ΠΕΡΙ ΤΟΥ ΜΕΤΡΟΥ ΤΩΝ ΡΙΖΩΝ ΤΩΝ ΠΟΛΥΩΝΥΜΩΝ

ΥΠΟ

ΙΩΑΝΝΟΥ Γ. ΠΑΠΑΔΗΜΗΤΡΙΟΥ

ΠΕΡΙ ΤΟΥ ΜΕΤΡΟΥ ΤΩΝ ΡΙΖΩΝ ΤΩΝ ΠΟΛΥΩΝΥΜΩΝ

ὑπὸ ΙΩΑΝΝΟΥ ΠΑΠΑΔΗΜΗΤΡΙΟΥ

1. Εἰς τὴν παροῦσαν ἐργασίαν θὰ ἀσχοληθῶμεν μὲ τὸ ἑξῆς πρόβλημα. Νὰ ὁρισθοῦν περιοχαὶ τοῦ μιγαδικοῦ ἐπιπέδου αἱ ὁποῖαι περιέχουσιν πάντοτε ῥίζας τῆς ἀλγεβρικῆς ἐξισώσεως.

$$(1) \quad \alpha_0 + \alpha_1 z + \alpha_2 z^2 + \cdots + \alpha_p z^p + \cdots + \alpha_m z^m = 0$$

ὅταν ὅλοι ἢ τινὲς τῶν συντελεστῶν αὐτῆς ὑπόκεινται εἰς συνθήκας τεθείσας ἐκ τῶν προτέρων. Ὡς περιοχὰς τοῦ ἐπιπέδου θὰ θεωρήσωμεν κύκλους μὲ κέντρον τὴν ἀρχήν. Ἐν ἄλλαις λέξεσι θὰ ἀναζητήσωμεν ἀνώτερα ὅρια τῶν μέτρων ἑνὸς ὡρισμένουου ἀριθμοῦ ῥιζῶν τῆς ἐξισώσεως (1).

Τὸ πρόβλημα τοῦτο θεωρηθὲν τὸ πρῶτον ὑπὸ τοῦ Landau [1] ἐν τῇ μελέτῃ τοῦ θεωρήματος τοῦ Picard ἐμελετήθη ἐκ νέου βαθύτερον ὑπὸ τῶν Montel, Vleck, Biernacki κ.λ.π. Τὴν θέσιν ὅμως τοῦ προβλήματος ἔδωσε κυρίως ὁ κ. Paul Montel [2] εἰς τὸ ὑπόμνημά του τοῦ 1923, ἐν τῷ ὁποίῳ ἀπέδειξεν ὅτι ἐὰν ἡ ἐξίσωσις (1) γραφῇ ὑπὸ τὴν μορφὴν

$$(2) \quad 1 + \alpha_1 z + \alpha_2 z^2 + \cdots + \alpha_p z^p + \cdots + \alpha_{p+k} z^{p+k} = 0$$

$(\alpha_p \neq 0)$ ὑπάρχουν πάντοτε p ῥίζαι τῆς ἐξισώσεως (2) μικρότεραι κατὰ μέτρον ἀριθμοῦ $\varphi(\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_p, k)$ ἐξαρτωμένου ἐκ τῶν p πρώτων συντελεστῶν καὶ τοῦ ἀριθμοῦ τῶν ὅρων τοῦ πολυωνύμου. Τὴν πρότασιν ταύτην

[1] E. Landau a) Ubet den Picardschen Satz (Vierteljahssrchrift der Naturforscher der Gesellschaft in Zurich, t. I 1906, p. 252-318).

a) Sur quelques généralisations du théoreme de m. Picard (Annales de l Ecole Normale Superieure 3e seri t. 24, 1907, p. 179-201).

[2] Paul Montel. Sur les modnles des zéros des polynomes (Annales de l, Ecole Normale Superieure 3e seri t. 40, p. 1-34).

τοῦ κ. Montel θὰ πορισθῶμεν κατωτέρω ἐκ νέου ἐξ ἑνὸς θεωρήματος, τὸ ὁποῖον πραγματευόμεθα καὶ τὸ ὁποῖον ἀποτελεῖ γενίκευσιν μιᾶς προτάσεως τοῦ Sergesco [1], Ὡς ἀφετηαίαν ἐν τῇ παρούσῃ μας ἐργασία θὰ ἔχωμεν λὲν θεώρημα τοῦ Pellet [2] ἐξ ἑνὸς δὲ ἄλλου θεωρήματος τοῦ Welsh [3] δίδοντος ἀνώτερον ὅριον ὅλων τῶν ῥιζῶν ἑνὸς πολυωνύμου μὲ τυχόντας συντελεστὰς μὴ ὑποκειμένους εἰς οὐδεμίαν συνθήκην θὰ εὕρωμεν ἀνώτερον ὅριον διὰ p ῥίζας.

2. Κατὰ πρῶτον θὰ δείξωμεν διὰ νέας μεθόδου τὸ θεώρημα τοῦ Pellet, θὰ συναγάγωμεν δ' ἀκολούθως πορίσματά τινα λίαν ἐνδιαφέροντα. Τὸ ἐν λόγῳ θεώρημα ἔχει ὡς ἑξῆς :

Θ ε ώ ρ η μ α ἔστω πολυώνυμον

$$(1)\quad \varphi(z) \equiv z^m + \alpha_{m-1} z^{m-1} + \cdots + \alpha_n z^n + \cdots + \alpha_1 z + \alpha_0 \quad (\alpha_n \neq 0)$$

μὲ συνετελεστὰς τυχόντας φανταστικοὺς ἀριθμούς. Ἐὰν τὸ πολυώνυμον μὲ πραγματικοὺς συντελεστάς :

$$(2)\quad f(x) \equiv x^m + |\alpha_{m-1}| x^{m-1} + \cdots + |\alpha_{n+1}| x^{m+1} - |\alpha_n| x^n + |\alpha_{n-1}| x^{n-1} + \cdots + |\alpha_0|$$

(τὸ ὁποῖον κατωτέρω θὰ καλοῦμεν προσηρτημένον τοῦ φ (z)) ἔχει δύο διακεκριμένας θετικὰς ῥίζας θ_1, θ_2, (τὸ πολυώνυμον τοῦτο ὡς παρουσιάζον δύο μόνον παραλλαγὰς ἔχει ἢ δύο θετικὰς ῥίζας ἢ καμμίαν) τότε n ῥίζαι τοῦ πολυωνύμου φ (z) κεῖνται ἐντὸς ἢ ἐπὶ τῆς περιφερείας κύκλου ἀκτῖνος θ_1 καὶ m-n ῥίζαι αὐτοῦ κεῖνται ἐκτὸς ἢ ἐπὶ τῆς περιφερείας κύκλου μὲ ἀκτῖνα θ_2.

Ἀ π ό δ ε ι ξ ι ς. Ἔστω ξ ῥίζα τις τοῦ πολυωνύμου (1). Βλέπομεν τότε ἀμέσως ὅτι ἡ ῥίζα αὕτη δὲν δύναται νὰ κεῖται εἰς τὸ ἐσωτερικὸν τοῦ δακτυλίου

$$(3)\qquad \theta_1 < |z| < \theta_2$$

---

[1] P. Sergesco. Duelques proprietés des polynomes (2e Congrés des Mathematiques Polonais à Wilmo 21 No vembre 1931).

[2] A. Pellet. Sur un mode de separation des racines des équations et la formule de Lagrange (Bulletin des sciences math. (2) 5 1881 p. 393-395).

[3] J. Walsh An. inequality for the roots of an elgebraic equatiou (An. of Math. (2) 25, 285-286 (1924).

διότι διὰ κάθε ῥίζαν ξ τοῦ πολυωνύμου (1) ἔχομεν

$$|\xi|^m + |\alpha_{m-1}|\,|\xi|^{m-1} + \cdots + |\alpha_{n+1}|\,|\xi|^{n+1} - |$$

$$-|\alpha_n|\,|\xi|^n + |\alpha_{n-1}|\,|\xi|^{n-1} + \cdots + |\alpha_1|\,|\xi| + |\alpha_0| \geqq 0$$

ἐνῷ λόγῳ τῆς γενομένης ὑποθέσεως διὰ τὸ πολυώνυμον (2) διὰ κάθε x' κείμενον εἰς τὸ ἐσωτερικὸν τοῦ διαστήματος $\theta_1 < x < \theta_2$ εἶναι

$$x'^m + |\alpha_{m-1}|\,x'^{m-1} + \ldots + |\alpha_{n+1}|\,x'^{n+1} - |\alpha_n|\,x'^n + |$$

$$|\alpha_{n-1}|\,x'^{n-1} + \cdots + |\alpha_1|\,x' + |\alpha_0| < 0$$

ὥστε μένει νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι ἐντὸς ἢ ἐπὶ τῆς περιφερείας τοῦ κύκλου $|z| \leqq \theta_1$ κεῖνται, ἀκριβῶς n ῥίζαι τοῦ πολυωνύμου (1). Πρὸς τοῦτο θεωροῦμεν τὸ πολυώνυμον.

$$(4) \qquad \varphi(z, t) \equiv z^m + \alpha_{m-1} z^{m-1} + \cdots + \alpha_n z^n + \alpha_{n-1} \cdot t z^{n-1} + \cdots + \alpha_1 t z + \alpha_0 t$$

ὅπου ἡ πραγματικὴ μεταβλητὴ t (παράμετρος) μεταβάλλεται εἰς τὸ διάστημα $0 \leqq t \leqq 1$. Διὰ κάθε τιμὴν $t = t_0 < 1$ τὸ προσηρτημένον πολυώνυμον τοῦ (4) ἔχει λόγῳ τῆς γενομένης ὑποθέσεως διὰ τὸ πολυώνυμον (2) καὶ τῶν σχέσεων

$$|t_0 \alpha_{n-h}| < |\alpha_{n-h}| \qquad h = 1, 2, 3, \cdots n$$

ἀ σ φ α λ ῶ ς δύο θετικὰς ῥίζας, καθόσον ὑπάρχουν τιμαὶ τοῦ x (π. χ. αἱ μεταξὺ ϑ_1, ϑ_2) διὰ τὰς ὁποίας τὸ πολυώνυμον τοῦτο λαμβάνει ἀρνητικὰς τιμάς. Ἐπὶ πλέον παρατηροῦμεν, ὅτι διὰ δύο τιμὰς τοῦ t, $t_2 < t_1$ αἱ θετικαὶ ῥίζαι τοῦ προσηρτημένου πολυωνύμου (4) διὰ τὴν τιμὴν $t = t_2$ περιλαμβάνουν τὰς θετικὰς ῥίζας τοῦ ἀντιστοίχου πολυωνύμου διὰ τὴν τιμὴν $t = t_1$. Διὰ τὰς θετικὰς π. χ. ῥίζας τοῦ εἰς τὴν τιμὴν t_1 ἀτιστοίχου προσηρτημένου πολυωνύμου τὸ διὰ t_2 ἀντίστοιχον λαμβάνει ἀρνητικὰς τιμάς. Θεωροῦμεν τώρα τυχοῦσαν ἀκολουθίαν τιμῶν t τοῦ διαστήματος $0 \leqslant t \leqslant 1$ συγκλίνουσαν εἰς τὸ μηδέν: ὅρ. $t_i = 0$, $(i \to \infty)$. Εἰς αὐτὴν ἀντιστοιχεῖ ἡ ἀκολουθία τῶν πολυωνύμων $\varphi(z, t_i) \equiv \varphi_i(z)$ καὶ εἰς ταύτην ἡ ἀκολουθία τῶν προσηρτημένων f_i (x) καθὼς ἐπίσης καὶ αἱ ἀκολουθίαι τῶν θετικῶν ῥιζῶν $\vartheta_1^{(i)}, \vartheta_2^{(i)}$ ὅπου

$$o < \vartheta_1^{(i)} < \vartheta_2^{(i)} \qquad i = 1, 2, 3, \ldots \infty$$

Ἡ ἀκολουθία $\vartheta_1^{(i)}$ κατὰ τὰ ἀνωτέρω εἶναι διαρκῶς φθίνουσα, ἤτοι διὰ κάθε δείκτην i

$$\vartheta_1^{(i)} > \vartheta_1^{(i+1)} \qquad i = 1, 2, 3, \ldots \infty$$

ἐπὶ πλέον συγκλίνει καὶ αὕτη εἰς τὸ μηδὲν δηλ. ὅρ. $\vartheta_1^{(i)} = o$ διότι ἔστω τυχὼν θετικὸς ἀριθμὸς ε δύναμαι τότε νὰ εὕρω ὡς γνωστὸν ἕνα θετικὸν ἀριθμὸν $\delta = \delta(\varepsilon)$ εἰς τρόπον ὥστε ἐφόσον οἱ n τελευταῖοι συντελεσταὶ τοῦ πολυωνύμου (2) μένουν μικρότεροι τοῦ δ ὑπάρχουν τιμαὶ τοῦ x μικρότεραι τοῦ ε καθιστῶσαι τὸ πολυώνυμον τοῦτο ἀρνητικόν. Ἀπό τινος ὅμως δείκτου καὶ ἐφεξῆς οἱ n τελευταῖοι συντελεσταὶ τῶν πολυωνύμων f_i (x) μένουν πράγματι μικρότεροι τοῦ δ. Θεωροῦμεν ἤδη τὸ πολυώνυμον φ (z, t) διὰ t = o. Τὸ πολυώνυμον τοῦτο ἔχει τὴν ῥίζαν z = o πολλαπλῆν βαθμοῦ πολλαπλότητος n. Ὥστε κατὰ τὸ θεώρημα ὅτι αἱ ῥίζαι εἶναι συνεχεῖς συναρτήσεις τῶν συντελεστῶν[1] ἐντὸς ἱκανῶς μικροῦ κύκλου περὶ τὸ σημεῖον z = o ὑπάρχουν διὰ τὰ πολυώνυμα φ (z, t) διὰ τὰς τιμὰς τοῦ t $t < \eta$ n ἀκριβῶς τὸ πλῆθος ῥίζαι, ἤτοι τὰ πολυώνυμα φ_i (z) τῆς ἀκολουθίας μας ἀπό τινος δείκτου τοῦ i καὶ ἔπειτα ἔχουν εἰς τὸν ἐσωτερικὸν κύκλον τῆς εἰς τὸ ἀντίστοιχόν των προσηρτημένον πολυώνυμον ἀνηκούσης στεφάνης n ἀκριβῶς ῥίζας. Ἀφ' ἑτέρου ὅταν διά τινα τιμὴν τοῦ t $o < t \leqq 1$ ὁ ἐσωτερικὸς κύκλος τῆς ἀντιστοίχου στεφάνης περικλείει n τὸ πλῆθος ῥίζας λόγῳ τῆς ἐν ἀρχῇ γενομένης παρατηρήσεως περὶ τῶν θετικῶν ῥιζῶν τοῦ προσηρτημένου, καὶ διὰ πᾶσαν μικροτέραν τιμὴν τοῦ t ὁ ἐσωτερικὸς κύκλος τῆς ἀντιστοίχου στεφάνης θὰ περικλείει ἐπίσης n τὸ πλῆθος ῥίζας. Ἐπειδὴ ὅμως ὅπως ἐδείξαμεν ἀπό τινος τὰ πολυώνυμα ταῦτα περιέχουν εἰς τὸν ἐσωτερικὸν κύκλον τῆς στεφάνης n ἀκριβῶς ῥίζας ἄρα καὶ τὸ ἀρχικὸν θὰ περιέχει τὸ αὐτὸ πλῆθος ῥιζῶν.

---

[1] Bieberbach Bauer. Vorlesungen über Algebra 5 Aufl 1933 (Taubner).

3. Ἓν πρῶτον πόρισμα τοῦ δειχθέντος θεωρήματος εἶναι τὸ ἀκόλουθον θεώρημα τοῦ D. Mayer[1]. Δίδεται τὸ πολυώνυμον μὲ τυχόντας συντελεστὰς

$$\varphi(z) \equiv \alpha_m z^m + \dots + \alpha_{n+1} z^{n+1} + \alpha_n z^n + \alpha_{n-1} z^{n-1} + \dots + \alpha_1 z + \alpha_0$$

διὰ τὸ ὁποῖον ἔχομεν

$$(1) \qquad |\alpha_n| > A + B \qquad \begin{aligned} A &= |\alpha_m| + \dots + |\alpha_{n+1}| \\ B &= |\alpha_{n-1}| + \dots + |\alpha_1| + |\alpha_0| \end{aligned}$$

τοῦ πολυωνύμου τούτου n ῥίζαι εὑρίσκονται ἐντὸς τοῦ κύκλου ἀκτῖνος ἕνα καὶ m-n ἐκτὸς αὐτοῦ.

Πράγματι εἰς τὴν προκειμένην περίπτωσιν τὸ προσηρτημένον πολυώνυμον

$$f(z) \equiv |\alpha_m| z^m + \dots + |\alpha_{n+1}| z^{n+1} - |\alpha_n| z^n +$$

$$+ |\alpha_{n-1}| z^{n-1} + \dots + |\alpha_1| z + |\alpha_0|$$

δυνάμει τῆς (1) θὰ ἔχῃ ἀσφαλῶς δύο θετικὰς ῥίζας καθόσον

$$(2) \qquad f(o) > o, \quad f(1) < o, \quad f(P) > o$$

(P ἀριθμὸς θετικὸς ἀρκετὰ μέγας) ἐπὶ πλέον μία τῶν ῥιζῶν τούτων θὰ εἶναι συμφώνως τῶν (2) μικροτέρα ἡ δὲ ἄλλη μεγαλειτέρα τῆς μονάδος ἄρα κατὰ τὸ προηγούμενον θεώρημα n ῥίζαι τοῦ δοθέντος πολυωνύμου φ (z) εὑρίσκονται ἐντὸς τοῦ κύκλου τῆς μονάδος καὶ m-n ἐκτός.

Εἶναι προφανὲς ὅτι ἰσχύει καὶ ἡ ἔτι γενικωτέρα πρότασις. Δοθέντος τοῦ πολυωνύμου

$$\varphi(z) \equiv \alpha_m z^m + \alpha_{m-1} z^{m-1} + \dots + \alpha_n z^n + \dots + \alpha_1 z + \alpha_0$$

---

[1] Τὸ θεώρημα τοῦτο ἐξεφωνήθη τὸ πρῶτον ὑπὸ τοῦ D. Mayer εἰς τὸ ὑπόμνημά του (Sur les équations algebriques Nouvelles annales de Math. 3e serie 1891 p. 111).

ἐὰν πληροῦται ἡ συνθήκη

$$(3) \qquad |\alpha_n| > (A+B)\,\vartheta^m \qquad \vartheta \geq 1$$

n ρίζαι αὐτοῦ εὑρίσκονται ἐντὸς καὶ m-n ἐκτὸς τοῦ κύκλου τῆς μονάδος.

4. Εἰς τὴν περίπτωσιν καθ' ἣν n=m τὸ θεώρημα ἰσχύει ἐπίσης καὶ ἀποδεικνύεται ὡς ἕπεται. Ἔστω ὅτι διὰ τὸ πολυώνυμον

$$\varphi(z) = \alpha_m z^m + \alpha_{m-1} z^{m-1} + \cdots + \alpha_1 z + \alpha_0$$

ἰσχύει ἡ συνθήκη

$$(\sigma) \qquad |\alpha_m| > |\alpha_{m-1}| + |\alpha_{m-2}| + \cdots + |\alpha_1| + |\alpha_0|$$

λέγω τότε ὅτι ὅλαι αἱ ρίζαι τοῦ δοθέντος πολυωνύμου εὑρίσκονται ἐντὸς τοῦ κύκλου τῆς μονάδος. Πράγματι ἐὰν θεωρήσωμεν τὴν τυχοῦσαν ρίζαν αὐτοῦ ἔστω τὴν x ($|x| = p$) ἔχομεν

$$|\alpha_m|\,p^m - \Big\{ |\alpha_{m-1}|\,p^{m-1} + |\alpha_{m-2}|\,p^{m-2} + \cdots +$$
$$+ |\alpha_1|\,p + \alpha^0 \Big\} \leqslant 0$$

Ἐὰν ἑπομένως $p \geqslant 1$ θὰ ἔχωμεν

$$|\alpha_m|\,p \leqslant |\alpha_{m-1}| + |\alpha_{m-2}| + \cdots + |\alpha_1| + |\alpha_0|$$

ἄρα καὶ

$$|\alpha_m| \leqslant |\alpha_{m-1}| + |\alpha_{m-2}| + \cdots + |\alpha_1| + |\alpha_0$$

ἀφοῦ $p \geq 1$ τοῦτο ὅμως εἶναι ἀντίθετον τῆς (σ) ἄρα $p < 1$

5. Στηριζόμενοι ἤδη εἰς τὴν προηγουμένην πρότασιν δυνάμεθα νὰ δείξωμεν τὸ θεώρημα τοῦ Sergesco καὶ ὡς ἑξῆς. Λάβομεν ἐκ νέου τὸ πολυώνυμον

$$\varphi(z) = \alpha_m z^m + \alpha_{m-1} z^{m-1} + \cdots + \alpha_1 z + \alpha_0$$

καὶ ὑποθέτομεν ὅτι πληροῦνται αἱ συνθῆκαι

$$(\tau) \qquad |\alpha_m| > |\alpha_i| \qquad i = 0, 1, 2, \cdots m-1$$

τοῦ πολυωνύμου τούτου λέγω ὅτι ὅλαι αἱ ῥίζαι εὑρίσκονται ἐντὸς τοῦ κύκλου ἀκτῖνος 2. Πράγματι ἐὰν εἰς τὸ φ (z) ἐκτελέσωμεν τὸν μετασχηματισμὸν

$$z = 2\,x$$

λαμβάνομεν ὡς μετασχηματισμένον πολυώνυμον αὐτοῦ τὸ

$$\varphi_1(x) \equiv 2^m \alpha_m x^m + 2^{m-1} \alpha_{m-1} x^{m-1} + \cdots + 2^2 \alpha_2 x^2 + 2\alpha_1 x + \alpha_0 \equiv$$

$$\equiv \alpha^1_m x^m + \alpha^1_{m-1} x^{m-1} + \cdots + \alpha^1_1 x + \alpha^1_0$$

ἐκ τῶν σχέσεων ὅμως (τ) ἔχομεν

$$(\tau') \left\{ \begin{array}{l} |\alpha_m| > |\alpha_0| \\ 2\,|\alpha_m| > |2\,|\alpha_1| \\ 2^2\,|\alpha_m| > |2^2\,|\alpha_2| \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ 2^{m-1}\,|\alpha_m| > 2^{m-1}\,|\alpha_{m-1}| \end{array} \right.$$

ἢ ἐὰν προσθέσωμεν ταύτας κατὰ μέλη

$$\left\{ 1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^{m-1} \right\} |\alpha_m| = \left(2^m - 1\right) |\alpha_m| > 2^{m-1} |\alpha_{m-1}| +$$

$$+ \cdots + 2\,|\alpha_1| + |\alpha_0|$$

ἢ

$$|\alpha^1_m| > |\alpha^1_{m-1}| + |\alpha^1_{m-2}| + \cdots + |\alpha^1_1| + |\alpha^1_0|$$

ἡ τελευταία αὕτη ἀνισότης συμφώνως πρὸς τὴν προηγουμένην πρότασιν δεικνύει ὅτι ὅλαι αἱ ῥίζαι τοῦ φ_1 (x) εὑρίσκονται ἐντὸς τοῦ κύκλου τῆς μονάδος ἄρα δυνάμει τοῦ μετασχηματισμοῦ

$$z = 2\,x$$

ὅλα αἱ ῥίζαι τοῦ φ (z) εὑρίσκονται ἐντὸς τοῦ κύκλου ἀκτῖνος 2.

6. Τῆς ἰδίας προτάσεως δίδομεν ἀκόμη καὶ τὴν ἑπομένην ἀπόδει-

ξιν. Ἔστω πάλιν ὅτι διὰ τὸ πολυώνυμον

$$\varphi(z) \equiv \alpha_m z^m + \alpha_{m-1} z^{m-1} + \cdots + \alpha_1 z + \alpha_o$$

ἰσχύουν αἱ σχέσεις

$$|\alpha_m| > |\alpha_i| \qquad i = o, 1, 2, \cdots, m-1$$

λέγω τότε ὅτι τοῦ πολυωνύμου τούτου ὅλαι αἱ ῥίζαι εὑρίσκονται ἐντὸς τοῦ κύκλου ἀκτῖνος 2.

Ἀ π ό δ ε ι ξ ι ς. Ἂς εἶναι x μία τυχοῦσα ῥίζα τοῦ $\varphi(z)$ καὶ ἂς εἶναι $|x| = p > 1$ (Τὴν ὑπόθεσιν $p > 1$ δυνάμεθα νὰ κάμωμεν καθόσον αἱ ῥίζαι $p < 1$ πληροῦν τοὺς ὅρους τοῦ θεωρήματος ἐκ τῶν προτέρων καὶ ἑπομένως μᾶς εἶναι ἀδιάφοροι) ἔχομεν τότε

$$|\alpha_m| p^m \leq |\alpha_{m-1}| p^{m-1} + |\alpha_{m-2}| p^{m-2} + \cdots + |\alpha_1| p + |\alpha_o|$$

ἢ

$$p^m < p^{m-1} + p^{m-1} + \cdots + p^2 + p + 1 = \frac{p^m - 1}{p - 1}$$

ἢ λόγῳ τῆς γενομένης ὑποθέσεως $p > 1$

$$(t) \qquad p^{m+1} - 2p^m + 1 < o$$

ἐκ τῆς τελευταίας ὅμως ταύτης σχέσεως προκύπτει ἀμέσως $p < 2$ ἐὰν τὴν σχέσιν (t) γράψωμεν τώρα

$$p < 2 - \frac{1}{p^m}$$

ἐπειδὴ $p < 2$ θὰ ἔχωμεν καὶ

$$p < 2 - \frac{1}{2^m}$$

ἤτοι τὸ ἀνώτερον ὅριον τὸ δοθὲν ὑπὸ τοῦ Sergesco.

7. Μία ἐνδιαφέρουσα ἐφαρμογὴ [1] τῆς δειχθείσης προτάσεως (§ 3)

---

[1] L. Berwald—Über einige mit dem Satz von Kakeya verwandte Sätze (Math. Zeitschrift B. 37, S. 61).

εἶναι καὶ ἡ ἑπομένη πρότασις ἥτις ἀναμφιβόλως δύναται νὰ θεωρηθῆ ὡς γενικωτέρα ἔκφρασις τοῦ θεωρήματος τοῦ Kakeya ἡ ἐν λόγῳ πρότασις ἐκφωνεῖται ὡς ἕπεται. Δίδεται τὸ πολυώνυμον

$$f(x) \equiv \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \cdots + \alpha_p x^p + \alpha_{p+1} x^{p+1} - \cdots - \alpha_{m-1} x^{m-1} - \alpha_m x^m$$

ὅπου ὅλα τὰ α εἶναι ἀριθμοὶ πραγματικοὶ καὶ θετικοὶ καὶ ὑπόκεινται εἰς τὰς συνθήκας

$$(1) \quad -\alpha_{p+1} < -\alpha_{p+2} < \cdots < -\alpha_m < 0 < \alpha_0 < \alpha_1 < \cdots < \alpha_p$$

λέγω τότε ὅτι p τοὐλάχιστον ῥίζαι τοῦ πολυωνύμου τούτου εὑρίσκονται εἰς τὸν τόπον

$$|x| \leqslant 1$$

Πράγματι πολλαπλασιάζοντες τὸ $f(x)$ ἐπὶ $(1-x)$ λαμβάνομεν τὸ πολυώνυμον

$$f_1(x) \equiv f(x)(1-x) \equiv \alpha_0 + (\alpha_1 - \alpha_0)x + (\alpha_2 - \alpha_1)x^2 + \cdots + \left(\alpha_p - \alpha_{p-1}\right)x^p - \left(\alpha_{p+1} + \alpha_p\right)x^{p+1} + \left(\alpha_{p+1} - \alpha_{p+2}\right)x^{p+1} + \cdots + \alpha_m x^m$$

διὰ τὸ ὁποῖον ἔχομεν

$$(2) \quad \left\{ \begin{aligned} &|\alpha_{p+1} + \alpha_p| = |\alpha_0| + |\alpha_1 - \alpha_0| + |\alpha_2 - \alpha_1| + \cdots + \\ &+ |\alpha_{p-1} - \alpha_{p-2}| + |\alpha_p - \alpha_{p-1}| + |\alpha_{p+1} - \alpha_{p+2}| + \cdots + \\ &+ |\alpha_{m-1} - \alpha_m| + |\alpha_m| \end{aligned} \right.$$

λόγῳ τῆς τεθείσης συνθήκης (1).

Ἡ ἰσότης (2) συνεπάγεται προφανῶς ὅτι τὸ πολυώνυμον $f_1(x)$ εἰς τὸν τὸν τόπον $|x| \leqq 1$ ἔχει τοὐλάχιστον $(p+1)$ ῥίζας, καθὸν ἐν ἐναντία περιπτώσει δίδοντες μίαν ἀπειροστὴν αὔξησιν εἰς τὸν συντελεστὴν $-\left(\alpha_{p+1} + \alpha_p\right)$ οὕτως ὥστε τὸ μέτρον αὐτοῦ νὰ αὐξηθῆ θὰ προέκυπτε ἓν νέον πολυώνυμον $F_1(x)$ ἐν τῷ ὁποίῳ ἡ ἰσότης (2) θὰ ἐτρέπετο εἰς ἀνισότητα ἥτις συμφώνως πρὸς τὴν ἀποδειχθεῖσαν πρότασιν (§ 3) θὰ συνεπήγετο τὴν ὕπαρξιν εἰς τὸ ἐσωτερικὸν τοῦ τόπου $|x| < 1$ πλήθους ῥιζῶν $(p+1)$ ἀκριβῶς τοῦ πολυωνύμου τὸ ὁποῖον θὰ προκύψῃ ἐκ τοῦ $f_1(x)$ μετὰ τὴν αὔξησιν τοῦ $-\left(\alpha_{p+1}+\alpha_p\right)$ Πρᾶγμα τὸ ὁποῖον εἶναι ἀντίθετον πρὸς τὴν γενομένην ὑπόθεσιν· ὅτι δηλαδὴ εἰς τὸν τόπον $|z| \leqslant 1$ ὑπάρχουν ὀλιγώτεραι τῶν $p+1)$ ῥίζαι τοῦ $f_1(x)$ καθόσον ἡ αὔξησις δύναται νὰ εἶναι ὅσον ἂν θέλωμεν μικρὰ (ἑπομένως καὶ ἡ μετατόπισις τῶν ῥιζῶν) ἑπομένως δυνάμεθα νὰ ὁρίσωμεν τὴν αὔξησιν ταύτην εἰς τρόπον ὥστε ὅσαι ῥίζαι εὑρίσκοντο εἰς τὸ ἐξωτερικὸν πρὸ τῆς αὐξήσεως νὰ εὑρίσκονται καὶ μετὰ ταύτην ἀλλ' ἐκ παραδοχῆς εἰς τὸ ἐξωτερικὸν τοῦ τόπου $|z| \leqq 1$ εὑρίσκονται περισσότεραι τῶν $m-p$ ἐνῷ διὰ τὸ πολυώνυμον $F_1(x)$ τὸ ὁποῖον λόγῳ τοῦ ἀπειροστοῦ τῆς αὐξήσεως ὀφείλει νὰ ἔχῃ τὸ αὐτὸ πλῆθος ῥιζῶν εἰς τὸ ἐξωτερικὸν τοῦ τόπου $|z| \leqq 1$ μετὰ τοῦ $f_1(x)$ ἔχομεν ὅτι τοῦτο ἔχει ἀκριβῶς $m-p$ ὅπερ ἄτοπον ἄρα εἰς τὸν τόπον $|z| \leqq 1$ ὑπάρχουν τοὐλάχιστον $p+m$ ῥίζαι τοῦ $f_1(x)$ καὶ ἑπομένως p τοὐλάχιστον τοῦ $f(x)$.

8. Μία ἄλλη γενίκευσις[1] τοῦ θεωρήματος τοῦ Kakeya ἀναφερομένη εἰς τὸ σύνολον τῶν ριζῶν εἶναι καὶ ἡ ἑπομένη δίδεται τὸ πολυώνυμον

$$\varphi(z) = \alpha_0 + \alpha_1 z + \alpha_2 z^2 + \cdots + \alpha_n z^n$$

μὲ συντελεστὰς πραγματικοὺς καὶ θετικούς, ἐὰν τότε μεταξὺ τῶν συντελεστῶν αὐτοῦ ὑφίστανται αἱ σχέσεις

$$\text{(A)} \qquad p\,\alpha_\lambda - \alpha_{\lambda-1} > o \qquad p > o \quad \lambda = 1, 2, \ldots n$$

ὅλαι αἱ ῥίζαι τοῦ δοθέντος πολυωνύμου εὑρίσκονται ἐντὸς κύκλου ἀκτῖνος p ἡ ἀπόδειξις τῆς προτάσεως ταύτης εἶναι σχεδὸν προφανὴς καθόσον δὲν ἔχομεν παρὰ εἰς τὸ δοθὲν πολυώνυμον $\varphi(z)$ νὰ ἐκτελέσωμεν τὸν μετασχηματισμὸν $z = p\,x$ ὅτε λαμβάνομεν

$$\varphi(px) = \alpha_0 + \alpha_1 px + \alpha_2 p^2 x^2 + \cdots + \alpha_n p^n x^n$$

τοῦ πολυωνύμου ὅμως τούτου οἱ συντελεσταὶ ὄντες πραγματικοὶ καὶ θετικοὶ πληροῦν δυνάμει τῶν (A) τὰς σχέσεις

$$o < \alpha_0 < \alpha_1 p < \alpha_2 p^2 < \cdots < \alpha_n p^n$$

[1] E. Ecervary On a generalisation of a theorem of Kakeya (Acta Litterarum ac scientiarum t. v. p. 78-82).

συμφώνως ἄρα πρὸς τὸ θεώρημα τοῦ Kakeya ὅλαι αἱ ῥίζαι αὐτοῦ εὑρίσκονται ἐντὸς τοῦ κύκλου ἀκτῖνος 1 δυνάμει ἑπομένως τοῦ μετασχηματισμοῦ $z = px$ ὅλαι αἱ ῥίζαι τοῦ $\varphi(z)$ εὑρίσκονται ἐντὸς τοῦ κύκλου ἀκτῖνος p.

9. Ἐδείχθη ἀνωτέρω ὅτι ἐὰν διὰ τὸ πολυώνυμον

$$\varphi(z) \equiv \alpha_m z^m + \alpha_{m-1} z^{m-1} + \cdots + \alpha_1 z + \alpha_m$$

ἰσχύουν αἱ συνθῆκαι

$$|\alpha_m| > |\alpha_i| \qquad i = o, 1, 2, \cdots m-1$$

ὅλαι αἱ ῥίζαι τοῦ $\varphi(z)$ εὑρίσκονται ἐντὸς τοῦ κύκλου ἀκτῖνος 2. Θὰ δείξωμεν τώρα ὅτι ἐὰν διὰ τὸ ἴδιον πολυώνυμον $\varphi(z)$ ἰσχύουν αἱ συνθῆκαι

$$(1) \qquad |\alpha_{m-1}| > |\alpha_i| \quad i = o, 1, 2, \cdots m-2$$

(m-1) ῥίζαι τοῦ πολυωνύμου τούτου εὑρίσκονται ἐντὸς κύκλου ἀκτῖνος 4 ἢ 2^2 Πράγματι ἐὰν εἰς τὸ $\varphi(z)$ ἐκτελέσωμεν τὸν μετασχηματισμὸν

$$z = 2x$$

λαμβάνομεν ὡς μετασχηματισμένον πολυώνυμον τούτου τὸ

$$\varphi_1(x) = 2^m \alpha_m x^m + 2^{m-1} \alpha_{m-1} x^{m-1} + 2^{m-2} \alpha_{m-2} x^{m-2} + \cdots +$$

$$+ 2\alpha_1 x + \alpha_o \equiv b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + b_{m-2} x^{m-2} + \cdots + b_1 x + b_o$$

ὁπότε διὰ νὰ δειχθῇ τὸ προηγούμενον ἀρκεῖ προφανῶς νὰ δειχθῇ ὅτι τὸ $\varphi_1(x)$ ἔχει (m-1) ῥίζας ἐντὸς τοῦ κύκλου ἀκτῖνος 2, τὸ ὁποῖον ὄντως συμβαίνει καθόσον ἐκ τῶν (1) προκύπτει

$$2^{m-1} |\alpha_{m-1}| > 2^{m-2} |\alpha_{m-2}| + \cdots + 2|\alpha_1| + |\alpha_o|$$

$$\text{ἢ} \quad (2) \qquad |b_{m-1}| > |b_{m-2}| + |b_{m-3}| + \cdots + |b_1| + |b_o|$$

Ἐὰν ἑπομένως $-\xi$ εἶναι ἡ μεγαλειτέρου μέτρου ῥίζα τοῦ $\varphi_1(x)$ δυνάμεθα νὰ ὑποθέσωμεν $|-\xi| \geq 2$ διότι ἐν ἐναντίᾳ περιπτώσει ὅλαι αἱ ῥίζαι τοῦ $\varphi_1(x)$ θὰ ἦσαν ἐντὸς τοῦ κύκλου ἀκτῖνος 2 καὶ τὸ θεώρημά μας θὰ ἦτο ἐκ τῶν προτέρων ἀληθές. Τούτου τεθέντος ἂν διαιρέσωμεν τὸ πολυώνυμον $\varphi_1(x)$ διὰ τοῦ διωνύμου $(x+\xi)$ λαμβάνομεν

$$F(x) \equiv \frac{\varphi_1(x)}{x+\xi} \equiv B_{m-1} x^{m-1} + B_{m-2} x^{m-2} + \cdots + B_1 x + B_0$$

ὡς γνωστὸν ὅμως οἱ συντελεσταὶ τοῦ πολυωνύμου τούτου συνδέονται μὲ τοὺς τοῦ $\varphi_1(x)$ διὰ τῶν ἑπομένων σχέσεων

$$(3) \quad b_m = B_{m-1},\ b_{m-1} = B_{m-2} + \xi B_{m-1},\ b_{m-2} = B_{m-3} +$$

$$+ \xi B_{m-2} \ldots b_1 = B_0 + \xi B_1\ b_0 = \xi B_0$$

ἐὰν λοιπὸν συνδιάσωμεν τὰς σχέσεις ταύτας μὲ τὴν (2) λαμβάνομεν

$$(4) \quad |B_{m-2} + \xi B_{m-1}| > |B_{m-3} + \xi B_{m-2}| + \cdots + |B_0 +$$

$$+ \xi B_1| + |\xi B_0|$$

$$\text{ἢ} \quad (5) \quad |B_{m-2}| + |\xi|\,|B_{m-1}| > |\xi|\,|B_{m-2}| - |B_{m-3}|$$

$$+ \cdots + |\xi|\,|B_1| - |B_0| + |\xi|\,|B_0|$$

$$\text{ἢ} \quad (6) \quad |B_{m-1}| > \frac{|\xi|-1}{|\xi|}\Big\{ |B_{m-2}| + |B_{m-3}| + \cdots + |B_1| +$$

$$+ |B_0| \Big\}$$

ἐπειδὴ δ' ἐξ ὑποθέσεως $|\xi| \geqslant 2$ ἕπεται $\frac{|\xi|-1}{|\xi|} \geqslant \frac{1}{2}$ καὶ ἑπομένως

$$(7) \quad |B_{m-1}| > \frac{|B_{m-2}| + |B_{m-3}| + \cdots + |B_1| + |B_0|}{2}$$

ἐκ τῆς ὁποίας πάλιν προκύπτει ἡ ἑπομένη

$$(8) \quad |B_{m-1}| > \frac{|B_{m-2}|}{2} + \frac{|B_{m-3}|}{2^2} + \cdots + \frac{|B_1|}{2^{m-2}} + \frac{|B_0|}{2^{m-1}}$$

$$\text{ἢ} \quad (9) \quad 2^{m-1}|B_{m-1}| > 2^{m-2}|B_{m-2}| + 2^{m-3}|B_{m-3}| +$$

$$+ \cdots + 2|B_1| + |B_0|$$

ἡ τελευταία αὕτη ἀνισότης δεικνύει προφανῶς ὅτι ἐὰν εἰς τὸ πολυώνυμον $F(x)$ ἐκτελέσωμεν τὸν μετασχηματισμόν

$$x = 2y$$

Τὸ προκύπτον μετασχηματισμένον πολυώνυμον ὡς πρὸς y θὰ ἔχη τὸν συντελεστὴν τῆς μεγαλειτέρας δυνάμεως τοῦ y κατὰ μέτρον μεταλείτερον τοῦ ἀθροίσματος τῶν μέτρων ὅλων τῶν ἄλλων συντελεστῶν. Καὶ ἑπομένως κατὰ τὴν δειχθεῖσαν πρότασιν (§ 5) ὅλαι αἱ ῥίζαι αὐτοῦ θὰ εὑρίσκονται ἐντὸς τοῦ κύκλου τῆς μονάδος. Ἄρα ὅλαι αἱ ῥιζαι τοῦ $F(x)$ δυνάμει τοῦ μετασχηματισμοῦ $x = 2y$ θὰ εὑρίσκονται ἐντὸς τοῦ κύκλου ἀκτῖνος 2. Ἑπομένως τὸ $\varphi_1(x)$ ἔχει $(m-1)$ ῥιζας ἐντὸς τοῦ κύκλου ἀκτῖνος 2, καὶ κατὰ συνέπειαν τὸ $\varphi(z)$ ἔχει ὁμοίως $(m-1)$ ῥιζας ἐντὸς τοῦ κύκλου ἀκτῖνος 2^2.

10. Ἡ γενίκευσις τῆς ἀνωτέρω προτάσεως εἶναι σχεδὸν προφανὴς καὶ ἐπιτυγχάνεται ὡς ἕπεται.

Γενικεύομεν πρῶτον τὴν δειχθεῖσαν ἤδη πρότασιν κατὰ τὴν ὁποίαν ἐὰν εἰς τὸ πολυώνυμον

$$\varphi(z) = \alpha_m z^m + \alpha_{m-1} z^{m-1} + \cdots + \alpha_1 z + \alpha_0$$

$$|\alpha_m| > |\alpha_{m-1}| + |\alpha_{m-2}| + \cdots + |\alpha_1| + |\alpha_0|$$

ὅλαι αἱ ριζαι τοῦ πολυωνύμου τούτου εὑρίσκονται ἐντὸς κύκλου ἀκτῖνος 1 ἢ 2° Διὰ τὴν γενίκευσιν ταύτην ὑποθέτομεν ὅτι διὰ τὴν περίπτωσιν καθ' ἣν

$$|\alpha_{m-k+1}| > |\alpha_{m-k}| + |\alpha_{m-k-1}| + \cdots + |\alpha_1| + |\alpha_0|$$

τὸ πολυώνυμον $\varphi(z)$ ἔχει $m-k+1$ ῥίζας ἐντὸς τοῦ κύκλου ἀκτῖνος 2^{k-1} καὶ δεικνύομεν ἀκολούθως ὅτι ἐὰν

$$|\alpha_{m-k}| > |\alpha_{m-k-1}| + |\alpha_{m-k-2}| + \cdots + |\alpha_1| + |\alpha_0|$$

$m-k$ ῥιζαι αὐτοῦ εὑρίσκονται ἐντὸς τοῦ κύκλου ἀκτῖνος 2^k Ἡ ἀπόδειξις γίνεται καθὼς καὶ εἰς τὴν προηγουμένην μερικὴν περίπτωσιν θεωροῦμεν δηλαδὴ τὸ πολυώνυμον.

$$\varphi(z) \equiv \alpha_m z^m + \cdots + \alpha_{m-k+1} z^{m-k+1} + \alpha_{m-k} z^{m-k} +$$

$$+ \alpha_{m-k-1} z^{m-k-1} + \cdots + \alpha_1 z + \alpha_0$$

διὰ τὸ ὁποῖον ὑποθέτομεν

$$(1) \qquad |\alpha_{m-k}| > |\alpha_{m-k-1}| + |\alpha_{m-k-2}| + \cdots + |\alpha_1| + |\alpha_0|$$

θεωροῦμεν δ' ἀκολούθως τὴν μεγαλειτέρου μέτρου ῥίζαν τούτου ἥτις ἔστω ἡ-ξ (τὴν ῥίζαν ταύτην δυνάμεθα ὡς καὶ ἐν τοῖς προηγουμένοις νὰ ὑποθέσωμεν μεγαλειτέραν ἢ ἴσην τοῦ $\overset{k}{2}$ ἄρα καὶ τοῦ 2) καὶ διαιροῦμεν τὸ $\varphi'(z)$ διὰ τοῦ διωνύμου $z+\xi$ ὅτε λαμβάνομεν τὸ πολυώνυμον

$$F(z) = B_{m-1} z^{m-1} + B_{m-2} z^{m-2} + \ldots + B_{m-k} z^{m-k} + B_{m-k-1} z^{m-k-1} + \ldots + B_1 z + B_0$$

Ἐκ τῆς σχέσεως (1) καὶ ἐκ τῶν γνωστῶν σχέσεων αἵτινες συνδέουν τοὺς συντελεστὰς τοῦ $\varphi(z)$ μὲ τοὺς τοῦ $F(z)$ ἔχομεν

$$(2) \quad |B_{m-k-1} + \xi B_{m-k}| > |B_{m-k-2} + \xi B_{m-k-1}| + \ldots + |B_0 + \xi B_1| + |\xi B_0|$$

$$\text{ἢ} \quad |B_{m-k}| > \frac{|\xi|-1}{|\xi|} \left\{ |B_{m-k-1}| + |B_{m-k-2}| + \ldots + |B_1| + |B_0| \right.$$

$$\text{ἢ} \quad |B_{m-k}| > \frac{|B_{m-k-1}| + |B_{m-k-2}| + \ldots + |B_1| + |B_0|}{2}$$

$$\text{ἢ} \quad (3) \quad 2^{m-k} |B_{m-k}| > 2^{m-k-1} |B_{m-k-1}| + 2^{m-k-2} |B_{m-k-2}| + \ldots + |2|B_1| + |B_0|$$

ἡ τελευταία αὕτη σχέσις δεικνύει ὅτι ἐὰν εἰς τὸ πολυώνυμον $F(z)$ ἐκτελέσωμεν τὸν μετασχηματισμὸν

$$z = 2x$$

τὸ μετασχηματισμένον πολυώνυμον τούτου τὸ ὁποῖον εἶναι τὸ

$$f(x) \equiv F(2x) \equiv 2^{m-1} B_{m-1} x + \ldots + 2^{m-k} B_{m-k} x + \ldots + 2 B_1 x + B_0$$

ἔχει τὸν συντελεστὴν $2^{m-k} B_{m-k}$ ὁ ὁποῖος προφανῶς ἀπέχει ἀπὸ τοῦ πρώτου (k-1) θέσεις κατὰ μέτρον μεγαλείτερον τοῦ ἀθροίσματος τῶν μέτρων τῶν ἑπομένων του. Συμφώνως λοιπὸν πρὸς τὴν γενομένην ὑπόθεσιν τὸ $f(x)$ ἔχει m-k ῥίζας ἐντὸς τοῦ κύκλου ἀκτῖνος $\overset{k-1}{2}$ ἄρα δυνάμει τοῦ μετασχηματισμοὺ $z = 2^k x$ τὸ $F(x)$ θὰ ἔχῃ m-k ῥίζας ἐντὸς τοῦ κύκλου ἀκτῖνος 2^k ἄρα τὸ $\varphi(z)$ m-k ῥίζας ἐντὸς τοῦ αὐτοῦ κύκλου.

11. Κατόπιν τῆς προτάσεως ταύτης ἡ πρότασις καθ' ἣν ἐὰν διὰ τὸ πολυώνυμον

$$\varphi(z) = \alpha_m z^m + \alpha_{m-1} z^{m-1} + \dots + \alpha_{m-k} z^{m-k} + \dots + \alpha_1 z + \alpha_0$$

$$|\alpha_{m-k}| > |\alpha_i| \quad i = 0, 1, 2, \dots, m-k-1$$

m-k ῥίζαι τοῦ πολυωνύμου τούτου εὑρίσκονται ἐντὸς τοῦ κύκλου ἀκτῖνος 2^{k+1} εἶναι προφανὴς καθόσον δὲν ἔχομεν παρὰ νὰ ἐκτελέσωμεν πάλιν τὸν μετασχηματισμὸν $z = 2x$ ὅτε εἰς τὸ μετασχηματισμένον πολυώνυμον ὁ συντελεστὴς τοῦ x^{m-k} γίνεται κατὰ μέτρον μεγαλείτερος τοῦ ἀθροίσματος τῶν μέτρων ὅλων τῶν ἑπομένων του καὶ ἑπομένως κατὰ τὴν προηγουμένην πρότασιν τὸ μετασχηματισμένον θὰ ἔχῃ m-k ῥίζας ἐντὸς τοῦ κύκλου ἀκτῖνος 2^k ἄρα καὶ τὸ $\varphi(z)$ θὰ ἔχῃ m-k ῥίζας ἐντὸς τοῦ κύκλου ἀκτῖνος 2^{k+1}.

12. Πόρισμα. Εἰς προηγουμένην μας ἐργασίαν[1] ἔχομεν δείξει ὅτι ἐὰν δοθῇ τὸ πολυώνυμον

$$\varphi(z) = \alpha_0 + \alpha_1 z + \dots + \alpha_p z^p + \dots + \alpha_{p+k} z^{p+k}$$

δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν ἕνα σταθερὸν ἀριθμὸν $\Lambda(\alpha_0\, \alpha_1 \dots \alpha_p)$ ἐξαρτώμενον ἐκ τῶν $\alpha_0\, \alpha_1, \dots \alpha_p$ τοιοῦτον ὥστε ὅταν εἰς τὸ $\varphi(z)$ ἐκτελέσωμεν τὸν μετασχηματισμὸν $z = \Lambda x$ διὰ τὸ μετασχηματισμένον πολυώνυμον

$$\varphi(\Lambda x) = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \dots + A_p x^p + \dots + A_{p+k} x^{p+k}$$

νὰ ἔχωμεν τὰς σχέσεις

$$(\Sigma) \qquad |A_p| > |A_i| \qquad i = 0, 1, 2, \dots p-1$$

Ἐὰν ἑπομένως εἰς τὸ δοθὲν πολυώνυμον $\varphi(z)$ ὑποθέσωμεν $\alpha_0 = 1$ καὶ ἐκτελέσωμεν τὸν μετασχηματισμὸν $z = \Lambda x$ τὸ προκύπτον ἐξ αὐτοῦ μετα-

[1] Ι. Παπαδημητρίου. Περὶ τῶν ῥιζῶν τῶν πολυωνύμων (Δελτῖον Ἑλλ. Μαθ. Ἑταιρίας Τόμ. ΙΕ, τεῦχος Β'.

σχηματισμένον πολυώνυμον ὡς πρὸς τὸ x πληροῦν τὰς σχέσεις (Σ) θὰ ἔχῃ p ῥίζας συμφώνως πρὸς τὸ προηγούμενον θεώρημα ἐντὸς τοῦ κύκλου ἀκτῖνος 2^{k+1} ἄρα τὸ πολυώνυμον φ (z), p ῥίζας ἐντὸς τοῦ κύκλου ἀκτῖνος

$$\Lambda(\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_p)\, 2^{k+1} \equiv \varphi(\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_p, k)$$

Συνάγομεν ὅθεν μετὰ τοῦ κ. Montel ὅτι ἡ ἐξίσωσις

$$1 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \cdots + \alpha_p x^p + \cdots + \alpha_{p+k} x^{p+k} = 0$$

ἔχει p ῥίζας ἐντὸς κύκλου ἀκτῖνος $\varphi(\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_p, k)$

13. Θὰ θεωρήσωμεν ἤδη τὸ πολυώνυμον

$$\varphi(z) \equiv \alpha_0 + \alpha_1 z + \alpha^2 z^2 + \cdots + \alpha_{m-1} z^{m-1} + z^m \qquad \alpha_0 \neq 0$$

μὲ τυχόντας συντελεστὰς μὴ ὑποκειμένους εἰς οὐδεμίαν συνθήκην καὶ θὰ ζητήσωμεν νὰ εὕρωμεν ἀνώτερον ὅριον τῶν p πρώτων ῥιζῶν αὐτοῦ (αἱ ῥίζαι $z_1, z_2, \cdots z_p \cdots z_m$ ὑποτίθενται διατεταγμέναι κατὰ τάξιν μέτρου αὔξοντος ἤτοι ὑποθέτομεν $|z_1| \leq |z_2| \leq \cdots \leq |z_p| \leqslant \cdots \leqslant |z_m|$. Διὰ τὴν εὕρεσιν τοῦ τοιούτου ὁρίου θὰ στηριχθῶμεν εἰς τὴν παρατήρησιν ὅτι ἐὰν δοθῇ τὸ πολυώνυμον

$$\sigma(x) \equiv A_0 + A_1 x + \cdots + A_p x^p + \cdots + A_{k-1} x^{k-1} + x^k$$

τοῦ ὁποίου ἐξ ὑποθέσεως ὅλαι αἱ ῥίζαι κατὰ μέτρον εἶναι μεγαλείτεραι ἢ ἴσαι τῆς μονάδος καὶ ἐὰν αἱ ῥίζαι αὗται εἶναι αἱ $x_1 x_2 \cdots x_k$ ($|x_1|$

$\leq |x_2| \leqslant \cdots \leqslant |x_k|$) ἔχομεν ἀσφαλῶς

$$|x_\lambda| \leq \sqrt[k-\lambda+1]{|A_0|} \qquad \lambda = 1, 2, 3, \ldots k$$

καθόσον ἐκ τῶν

$$1 \leq |x_1| \leq |x_2| \leq \cdots \leq |x_{\lambda-1}| \leq |x_\lambda| \leq |x_{\lambda+1}| \leq \cdots \leq |x_k|$$

προκύπτει

$$|x_\lambda|^{k-\lambda+1} \leq |x_1|\,|x_2| \cdots |x_{\lambda-1}|\,|x_\lambda|^{k-\lambda+1} \leq |x_1|\,|x_2| \ldots$$

$$\ldots\ |x_{\lambda-1}|\ |x_\lambda|\ \cdots\ |x_k| = |A_0|$$

ἄρα καὶ

$$|x_\lambda| \leq \sqrt[k-\lambda+1]{|A_0|}$$

Τούτων τεθέντων εἰς τὸ πολυώνυμον φ (z) ἂς ἐκτελέσωμεν τὸν μετασχηματισμὸν

$$Z=\frac{1}{x}$$

λαμβάνομεν τότε ὡς μετασχηματισμένον πολυώνυμον τοῦ φ (z) τὸ

$$x^m \varphi\left(\frac{1}{x}\right)=f(x)\equiv \alpha_0 x^m+\alpha_1 x^{m-1}+\ldots+\alpha_{m-1} x+1$$

τὸ ὁποῖον προφανῶς ἔχει τὰς αὐτὰς ῥίζας μὲ τὸ πολυώνυμον

$$f(x)\equiv x^m+\frac{\alpha_1}{\alpha_0}x^{m-1}+\frac{\alpha_2}{\alpha_0}x^{m-2}+\ldots+\frac{\alpha_{m-1}}{\alpha_0}x+\frac{1}{\alpha_0}$$

τοῦ πολυωνύμου τούτου κατὰ τὴν γνωστὴν πρότασιν τοῦ Walsh ὅλαι αἱ ῥίζαι εὑρίσκονται ἐντὸς ἢ ἐπὶ τῆς περιφερείας τοῦ κύκλου ἀκτῖνος

$$R=\left|\frac{1}{\alpha_0}\right|^{\frac{1}{m}}+\left|\frac{\alpha_{m-1}}{\alpha_0}\right|^{\frac{1}{m-1}}+\ldots+\left|\frac{\alpha_2}{\alpha_0}\right|^{\frac{1}{2}}+\frac{\alpha_1}{\alpha_0}$$

ἤτοι ἔχομεν

$$\frac{1}{|z_i|}=|x_i|\leq\left|\frac{1}{\alpha_0}\right|^{\frac{1}{m}}+\left|\frac{\alpha_{m-1}}{\alpha_0}\right|^{\frac{1}{m-1}}+\ldots+\left|\frac{\alpha_2}{\alpha_0}\right|^{\frac{1}{2}}+\left|\frac{\alpha_1}{\alpha_0}\right|$$

$$i=1,2,3,.\ m$$

ἄρα καὶ

$$|z_i|\geq\frac{1}{\left|\frac{1}{\alpha_0}\right|^{\frac{1}{m}}+\left|\frac{\alpha_{m-1}}{\alpha_0}\right|^{\frac{1}{m-1}}+\ldots+\left|\frac{\alpha_2}{\alpha_0}\right|^{\frac{1}{2}}+\left|\frac{\alpha_1}{\alpha_0}\right|}\equiv K$$

χάρις ὅμως εἰς τὴν ἀνισότητα ταύτην ἐὰν εἰς τὸ πολυώνυμον

$$\varphi(z)=\alpha_0+\alpha_1 z+\alpha_2 z^2+\ldots+\alpha_{m-1} z^{m-1}+z^m$$

ἐκτελέσωμεν τὸν μετασχηματισμὸν $y = \frac{z}{k}$ Τὸ ὡς πρὸς y μετασχηματισμένον πολνώνυμιον τοῦ φ (z) ἤτοι τὸ

$$\varphi(yk) \equiv \alpha_0 + \alpha_1 ky + \alpha_2 k^2 y^2 + \dots + \alpha_{m-1} k^{m-1} y^{m-1} + k^m y^m$$

ἢ τὸ

$$F(y) \equiv \frac{\alpha_0}{k^m} + \frac{\alpha_0}{k^{m-1}} y + \dots + \frac{\alpha_{m-1}}{k} y^{m-1} + y^m$$

ἔχει ὅλας τὰς ῥίζας αὐτοῦ μεγαλειτέρας τῆς μονάδος καὶ ἐπομένως

$$|y_p| \leq \sqrt[m-p+1]{\frac{|\alpha_0|}{k^m}} \qquad p = 1,\ 2,\ 3, \dots\ m$$

ἄρα καὶ

$$|z_p| \leq \sqrt[m-p+1]{\frac{|\alpha_0|}{k^m}} \cdot k$$

δυνάμει τοῦ γενομένου μετασχηματισμοῦ $y = \frac{z}{k}$ ἢ ἐὰν ἀτικαταστήσωμεν τὸ Κ διὰ της τιμῆς του

$$|z_p| \leq |\alpha_0|^{\frac{1}{m-p+1}} \left\{ \left|\frac{1}{\alpha_0}\right|^{\frac{1}{m}} + \left|\frac{\alpha_{m-1}}{\alpha_0}\right|^{\frac{1}{m-1}} + \dots + \left|\frac{\alpha_2}{\alpha_0}\right|^{\frac{1}{2}} + \left|\frac{\alpha_1}{\alpha_0}\right| \right\}^{\frac{p-1}{m-p+1}}$$

ἡ σχέσις αὕτη χορηγεῖ προφανῶς ἀνώτερον ὅριον τῶν p πρώτων ῥιζῶν τοῦ φ (z). Τὸ εὑρεθὲν ὅριον ἂς ἐφαρμόσωμεν εἰς τὴν ἐξίσωσιν

$$x^3 - \frac{1}{8} = 0$$

ἔχομεν προφανῶς $\alpha_0 = -\frac{1}{8}$ $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ $m = 3$. Ἐὰν ἐπομένως θέσωμεν $p=2$ λαμβάνομεν

$$|z_2| \leq \left[\frac{1}{8}\right]^{\frac{1}{2}} (2)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$$

Ἐὰν πάλιν θέσωμεν $p = 1$ ἔχομεν

$$|z_1| \leq \left[\frac{1}{8}\right]^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{2}$$

καὶ τέλος ἐὰν θέσωμεν $p=3$ λαμβάνομεν

$$|z_3| \leq \left[\frac{1}{8}\right] (2)^2 = \frac{1}{2}$$

Βλέπομεν ὅθεν καὶ ἐκ τοῦ προκειμένου παραδείγματος ὅτι τὸ εὑρεθὲν ὅριον ἐξικνεῖται ἐνίοτε καὶ μέχρι τῶν ῥιζῶν. Ἐν τοῖς προηγουμένοις ὑπετέθη $a_0 \neq 0$ ἡ ὑπόθεσις ὅμως αὕτη δὲν περιορίζει τὸ ζήτημα καθόσον ἐὰν εἰς τὸ πολυώνυμον $\varphi(z)$ συμβῇ $a_0 = a_1 = a_2 = \cdots = a_{\lambda-1} = 0$ θὰ ἔχωμεν

$$\varphi(z) = a_\lambda z^\lambda + a_{\lambda+1} z^{\lambda+1} + \cdots + a_{m-1} z^{m-1} + z^m \equiv z^\lambda \varphi_1(z)$$

Εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην τὸ $\varphi(z)$ ἔχει προφανῶς τὴν ῥίζαν $z=0$ πολλαπλῆν βαθμοῦ πολλαπλότητος λ ὅσον δ' ἀφορᾷ τὰς λοιπὰς ἐφαρμόζομεν τὰ προηγούμενα ἐπὶ τοῦ πολυωνύμου $\varphi_1(z)$, τὸ ὁποῖον δυνάμεθα νὰ κάμωμεν ἀφοῦ $a_\lambda \neq 0$