-1} & \alpha_2^{n-1} & \cdots & \alpha_{n-1}^{n-1} & \alpha_n^{n-1} \\ \alpha_1^n & \alpha_2^n & \cdots & \alpha_{n-1}^n & \alpha_n^n \end{vmatrix} \equiv \left|\begin{array}{ccc|c} & & & \alpha_n^1 \\ & \Theta & & \alpha_n^2 \\ & & & \vdots \\ & & & \alpha_n^{n-1} \\ \hline \alpha_1^n & \alpha_2^n \cdots & \alpha_{n-1}^n & \alpha_n^n \end{array}\right|$$

εἰς ἣν τὰ α_k^i εἶναι συναρτήσεως τῆς μεταβλητῆς ν.

---

[1] Ἐπιστημονικὴ Ἐπετηρὶς τοῦ Πανεπιστημίου Θεσσαλονίκης. Τεῦχος Α′ (1932) καὶ Δελτίον τῆς Ἑλληνικῆς Μαθηματικῆς Ἑταιρείας (1933).

Συμφώνως πρὸς τὸ πρόβλημα τοῦ κ. Μαλτέζου ἔχομεν

$$\frac{d\,\Delta}{d\,\nu}=0$$

ὅθεν $\Delta = c$, ὅπου c ἀνεξάρτητος τοῦ ν.

Ἀλλ' ἔχομεν ἐκ ταὐτότητος (ἐπὶ τῇ βάσει γνωστῆς ἰδιότητος τῶν ὁριζουσῶν)

$$\Delta = \begin{vmatrix} & & & 0 \\ & \Theta & & 0 \\ & & & \vdots \\ & & & 0 \\ \alpha_1^n & \alpha_2^n \cdots & \alpha_{n-1}^n & \alpha_n^n \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} & & & \alpha_n^1 \\ & \Theta & & \alpha_n^2 \\ & & & \vdots \\ & & & \alpha_n^{n-1} \\ \alpha_1^n & \alpha_2^n \cdots & \alpha_{n-1}^n & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{n+1}\,\Theta\,\alpha_n^n + H$$

ὅπου H εἶναι ἡ ὁρίζουσα τοῦ β'. ὅρου, ἀλλὰ $\Theta \neq 0$, διότι ὑποτίθεται $\Delta \neq 0$, κατὰ συνέπειαν αἱ ἐλάσσονες τάξεως $n-1$ τῆς Δ δὲν δύνανται νὰ εἶναι ὅλαι 0, ὅθεν

$$(1) \qquad \alpha_n^n = (-1)^{n+1}\,\frac{c-H}{\Theta}$$

Ἡ σχέσις αὕτη δίδει τὴν τιμὴν τοῦ στοιχείου α_n^n, συναρτήσει τῆς τῆς c, ἀνεξαρτήτου τοῦ ν, καὶ τῶν ὁριζουσῶν Θ καὶ H ὧν τὰ στοιχεῖα ἐξαρτῶνται ἐκ τοῦ ν, ὥστε ἡ ἀνωτέρω διαφορικὴ ἐξίσωσις νὰ ἐπαληθεύεται.

Τὰ n^2-1 στοιχεῖα α_k^i ἅτινα εἰσέρχονται εἰς τὰς Θ καὶ H εἶναι τυχόντα.

Δυνάμεθα διὰ τὰς ὁριζούσας τοῦ Van de Monde, νὰ λάβωμεν

$$\begin{array}{lllll}
\alpha_1^1 = 1 & \alpha_2^1 = a & \cdots\cdots & \alpha_{n-1}^1 = a^{n-2} & \alpha_n^1 = a^{n-1} \\
\alpha_1^2 = 1 & \alpha_2^2 = b & \cdots\cdots & \alpha_{n-1}^2 = b^{n-2} & \alpha_n^2 = b^{n-1} \\
\vdots & \vdots & \cdots\cdots & \vdots & \vdots \\
\alpha_1^{n-1} = 1 & \alpha_2^{n-1} = k & \cdots\cdots & \alpha_{n-1}^{n-1} = k^{n-2} & \alpha_n^{n-1} = k^{n-1} \\
\alpha_1^n = 1 & \alpha_2^n = \lambda & \cdots\cdots & \alpha_{n-1}^n = \lambda^{n-2} & \alpha_n^n = \lambda^{n-1}
\end{array}$$

$$(a \neq \beta \neq \ldots\ldots \neq k \neq \lambda)$$

τότε ἡ (1) γίνεται

$$\lambda^{n-1} = (-1)^{n-1}\,\frac{c-H}{\Theta}$$

ἥτις γράφεται

$$(2) \quad (\beta\text{-}\alpha)\ (\gamma\text{-}\alpha)\ \ldots\ (\lambda\text{-}\alpha)\ (\gamma\text{-}\beta)\ \ldots\ (\lambda\text{-}k) = c$$

καὶ ὁρίζει τὸ λ (ὅταν δοθοῦν τὰ α. β, ... k) ὡς ῥίζας ἐξισώσεως βαθμοῦ n-1.

Π. χ. διὰ n=3 ἡ ὡς ἄνω ἐξίσωσις γράφεται

$$(\beta\text{-}\alpha)\ (\gamma\text{-}\alpha)\ (\gamma\text{-}\beta) = c$$

ἢ

$$\gamma^2 - (\alpha+\beta)\ \gamma + \alpha\beta - \frac{c}{\beta - \alpha} = 0$$

ὅθεν

$$\gamma = \frac{\alpha+\beta}{2} \pm \frac{\alpha-\beta}{2} \sqrt{1 - \frac{4\ c}{(\alpha-\beta)^3}}$$

ἂν λοιπὸν ληφθῇ $\alpha=\nu$, $\beta=\nu+\mu_1$ ὅπου $\mu_1 =$ σταθερὰ πρὸς ν, τότε

$$\gamma = \nu + \frac{\mu_1}{2} + \frac{-\mu_1}{2} \sqrt{1 + \frac{4\ c}{\mu_1^3}} \equiv \nu + \mu_2$$

καὶ εὑρίσκομεν τὰς ὁριζούσας τοῦ τύπου τοῦ κ. Μαλτέζου.

Διὰ τὴν αὐτὴν περίπτωσιν, ἂν θέλωμεν αἱ διαφοραὶ β - α, γ - α νὰ εἶναι γραμμικαὶ συναρτήσεις τοῦ ν μορφῆς

$$\beta\text{-}\alpha = \lambda_1\ \nu + \mu_1\ , \quad \gamma\text{-}\alpha = \lambda_2\ \nu + \mu_2\ ,$$

τότε θὰ ἔχωμεν ἐκ τῆς (2)

$$(\lambda_1\ \nu+\mu_1)\ \ (\lambda_2\ \nu+\mu_2)\ \ \{(\lambda_2 - \lambda_1)\nu + (\mu_2 - \mu_1)\} = c$$

ἥτις εἶναι, ὡς πρὸς ν, ταὐτότης, ἄρα

$$(3) \quad \begin{cases} \lambda_1 \lambda_2\ (\lambda_2 - \lambda_1) = 0 \\ \lambda_1 \lambda_2\ (\mu_2 - \mu_1) + \lambda_1 \mu_2 (\lambda_2 - \lambda_1) + \lambda_2 \mu_1 (\lambda_2 - \lambda_1) = 0 \\ \lambda_1 \mu_2\ (\mu_2 - \mu_1) + \lambda_2 \mu_1 (\mu_2 - \mu_1) + \mu_1 \mu_2 (\lambda_2 - \lambda_1) = 0 \\ \mu_1 \mu_2\ (\mu_2 - \mu_1) = 0 \end{cases}$$

Ἐκ τῆς τελευταίας τῶν σχέσεων τούτων προκύπτει $\mu_2 \neq \mu_1 \neq 0$ διότι ἄλλως $c = 0$, ἄρα $\Delta \equiv 0$ τοῦθ' ὅπερ δὲν θὰ συνεπήγετο $\alpha \neq \beta \neq \gamma$.

Ἡ πρώτη τῶν (3) δίδει $\lambda_1 = \lambda_2$ (ἀποκλειομένης τῆς περιπτώσεως $\lambda_1 = 0$ ἢ $\lambda_2 = 0$), ὅθεν ἡ δευτέρα γράφεται.

$$\lambda_1 \lambda_2\ (\mu_2 - \mu_1) = 0$$

ἄρα ἀναγκαίως $\lambda_1 = 0$ ἢ $\lambda_1 = 0$ καὶ ἐπειδὴ $\lambda_1 = \lambda_2$, θὰ ἔχωμεν ταὐτοχρόνως $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ καὶ συνεπῶς ἡ τρίτη τῶν (3) ἐξαφανίζεται.

Ὅθεν ἡ τιμὴ c τῆς ὁριζούσης εἶναι

$$\Delta = \mu_1 \mu_2\ (\mu_2 - \mu_1)$$

καὶ ἡ μορφή της γράφεται

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & \alpha & \alpha^2 \\ 1 & \alpha+\mu_1 & (\alpha+\mu_1)^2 \\ 1 & \alpha+\mu_2 & (\alpha+\mu_2)^2 \end{vmatrix} \qquad (\mu_1 \neq \mu_2)$$

ὅπου α εἶναι τυχοῦσα συνάρτησις τοῦ ν.

Ἐπὶ παραδείγματι ἡ ὁρίζουσα

$$\begin{vmatrix} 1 & e^{\nu} & e^{2\nu} \\ 1 & e^{\nu}+1 & (e^{\nu}+1)^2 \\ 1 & e^{\nu}+2 & (e^{\nu}+2)^2 \end{vmatrix}$$

Ἔχει τιμὴν $c = 1.\ 2.\ (2\text{-}1) = 2$ μὴ ἐξαρτωμένην ἐκ τῆς συναρτήσεως e^{ν}.

Τὸ ἐξαγόμενον τοῦτο ἐπεκτείνεται εἰς τὰς ὁριζούσας τοῦ Van der Monde, οἱασδήποτε τάξεως.

Διὰ $\alpha = a\,\nu + b$ ἔχομεν τὴν περίπτωσιν τῆς ὁριζούσης τοῦ κ. Μαλτέζου.

Εἶναι γνωστὸν ὅτι ἐν τῇ περιπτώσει $n > 5$ εἶναι ἀδύνατος ἡ εὕρεσις τῆς γενικῆς λύσεως τῆς ἀλγεβρικῆς ἐξισώσεως (2), ἀλλὰ δυνάμεθα ἐφαρμόζοντες τὰς κλασσικὰς μεθόδους νὰ εὕρωμεν μίαν ἢ περισσοτέρας ῥίζας της καὶ νὰ πορισθῶμεν οὕτω ἀντιστοίχους μορφὰς ὁριζουσῶν τοῦ Van der Monde ὧν ἡ τιμὴ νὰ εἶναι ἀνεξάρτητος τῆς παραμέτρου ν.