

Ο ΝΟΜΟΣ ΤΗΣ ΑΙΤΙΟΤΗΤΟΣ
ΚΑΙ Η ΣΗΜΑΣΙΑ ΑΥΤΟΥ ΔΙΑ ΤΗΝ ΜΗΧΑΝΙΚΗΝ
ΚΑΙ ΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΥΠΟ

ΘΩΡΝΟΣ ΠΥΛΑΡΙΝΟΥ

Ο ΝΟΜΟΣ ΤΗΣ ΑΙΤΙΟΤΗΤΟΣ
ΚΑΙ Η ΣΗΜΑΣΙΑ ΑΥΤΟΥ ΔΙΑ ΤΗΝ ΜΗΧΑΝΙΚΗΝ
ΚΑΙ ΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ¹

Ἡ κατὰ τὰ τελευταῖα ἔτη παρατηρουμένη καταπληκτικὴ πρόοδος εἰς ὅλας τὰς κατευθύνσεις τοῦ τεχνικοῦ πολιτισμοῦ τῆς ἀνθρωπότητος ὀφείλεται ἀναμφιβόλως κατὰ μέγιστον μέρος εἰς τὴν ἀπὸ τῶν ἀρχῶν ἰδίᾳ τοῦ παρελθόντος αἰῶνος ἀρξαμένην καὶ ὀσημέραι ραγδαίως προοιούσαν ἀνάπτυξιν τῶν Τεχνικῶν καὶ τῶν Φυσικῶν γενικῶς Ἐπιστημῶν, δικαιολογοῦσαν ἐν πολλοῖς τοὺς ἀποκαλοῦντας τὴν ἐποχὴν μας αἰῶνα τῶν Φυσικῶν Ἐπιστημῶν.

Ἡ τάσις δὲ αὕτη, ἡ ὁποία χαρακτηρίζει ἰδίως τὴν ἐποχὴν μας, πρὸς ὑποταγὴν τῆς ὑλικῆς πραγματικότητος εἰς τὴν κυριαρχίαν τοῦ πνεύματος, ἐκδηλοῦται ὑπὸ δύο διαφόρους μορφάς· ἀφ' ἑνὸς ὑπὸ τὴν μορφήν τῶν ἐφευρέσεων εἰς τοὺς διαφόρους ἐφηρμοσμένους κλάδους τῶν Φυσικῶν Ἐπιστημῶν πρὸς ἐξυπηρέτησιν τῶν βιωτικῶν καὶ τῶν κοινωνικῶν γενικῶς ἀναγκῶν καὶ ἀφ' ἑτέρου ὑπὸ τὴν μορφήν τῆς διεισδύσεως εἰς τὸ βάθος τῶν φυσικῶν φαινομένων πρὸς ἀποκάλυψιν τῶν σχέσεων, αἱ ὁποῖαι ὑπάρχουν μεταξὺ τῶν στοιχείων τῶν ἀπαρτιζόντων τὰ φαινόμενα ταῦτα, μὲ ἀντικειμενικὸν σκοπὸν τὴν πρόβλεψιν αὐτῶν, κύριον ἄλλως τε σκοπὸν τῆς Ἐπιστήμης. Ὅσονδῆποτε δὲ μεγάλη καὶ ἂν εἶναι ἡ ἀξία τὴν ὁποίαν ἀποδίδομεν εἰς τὴν δημιουργικὴν δύναμιν τῶν ἐφευρέσεων, ἡ ἀξία, τῆς δευτέρας ταύτης μορφῆς, ὑπὸ τὴν ὁποίαν ἐκδηλοῦται ἢ ἐν λόγῳ τάσις, τῆς διαμορφώσεως δηλαδὴ τῶν διαφορῶν κλάδων τῆς Ἐπιστήμης, εἶναι κατὰ πολὺν μεγαλειτέρα, δεδομένου μάλιστα ὅτι αἱ πλεῖστοι τῶν ἐφευρέσεων βασίζονται ἐπὶ τῶν ὑπὸ τῆς Ἐπιστήμης ἐκάστοτε ἐπιτελουμένων προόδων.

Ἡ Ἐπιστήμη ὑπὸ τὴν σημερινὴν αὐτῆς μορφήν εἶναι κυρίως ποσοτικὴ, βασιζομένη ἐπὶ τῆς μετρήσεως, ἐν ἀντιθέσει πρὸς τὴν ἐπιστήμην τῶν Ἀρχαίων, ὅπως αὕτη διεμορφώθη κυρίως ὑπὸ τοῦ Ἀριστοτέλους καὶ τὴν ἐξ αὐτῆς προελθούσαν Ἐπιστήμην τῶν Σχολαστικῶν, αἱ ὁποῖαι ἦσαν καθά-

¹ Ἐναρκτέριον μάθημα γινόμενον ἐν τῇ αἰθούσῃ τῶν τελετῶν τοῦ Πανεπιστημίου Θεσσαλονίκης τὴν 4ην Δεκεμβρίου 1937.

ὡς σχεδὸν ποιοτικά καὶ περιγραφικά. Ἡ μέτρησις ἐπομένως τῶν φαινομένων, ὁ καθορισμὸς δηλαδὴ τῆ βοήθειᾳ ἀριθμῶν τῶν στοιχείων τῶν ἀπαρτιζόντων τὰ φαινόμενα, εἶναι τὸ κύριον χαρακτηριστικὸν τῆς νεωτέρας Ἐπιστήμης, ἡ ὁποία διὰ τῆς εὐρέσεως τῶν ποσοτικῶν σχέσεων τῶν ὑφισταμένων μεταξὺ τῶν στοιχείων τῶν ἀπαρτιζόντων τὰ φαινόμενα, ἐπιδιώκει τὴν συντομωτέραν καὶ πληρεστέραν σπουδὴν τῶν φαινομένων τούτων καὶ τὴν κατὰ τὸ δυνατόν ἀκριβεστέραν πρόβλεψιν αὐτῶν. Λέγοντες δὲ φαινόμενον ἐννοοῦμεν οὐσιαστικῶς τὴν εἰς τὴν συνείδησιν δημιουργουμένην εἰκόνα τοῦ φαινομένου τούτου καὶ μάλιστα τῆς ἀπόψεως αὐτοῦ τῆς μᾶλλον ἐνδιαφερούσης ἡμᾶς, μετὰ τὴν ἐκκαθάρισιν ἀπὸ τῶν ἐπουσιωδεστερῶν διὰ τὴν ἄποψιν ταύτην χαρακτηριστικῶν αὐτοῦ. Αἱ εἰκόνας αὗται εἶναι περισσότερον εὐχρηστοὶ ἀπὸ τὰ ἀπ' εὐθείας δεδομένα τῆς παρατηρήσεως δυνάμεναι ἀπὸ πολλῶν ἀπόψεων νὰ τὰ ἀντικαταστήσουν. Ἡ ὅλη δὲ αὕτη ἐργασία, πρὸς διαμόρφωσιν τῶν ἐν λόγῳ εἰκόνων, ἀποτελεῖ ἐκδήλωσιν τῆς οἰκονομικῆς, κατὰ τὴν σχετικὴν Θεωρίαν τοῦ Mach,¹ λειτουργίας, ἡ ὁποία διέπει ἕξ ὀλοκλήρου τὴν Ἐπιστήμην. Οἱ φυσικοὶ νόμοι εἶναι καὶ αὐτοὶ ἐπίσης, κατὰ τὴν θεωρίαν ταύτην, ἐκδηλώσεις τῆς οἰκονομικῆς διαθέσεως τῆς διανοίας, τῆς τάσεως δηλαδὴ πρὸς ἐξοικονόμησιν πνευματικοῦ ἔργου, δεδομένου ὅτι εἰς τὴν φύσιν ὑπάρχουν διάφοροι περιπτώσεις τοῦ αὐτοῦ φαινομένου, ὁ δὲ νόμος εἶναι μία μέθοδος συμπυκνώσεως τῶν διαφόρων τούτων περιπτώσεων εἰς μίαν γενικὴν ἔκφρασιν καὶ ἀνασυστάσεως τρόπον τινὰ τοῦ φαινομένου, σχετικῆς μάλιστα πρὸς τὴν ἄποψιν τὴν μᾶλλον δι' ἡμᾶς ἐνδιαφερούσαν. Καὶ γενικῶς, τὸ πρόβλημα τῆς συγκροτήσεως ἐνὸς κλάδου τῆς Ἐπιστήμης εἶναι ἐν πρόβλημα ἐλαχιστικόν, συνίσταται δηλαδὴ εἰς τὴν ὅσον τὸν δυνατόν πληρεστέραν περιγραφὴν τῶν φαινομένων τῶν ὑπαγομένων εἰς τὸν κλάδον τοῦτον, μὲ τὴν ἐλαχίστην δυνατὴν δαπάνην πνευματικοῦ ἔργου.

I.

Ἡ παρακολούθησις τοῦ τρόπου τῆς βαθμιαίας διαμορφώσεως ἐνὸς κλάδου τῆς Ἐπιστήμης, τῶν πρὸς τοῦτο χρησιμοποιουμένων μεθόδων καὶ τῶν διὰ τὴν ἐφαρμογὴν τῶν μεθόδων τούτων ἀπαραιτήτων στοιχείων, ἀποτελεῖ θέμα κατ' ἐξοχὴν ἐνδιαφέρον διὰ τοὺς μέλλοντας νὰ ἀσχοληθοῦν μὲ τὰς φυσικὰς γενικῶς ἐπιστήμας καὶ κυρίως τοὺς ἐπιθυμοῦντας νὰ ἐμβαθύνουν εἰς αὐτάς. Ἡ ἀνάπτυξις ὁμοίως τοῦ ζητήματος τούτου, ἐν ὅλῃ τῇ γενικότητι αὐτοῦ, ὑπερβαίνει δυστυχῶς τὰ χρονικὰ ὄρια μιᾶς συνήθους διαλέ-

¹ E. Mach. Die Mechanik in ihrer Entwicklung S. 457. (F. A. Brockhaus, Leipzig, 1921).

ξέως· διὰ τὸν λόγον τοῦτον θὰ περιορισθῶ μόνον εἰς τὴν μελέτην ἐνὸς τῶν ἐν λόγῳ στοιχείων καὶ μάλιστα εἰδικῶς τῆς σημασίας, τὴν ὁποίαν ἔχει τοῦτο διὰ τὴν Μηχανικὴν ἀφ' ἐνὸς καὶ τὰ Μαθηματικὰ ἀφ' ἑτέρου. Ἡ ἐκ παραλλήλου δὲ διὰ τοὺς δύο τούτους κλάδους τῆς Ἐπιστήμης μελέτη τοῦ ζητήματος τούτου παρουσιάζει ἰδιαίτερον ἐνδιαφέρον, ἀφ' ἐνὸς διότι ἡ μὲν Μηχανικὴ ἐμφανίζεται εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην ὡς ἐκπροσωποῦσα τὰς φυσικὰς γενικῶς Ἐπιστήμας, τῶν διὰ τὴν διαμόρφωσιν αὐτῆς χρησιμοποιουμένων μεθόδων ἰσχυροσῶν ἐν πολλοῖς καὶ διὰ τοὺς ἄλλους κλάδους τῆς Φυσικῆς, τὰ δὲ Μαθηματικὰ ὡς ὁ κατ' ἐξοχὴν ἐκπρόσωπος τῶν ἀφηρημένων Ἐπιστημῶν καὶ ἀφ' ἑτέρου διότι οἱ δύο οὗτοι κλάδοι τῆς Ἐπιστήμης κατέχουν ἰδιαίτουσαν ὅλως θέσιν εἰς τὸ ὅλον συγκρότημα τῶν Φυσικῶν Ἐπιστημῶν.

Ἡ ὅλη διαμόρφωσις τῶν διαφόρων κλάδων τῆς Ἐπιστήμης δύναται νὰ διακριθῇ εἰς δύο στάδια: Εἰς τὸ στάδιον τῆς ταξινομήσεως τοῦ συσσωρευομένου τῆ βοηθεία τῶν αἰσθήσεων ὕλικου, τῶν φαινομένων δηλαδὴ τῶν ὑπαγομένων εἰς τοὺς κλάδους τούτους, διὰ τῆς εὐρέσεως τῶν ἀπλῶν στοιχείων τῶν ἀπαρτιζόντων τὰ φαινόμενα ταῦτα καὶ τῶν ἐκ τῆς ὅλης ταύτης ἐπεξεργασίας προκλυπτουσῶν σχέσεων τῶν ὑφισταμένων μεταξὺ τῶν στοιχείων τούτων καὶ εἰς τὸ στάδιον τῆς ἐξ ὠρισμένων γενικῶν προτάσεων καὶ ἐννοιῶν τιθεμένων ἐν ἀρχῇ ἐκάστου κλάδου καὶ διεπουσῶν ἐκ παραδοχῆς ὅλα τὰ φαινόμενα τοῦ κλάδου τούτου, διὰ καθαρῶς λογικῶν πλέον συλλογισμῶν εὐρέσεως τῶν νόμων, τῆ βοηθεία τῶν ὁποίων ἐπιτυγχάνεται ἡ πληρεστέρα καὶ μᾶλλον ἠτιολογημένη σπουδὴ τῶν φαινομένων τούτων καὶ ἡ κατὰ τὸ δυνατόν ἀκριβεστέρα πρόβλεψις αὐτῶν.

Τὰ στοιχεῖα ἐπομένως τῶν γνώσεών μας προερχόμενα ἐκ τοῦ ἐξωτερικοῦ κόσμου μεταβιβάζονται τῆ βοηθεία τῶν αἰσθήσεων εἰς τὴν συνείδησιν. Διὰ νὰ καταστοῦν ὅμως ταῦτα χρησιμοποιήσιμα καὶ νὰ ἀποκτήσουν ἀξίαν διὰ τὴν Ἐπιστήμην πρέπει νὰ ταξινομηθῶν, γινομένης πρὸς τοῦτο τῆς σχετικῆς ἐπεξεργασίας αὐτῶν ὑπὸ τοῦ πνεύματος. Ἡ ταξινομήσις δὲ καὶ ἡ ἐπεξεργασία τῶν στοιχείων τούτων γίνεται τῆ βοηθεία δύο μεθόδων τῆς ἐπαγωγικῆς καὶ τῆς ἀπαγωγικῆς μεθόδου. Διὰ τῆς ἐπαγωγικῆς μεθόδου ἐπιτυγχάνεται ἡ μετάβασις ἐκ τῶν ἐπὶ μέρους γεγονότων εἰς τοὺς γενικοὺς νόμους, διὰ δὲ τῆς ἀπαγωγικῆς μεθόδου προκύπτουν συμπεράσματα μὲ τὴν βοήθειαν μόνης τῆς λογικῆς ἐξ ὠρισμένων προτάσεων, τὰς ὁποίας δεχόμεθα ὡς ἀξιώματα. Ἡ ἐπαγωγικὴ μέθοδος, ἔχουσα ὡς ἀφετηρίαν τὴν ἄμεσον γνῶσιν τοῦ ἐξωτερικοῦ κόσμου, χρησιμοποιεῖται εἰς τὰς Φυσικὰς Ἐπιστήμας εἰς τὸ πειραματικὸν κυρίως στάδιον τῆς ἐξελίξεως αὐτῶν· ἀντιθέτως ἡ ἀπαγωγικὴ μέθοδος, ἐφαρμοζομένη εἰς τὰ δεδομένα τῆς λογικῆς, εἶναι τὸ ὄργανον τῶν θεωρητικῶν Ἐπιστημῶν καὶ τῶν φυσικῶν ἐπίσης Ἐπιστημῶν εἰς τὸ θεωρητικὸν κυρίως στάδιον τῆς ἐξελίξεως αὐτῶν.

Ἡ ἐπαγωγή συνεπῶς εἶναι τὸ λογικὸν ὄργανον, τὸ ὁποῖον χρησιμεύει διὰ τὴν δημιουργίαν τῶν Φυσικῶν Ἐπιστημῶν ἄνευ αὐτῆς τὸ σύμπαν θὰ ἦτο δι' ἡμᾶς ἐν χάος πραγμάτων καὶ φαινομένων ἄνευ οὐδενὸς δεσμοῦ· διότι αἱ αἰσθήσεις, ἔστω καὶ ὑπὸ τὴν καθοδήγησιν καὶ τὸν ἔλεγχον τοῦ πνεύματος, παρέχουν μόνον τὴν γυμνὴν γνῶσιν τῶν πραγμάτων. Διὰ τὴν ἀποκτίθησιν ὅμως ἐν γεγονόσι ἐπιστημονικὴν ἀξίαν, πρέπει νὰ εἶναι δυνατόν νὰ προκύψῃ ἐξ αὐτοῦ γενικὸς νόμος περιλαμβάνων ὅλα τὰ πρὸς αὐτὸ ἀνάλογα γεγονότα. Ἡ ἐπιστήμη δὲν ἀποτελεῖται ἐξ ἐπιμέρους γεγονότων, ὅσονδήποτε πολυαριθμῶν, ἀλλὰ ἐκ νόμων γενικῶν οἱ ὁποῖοι διέπουν ταῦτα. Τὸ γεγονός, ἐπὶ παραδείγματι, ὅτι μία ὠρισμένη ποσότης ὕδατος βράζει εἰς τοὺς 100° ὑπὸ πίεσιν 760^{mm.} ἔχει διὰ τὸν ἐρευνητὴν ἐνδιαφέρον μόνον ὅταν ἐξ αὐτοῦ δύναται νὰ προκύψῃ τὸ συμπέρασμα, ὅτι γενικῶς τὸ ὕδωρ βράζει ὑπὸ τὰς ἀνωτέρω συνθήκας. Ὁ συλλογισμὸς δέ, τῇ βοηθείᾳ τοῦ ὁποῖου ὁ φυσικὸς λαμβάνει ἐμμέσως ἕνα νόμον ἐξ ἑνὸς ἐπιμέρους γεγονότος, εἶναι πάντοτε τῆς αὐτῆς μορφῆς: Μία ὠρισμένη ποσότης ὕδατος π.χ. βράζει εἰς τοὺς 100° ὑπὸ πίεσιν 760^{mm.}. Ἄρα τὸ ὕδωρ γενικῶς βράζει εἰς τοὺς 100° ὑπὸ πίεσιν 760^{mm.}. Εἰς τὸν συλλογισμὸν ὅμως τοῦτον, ὅπως καὶ γενικῶς εἰς ὅλους τοὺς ἐπαγωγικοὺς συλλογισμοὺς, ὑπάρχει εἰς ἀκόμη ἐξυπακουόμενος ὅρος, ὁ ἑξῆς:

«Τὰ αὐτὰ αἰτία προκαλοῦν τὰ αὐτὰ φαινόμενα»· ἀκριβέστερον «αἱ αὐταὶ φυσικαὶ συνθήκαι δίδουν πάντοτε γένεσιν εἰς τὸ αὐτὸ φαινόμενον». Διὰ τῆς προσθήκης τοῦ ὅρου τούτου ὁ ἀνωτέρω συλλογισμὸς λαμβάνει τὴν μορφήν ἀπαγωγικοῦ συλλογισμοῦ ὡς ἑξῆς:

Αἱ αὐταὶ φυσικαὶ συνθήκαι δίδουν γένεσιν εἰς τὸ αὐτὸ φαινόμενον· μία ὠρισμένη ποσότης ὕδατος βράζει εἰς τοὺς 100° ὑπὸ πίεσιν 760^{mm.}. Ἄρα οἰαδήποτε ποσότης ὕδατος βράζει εἰς τοὺς 100° ὑπὸ πίεσιν 760^{mm.}. Ὁ πρῶτος ὅρος τοῦ συλλογισμοῦ τούτου εἶναι ὁ νόμος τῆς αἰτιότητος, ὁ δεύτερος τὸ παρατηρηθὲν γεγονός καὶ ὁ τρίτος, τὸ συμπέρασμα δηλαδή, ὁ γενικὸς νόμος.

Ἐκ τοῦ παραδείγματος τούτου ἀναγνωρίζεται ὅτι κατὰ μέγα μέρος ἡ ἀξία τῆς ἐπαγωγικῆς μεθόδου ὀφείλεται εἰς τὸν νόμον τῆς αἰτιότητος, ἀποτελοῦντα ἀπαραίτητον διὰ τὴν ἐφαρμογὴν τῆς στοιχείου. Λαμβανομένου δ' ὑπ' ὄψει ὅτι, ὅπως καὶ προηγουμένως ἐτονίσαμεν, ἡ ἐπαγωγικὴ μέθοδος εἶναι τὸ ὄργανον, τῇ βοηθείᾳ τοῦ ὁποῖου ἐπιτυγχάνεται ἡ συγκρότησις τῶν διαφόρων κλάδων τῆς Φυσικῆς, καθίσταται πλέον φανερὰ ἡ ἀξία τὴν ὁποίαν ἀποκτᾷ ὁ νόμος οὗτος διὰ τὴν ἐπιστήμην γενικῶς.

Ἡ ἀνάπτυξις τῆς σημασίας, τὴν ὁποίαν ἔχει ὁ νόμος τῆς αἰτιότητος καὶ ὁ ἐξ αὐτοῦ ἀπορρέων νιτερομινισμὸς διὰ τὴν καθόλου Ἐπιστήμην, λαμβανομένων μάλιστα ὑπ' ὄψει τῶν ἀμφιβολιῶν, αἱ ὁποῖαι γεννῶνται διὰ τὴν ἀξίαν αὐτοῦ κατόπιν τῶν ἀντιλήψεων αἱ ὁποῖαι κρατοῦν σήμερον εἰς τὴν Φυσι-

κὴν καὶ χρόνον θὰ ἀπῆται μακρὸν καὶ τὰ ὄρια τῆς παρουσίας μελέτης ὑπερβαίνει. Διὰ τοὺς λόγους τούτους θὰ ἀρκεσθῶ μόνον, ἀφοῦ ἐκθέσω ἐν συντόμῳ τὸν τρόπον τῆς βαθμιαίας δημιουργίας τῆς ἐννοίας τῆς αἰτιότητος καὶ τοὺς λόγους διὰ τοὺς ὁποίους ὁ νόμος τῆς αἰτιότητος ἐπεβλήθη, εἰς τὸν καθορισμὸν τῶν ἀπαραιτήτων διὰ τὴν χρησιμοποίησίν του ἰδία εἰς τὴν Μηχανικὴν προϋποθέσεων καὶ συμπληρωματικῶν παραδοχῶν, διὰ νὰ καταλήξω βαθμῆδόν εἰς μίαν γενικωτέραν διατύπωσιν τοῦ νόμου τούτου, ἕξετάζων πλέον τὴν σημασίαν, τὴν ὁποίαν οὗτος ἀποκτᾷ ὑπὸ τὴν νέαν του μορφήν, οὐ μόνον ὡς στοιχεῖον ἀπαραίτητον διὰ τὴν ἐφαρμογὴν τῆς ἐπαγωγικῆς μεθόδου ἀλλὰ καὶ ὡς στοιχεῖον πολῦτιμον διὰ τὴν πλήρη ἐφαρμογὴν τῆς ἀπαγωγικῆς μεθόδου τόσον εἰς τὴν Μηχανικὴν ὅσον καὶ εἰς τὰ Μαθηματικά.

II.

Ἡ ἐννοία τῆς αἰτιότητος προέρχεται ἀπὸ τὴν ἀντίληψιν τῆς κανονικῆς διαδοχῆς ὄρισμένων γεγονότων. Εἶναι δὲ κοινὴ ἡ τάσις τόσον εἰς τὸν ἄνθρωπον ὅσον καὶ εἰς τὰ ζῶα νὰ πιστεύουν ὅτι μία σειρά γεγονότων ἐπαναληφθεῖσα πολλάκις, θὰ ἐπαναλαμβάνηται πάντοτε κατὰ τὴν αὐτὴν τάξιν. Ὅσάκις τὸ πρῶτον τῶν γεγονότων τούτων ὑποπίπτει εἰς τὰς αἰσθήσεις μας, ἀναμένομεν καὶ τὰ ἄλλα γεγονότα τῆς σειρᾶς ταύτης. Τοῦτο δ' ὀφείλεται εἰς μίαν ἀλληλουχίαν ἰδεῶν ἔχουσαν ὡς ἀφετηρίαν τὴν ἀντίληψιν τοῦ ἐξωτερικοῦ κόσμου. Ἡ ἐν λόγῳ τάσις πρὸς γενίκευσιν τῆς κανονικῆς διαδοχῆς ὄρισμένων φαινομένων χρησιμοποιεῖται, ὡς γνωστὸν, διὰ τὴν ἐκγύμνασιν τῶν ζώων.¹ Ἐκεῖνο ὅμως τὸ ὁποῖον ἐνυπάρχει ὑπὸ μορφήν ἐνστίκτου εἰς τὰ ζῶα ἰδίως, δὲν εἶναι αὐτὴ αὐτὴ ἡ ἐννοία τῆς αἰτιότητος, ἀλλ' ἀπλῶς ἡ τάσις τῆς γενικεύσεως τῶν εἰς τὴν φύσιν παρουσιαζομένων συνδιασμῶν, τόσον εἰς τὴν περίπτωσιν καθ' ἣν δύο γεγονότα διαδέχονται ἀλλήλα χρονικῶς, οὐδεμιᾶς μεταξὺ των ὑφισταμένης ἄλλης σχέσεως, ὅσον καὶ εἰς τὴν περίπτωσιν καθ' ἣν τὸ δεύτερον εἶναι ἀναγκαστικὸν ἐπακολούθημα τοῦ πρώτου.

Ἡ πρώτη ἐπομένως φάσις εἰς τὴν διαμόρφωσιν τῆς ἐννοίας τῆς αἰτιότητος εἶναι ἐκείνη, κατὰ τὴν ὁποίαν ἡ αἰτιότης συγγέεται μὲ τὴν ἀπλὴν χρονικὴν διαδοχὴν. Τὰ ζῶα δὲν προχωροῦν περισσότερον ἀντιθέτως ὁ ἄνθρωπος μὲ τὰς διανοητικὰς ἰκανότητάς, μὲ τὰς ὁποίας οὗτος εἶναι προικισμένος, ἀντὶλαμβάνεται τὰ σφάλματα εἰς τὰ ὁποία δύναται νὰ παρασύρῃ ἡ γενίκευσις τῶν παρατηρουμένων διαδοχῶν. Ἐντεῦθεν προκύπτει βεβαίως μείωσις τῆς πίστεως ἐπὶ τὴν κανονικότητα τῆς πορείας τῶν φαινομένων, ἡ ὁποία ἐν συν-

¹ Leclerc du Sablon. L'unité de la Science; (F. Alcan. 1929), p. 22.

διασπῶ με ἀνεπαρκῆ ἐπιστημονικὴν μόρφωσιν ἄγει εἰς τὴν μείωσιν τῆς πίστεως ἐπὶ τὴν σταθερότητα τῶν φυσικῶν νόμων καὶ τὴν πεποίθησιν ὅτι ὅλα ὀφείλονται εἰς τὴν τύχην.

Εἰς τὴν τάσιν ταύτην ἀντιδρῶν αἱ πειραματικαὶ μέθοδοι, τῇ βοήθειᾳ τῶν ὁποίων εἶναι δυνατὸν νὰ διαχωρισθοῦν ἐκ τῶν γεγονότων, τὰ ὁποῖα προηγούνται ἑνὸς φαινομένου, ὅσα πράγματι συντελοῦν εἰς τὴν δημιουργίαν αὐτοῦ, ἔξ ἑκείνων τὰ ὁποῖα οὐδεμίαν μὲ τὸ φαινόμενον τοῦτο ἔχουν σχέσιν. Τοιοῦτοτρόπως φθάνομεν εἰς τὴν πραγματικὴν ἔννοιαν τῆς αἰτιότητος, ἢ ὁποῖα παρουσιάζει δύο γεγονότα ἀλληλένδετα, οὐχὶ πλέον διὰ τῆς ἀπλῆς χρονικῆς διαδοχῆς, ἀλλὰ διὰ δεσμοῦ τοιούτου, ὥστε ὅταν τὸ πρῶτον συμβαίῃ, εἶναι ἀδύνατον νὰ μὴ ἐπακολουθήσῃ τὸ δεύτερον. Τὸ ζήτημα ἤδη τὸ ὁποῖον τίθεται εἶναι κατὰ πόσον ἡ αἰτιότης διέπει οἰανδήποτε ἐν τῇ φύσει ἐκδήλωσιν, ὃ δὲ ἔξ αὐτῆς ἀπορρέων ντετερμινισμὸς εἶναι γενικὸς, δυνάμενος νὰ περιλάβῃ ὅλα τὰ φυσικὰ φαινόμενα. Κατὰ πόσον δηλαδὴ εἶναι δυνατὸν νὰ καθορισθοῦν μὲ ὅλην τὴν ἐπιθυμητὴν ἀκρίβειαν αἱ οὐσιώδεις συνθηκαί, αἱ ὁποῖαι δίδουν εἰς οἰονδήποτε φαινόμενον γένεσιν καὶ νὰ πραγματοποιηθοῦν αὗται εἰς οἰανδήποτε περίπτωσιν.

Εἰς τὰ φυσικοχημικὰ φαινόμενα τὰ πράγματα εἶναι περισσότερον καθωρισμένα. Εἰς τὰς περισσοτέρας δηλαδὴ τῶν περιπτώσεων αἱ συνθηκαὶ τῆς δημιουργίας τῶν φαινομένων εἶναι καθωρισμένοι μὲ ὅλην τὴν ἐπιθυμητὴν ἀκρίβειαν καὶ ἡ κατὰ βούλησιν πραγματοποίησις αὐτῶν δυνατή. Εἰς τὴν βιολογίαν ὅμως παρουσιάζονται πολὺν μεγαλείτεροι δυσκολίαι ἀφορῶσαι τόσον εἰς τὸν πλήρη καθορισμὸν τῶν οὐσιωδῶν συνθηκῶν, αἱ ὁποῖαι δίδουν εἰς ἕν βιολογικὸν φαινόμενον γένεσιν, ὅσον καὶ εἰς τὴν δυνατότητα τῆς κατὰ βούλησιν πραγματοποίησεως αὐτῶν. Διὰ νὰ δεχθῶμεν καὶ εἰς τὰς περιπτώσεις ταύτας τὴν ὑπαρξίν ἐντελῶς καθωρισμένων συνθηκῶν, αἱ ὁποῖαι δίδουν γένεσιν εἰς τὰ τοιαῦτα φαινόμενα, πρέπει νὰ πεισθῶμεν ἄλλοθεν ὅτι τὰ πάντα εἰς τὴν φύσιν προκύπτουν ἐκ τῆς ἀναποφεύκτου συνδέσεως αἰτίου πρὸς ἀποτέλεσμα. Ἐὰν δὲ εἰς ὀρισμένας περιπτώσεις τὰ αἷτια ταῦτα δὲν εἶναι καταφανῆ, τοῦτο δὲν σημαίνει ὅτι αἷτια δὲν ὑπάρχουν, ἀλλ' ὅτι τὰ μέσα τὰ ὁποῖα διαθέτομεν πρὸς ἐξακρίβωσιν αὐτῶν εἶναι ἀνεπαρκῆ. Ἡ ἀοριστία δηλαδὴ περὶ τὴν ἔκβασιν δὲν εἶναι ἀπόλυτος ἀλλὰ σχετικὴ, ἔξαρτωμένη ἀπὸ τὰ ἐκάστοτε διατιθέμενα μέσα.

Ἐκ τῶν μέγχοι τοῦδε λεχθέντων φαίνεται πῶς μία ἔννοια ἀρχικῶς ἐνστικτώδης καὶ ἀόριστος ἔξεκαθαρίσθη βαθμηδὸν διὰ νὰ καταστῇ μία θεμελιώδης ἀρχὴ διέπουσα ὅλους τοὺς κλάδους τῶν φυσικῶν Ἐπιστημῶν. Ἡ διὰ τὴν προέλευσιν ὅμως καὶ τὸν τρόπον τῆς διαμορφώσεως τῆς ἔννοιᾶς ταύτης ἔρευνα δὲν ἀρκεῖ διὰ νὰ δείξῃ καὶ τοὺς λόγους, οἱ ὁποῖοι τὸν ἐπέβαλον.

Ἐξ αὐτῆς ταύτης τῆς μελέτης τῆς βαθμιαίας διαμορφώσεως τῆς ἐν-

νοίας τῆς αἰτιότητος προκύπτει ὅτι ἡ ὑπαρξίς ἀναγκαίου δεσμοῦ μεταξὺ αἰτίου καὶ ἀποτελέσματος οὐδόλως εἶναι προφανής. Ἡ πίστις ἐπὶ τὴν κανονικότητα τῆς πορείας τῶν φαινομένων δὲν εἶναι ἀπόλυτος. Ὁ σκεπτικισμὸς δὲ οὗτος ὀφείλεται εἰς τὸ γεγονός, ὅτι αἱ αἰτιώδεις σχέσεις δὲν συμπίπτουν πάντοτε μὲ τὰς σχέσεις ἀμέσου διαδοχῆς. Τὸ ἔνστικτον παρέχει μόνον τὴν ἔννοιαν τῆς κανονικῆς διαδοχῆς, ἡ ὁποία γίνεται πολλάκις πρόξενος σφαλμάτων, ἡ γνῶσις δὲ τῆς πραγματικῆς αἰτιότητος προϋποθέτει τὴν ὑπαρξίν ἀρκετὰ ἐξελιγμένης ἐπιστημονικῆς σκέψεως καὶ τοῦτο, διότι ὅταν ὁμιλῶμεν περὶ αἰτίων καὶ ἀποτελεσμάτων ἐννοοῦμεν τὴν κατὰ βούλησιν σχεδὸν ἐκλογὴν τῶν συνθηκῶν τῶν ὁποίων ἐκτιμῶμεν τὴν σημασίαν διὰ τὴν δημιουργίαν ἑνὸς φαινομένου, ἢ μᾶλλον τῆς εἰκόνας τοῦ φαινομένου τούτου τῆς ὑπαρχούσης εἰς τὴν συνείδησιν. Αἱ ἐπαναλήψεις περιπτώσεων, εἰς τὰς ὁποίας ἔν ὄρισμένον γεγονός εἶναι πάντοτε συνδεδεμένον μὲ ἓν ἄλλο, ὑπάρχουν μόνον εἰς τὴν μετὰ τὴν σχετικὴν ἐπεξεργασίαν δημιουργουμένην εἰς τὴν συνείδησιν εἰκόνα τῶν διαφόρων φαινομένων. Ὡστε ὁ νόμος τῆς αἰτιότητος δὲν εἶναι προφανής, ἡ δὲ ἐπ' αὐτοῦ βασιζομένη ἐπαγωγικὴ σκέψις δὲν εἶναι, ὅπως ἡ ἀπαγωγικὴ μορφή συλλογισμοῦ ἐπιβαλλομένη ἀπὸ αὐτὴν ταύτην τὴν φύσιν τῆς ἀνθρωπίνης λογικῆς.

Ἀναγνωρίζεται ἐπίσης ὅτι τόσον ἡ πειραματικὴ ὅσον καὶ ἡ δι' ἀπαγωγικῶν συλλογισμῶν ἀπόδειξις τοῦ νόμου τῆς αἰτιότητος εἶναι ἀδύνατος. Ἐπομένως, ἐφ' ὅσον ὁ νόμος οὗτος οὔτε προφανής εἶναι, οὔτε δύναται νὰ ἀποδειχθῇ πειραματικῶς ἢ διὰ συλλογισμῶν, ἐπαληθεύμενος μόνον πειραματικῶς καὶ μάλιστα κατὰ προσέγγισιν, εἴμεθα ὑποχρεωμένοι νὰ δεχθῶμεν τοῦτον ὡς ἀξίωμα. Τὸ ἀξίωμα τοῦτο, ὅπως ἄλλωστε καὶ ὅλα τὰ ἀξιώματα, εἶναι δημιουργήμα τοῦ πνεύματος ἔχοντος ὡς ἀφετηρίαν τὴν ἀντίληψιν τοῦ ἐξωτερικοῦ κόσμου. Τὴν ἀποδοχὴν δὲ τοῦ ἀξιώματος τούτου, ἐπιβάλλει μία ἀπόλυτος ἐπιστημονικὴ ἀνάγκη, ἡ ἀνάγκη τῆς δημιουργίας ἑνὸς ὄργανου, τῇ βοηθείᾳ τοῦ ὁποίου δυνάμεθα νὰ φθάσωμεν εἰς γενικούς νόμους, οἱ ὁποῖοι, ἐὰν δὲν εἶναι ἀπολύτως ἀκριβεῖς καὶ ὀριστικοί, δίδουν τοῦλάχιστον μίαν ὁπωσδήποτε πιστὴν εἰκόνα τῆς πραγματικῆς πορείας τῶν φαινομένων.

III.

Ἐκ τῶν μέχρι τοῦδε λεχθέντων καθίσταται φανερὰ ἡ σημασία τὴν ὁποίαν ἔχει τὸ ἀξίωμα τῆς αἰτιότητος διὰ τὴν διαμόρφωσιν ὅλων τῶν κλάδων τῆς Φυσικῆς. Κατὰ τὴν χρησιμοποίησιν ὅμως αὐτοῦ γίνονται ἀσυναίσθητως δεκταὶ ὄρισμένοι συμπληρωματικαὶ παραδοχαὶ καὶ ὄρισμέναι προϋποθέσεις, ἄνευ τῶν ὁποίων τὸ ἀξίωμα τοῦτο οὐδεμίαν διὰ τὴν Ἐπιστήμην ἔχει ἀξίαν. Τὸ ζήτημα δὲ τοῦ καθορισμοῦ τῶν ἀπαραιτήτων τούτων προϋποθέσεων καὶ

τῶν ἐν λόγῳ συμπληρωματικῶν παραδοχῶν εἶναι ἄμέσως συνδεδεμένον μὲ τὸ ζήτημα τοῦ καθορισμοῦ τῶν οὐσιωδῶν συνθηκῶν, αἱ ὁποῖα δίδουν εἰς ἓν φαινόμενον γένεσιν. Τὴν ἀνάγκην τῆς ἀκριβεστεῖρας ταύτης διατυπώσεως τοῦ ἀξιώματος τῆς αἰτιότητος, ὅπως ἐπίσης καὶ τοῦ καθορισμοῦ τῶν ἀπαραιτήτων διὰ τὴν χρησιμοποίησίν του, κυρίως εἰς τὴν Μηχανικὴν. προϋποθέσεων ἀνεγνώρισε πρῶτος ὁ Painlevé ὁ ὁποῖος καὶ διετύπωσε τοῦτο ὡς ἑξῆς :

*«Ὅσάκις αἱ αὐταὶ συνθῆκαι πληροῦνται εἰς οἰανδήποτε θέσει καὶ οἰανδήποτε χρονικὴν στιγμήν, τὰ αὐτὰ φαινόμενα ἐπακολουθοῦν, μετατεθημένα ἀπλῶς εἰς τὸν χώρον καὶ εἰς τὸν χρόνον».*¹

Ἀναγνωρίζεται δηλαδή εἰς τὴν διατύπωσιν ταύτην ὅτι, οὔτε ἡ θέσις εἰς τὴν ὁποῖαν ἐξελίσσεται τὸ φαινόμενον, οὔτε ἡ χρονικὴ στιγμή, καθ' ἣν τοῦτο συμβαίνει, ἐπηρεάζουν τὴν πορείαν αὐτοῦ. Ἡ συμπλήρωσις αὕτη εἶναι ἀπαραίτητος, διότι ἄνευ αὐτῆς Ἐπιστήμη δὲν θὰ ὑπῆρχε, ὡς εἶναι εὐνόητον.

Ἀπαραίτητος ἐπίσης συμπλήρωσις τοῦ ἀξιώματος τούτου εἶναι ἡ ἑξῆς :

«Ἡ ἐκίθρασις, τὴν ὁποῖαν ἀσχεῖ ἐν σῶμα ἐπὶ ἐνὸς ἄλλου, εἶναι τόσον μικροτέρα ὅσον μεγαλειτέρα εἶναι ἡ ἀπ' ἄλλήλων ἀπόστασις τῶν δύο τούτων σωμάτων.»

Διότι ἄνευ τῆς συμπληρώσεως ταύτης ἡ ἐπαλήθευσις τοῦ ἀξιώματος τῆς αἰτιότητος θὰ ἦτο ἀδύνατος, ἐφ' ὅσον εἰς ἐκάστην περίπτωσιν ὁλόκληρον τὸ σύμπαν θὰ συνετέλει εἰς τὴν δημιουργίαν ἐνὸς φαινομένου. Εἰς τὰς ἐφαρμογὰς ἐπομένως τοῦ ἀξιώματος τούτου δυνάμεθα νὰ παραλείψωμεν τὴν ἐπίθρασιν τῶν πολὺ ἀπομακρυσμένων σωμάτων.

Προϋπόθεσις ἀπαραίτητος διὰ τὴν ἐπαλήθευσιν τοῦ ἀξιώματος τῆς αἰτιότητος εἶναι, ὡς εἶναι εὐνόητον, ἡ δυνατότης τῆς καταλλήλου μετρήσεως τῶν μηκῶν καὶ τῶν χρονικῶν διαστημάτων. Πράγματι, δὲν δυνάμεθα νὰ ἀδιαφορήσωμεν διὰ τὴν ἐκλογὴν τοῦ κανόνος πρὸς μέτρησιν τῶν μηκῶν καὶ τοῦ χρονομέτρου διὰ τὴν μέτρησιν τῶν χρονικῶν διαστημάτων, διότι τὰ πειράματα ἐπαληθεύουν τὸ ἀξίωμα τοῦτο μόνον ὅταν χρησιμοποιῶμεν τὸν καθιερωμένον κανόνα διὰ τὴν μέτρησιν τῶν μηκῶν καὶ τὸ ἀστρικὸν ὥρολόγιον διὰ τὴν μέτρησιν τῶν χρόνων· ἐνῶ ἐὰν ἀντικαταστήσωμεν τὸ ἐν λόγῳ μέτρον δι' ἄλλου, μήκους μεταβλητοῦ ἐν σχέσει πρὸς αὐτὸ καὶ τὸ ἀστρικὸν ὥρολόγιον δι' ἄλλου προχωροῦντος ἢ ὑστεροῦντος ἐν σχέσει πρὸς αὐτό, τὸ ἀξίωμα τῆς αἰτιότητος δὲν ἀληθεύει πλέον.

Ἐὰν λοιπὸν τὸ ἀξίωμα τῆς αἰτιότητος εἶναι ἀληθές, τοῦτο συμβαίνει μόνον ὑπὸ τὴν προϋπόθεσιν τῆς μετρήσεως μηκῶν καὶ χρονικῶν διαστημάτων διὰ καταλλήλων ὄργάνων. Εἴμεθα λοιπὸν ὑποχρεωμένοι νὰ εἰσαγάγωμεν τὴν ἑξῆς παραδοχὴν :

¹ P. Painlevé; Les axiomes de la mécanique, (Gauthier-Villars. 1922), p. 9.

«Δεχόμεθα ἅπαξ διὰ παντός καὶ δι' ὅλα τὰ φαινόμενα τὴν ὑπαρξίν ἑνὸς κανόνος διὰ τὴν μέτρησιν τῶν μηκῶν καὶ ἑνὸς χρονομέτρου διὰ τὴν μέτρησιν τῶν χρονικῶν διαστημάτων, τοιούτων ὥστε τὸ ἀξίωμα τῆς αἰτιότητος νὰ ἀληθεύῃ παντοῦ καὶ πάντοτε»¹.

Μία ἐπὶ πλέον ἀπαραίτητος προϋπόθεσις διὰ τὴν χρησιμοποίησιν τοῦ ἀξιώματος τούτου εἰς τὴν κλασικὴν Μηχανικὴν εἶναι ἡ ὑπαρξις ἑνὸς συστήματος ἀναφορᾶς, ὡς πρὸς τὸ ὁποῖον ἀναφερομένη ἡ κίνησις τῶν ἐν τῇ φύσει σωμάτων ἐπιληθεύει τὸ ἀξίωμα τοῦτο. Διότι καὶ ἂν ἀκόμη χρησιμοποιώμεν τὸν καθιερωμένον κανόνα διὰ τὴν μέτρησιν τῶν μηκῶν καὶ τὸ ἀστροικὸν ὥρολόγιον διὰ τὴν μέτρησιν τῶν χρονικῶν διαστημάτων, τὸ ἀξίωμα τῆς αἰτιότητος δὲν ἀληθεύει ὡς πρὸς οἰονδήποτε σύστημα ἀναφορᾶς. Ἐὰν πχ. θεωρήσωμεν παρατηρητὴν εὐρισκόμενον ἐντὸς ἀνυψωτῆρος ἀνερχομένου κατακορυφῶς με σταθερὰν ἐπιτάχυνσιν, παρακολοθοῦντα τὴν πτώσιν ἑνὸς σώματος ἀπὸ ὀρισμένου ὕψους ἐπανελαμβανομένην δὲς, ἡ χρονικὴ διάρκεια τοῦ φαινομένου τούτου, εἰς τὰς δύο περιπτώσεις θὰ εἶναι διὰ τὸ παρατηρητὴν τοῦτον διάφορος.

Εἶναι ἐπομένως ἀνάγκη νὰ δεχθῶμεν τὴν ὑπαρξίν ἑνὸς ὀρισμένου συστήματος ἀναφορᾶς, ἐκπροσωποῦντος τὸν ἀπόλυτον χῶρον καὶ ἑνὸς χρονομέτρου μετροῦντος τὸν ἀπόλυτον χρόνον, ὡς πρὸς τὰ ὁποῖα ἀληθεύει τὸ ἀξίωμα τῆς αἰτιότητος.

Λαμβάνοντες δὲ ὑπ' ὄψει τὰς παραδοχὰς ταύτας δυνάμεθα νὰ διατυπώσωμεν ὡς ἑξῆς τὸ ἀξίωμα τοῦτο :

« Ὑπάρχει ἐν σύστημα ἀναφορᾶς ἐκπροσωποῦν τὸν ἀπόλυτον χῶρον καὶ ἐν χρονόμετρον μετροῦν τὸν ἀπόλυτον χρόνον, ὡς πρὸς τὰ ὁποῖα, δσάκις αἱ αὐτὰ συνθῆκαι πραγματοποιοῦνται εἰς διαφόρους θέσεις καὶ διαφόρους χρονικὰς στιγμὰς, τὰ αὐτὰ φαινόμενα ἐπακολουθοῦν, μετατεθημένα ἀπλῶς εἰς τὸν χῶρον καὶ εἰς τὸν χρόνον ».

Ἐὰν δὲ λάβωμεν ἐπὶ πλέον ὑπ' ὄψει τὴν ἀρχὴν τῆς σχετικότητος τοῦ Γαλιλαίου, κατὰ τὴν ὁποίαν τὰ ἀξιώματα τῆς Μηχανικῆς ἀληθεύουν οὐ μόνον πρὸς τὸ σύστημα τοῦτο, ἀλλὰ καὶ ὡς πρὸς πᾶν ἄλλο κινούμενον ἐν σχέσει πρὸς αὐτὸ ἰσοταγῇ μεταφορικὴν κίνησιν, δυνάμεθα νὰ ἐπιτύχωμεν μίαν γενικωτέραν διατύπωσιν τοῦ ἀξιώματος τῆς αἰτιότητος, ἀποτελοῦσαν τὸ πρῶτον βῆμα πρὸς τὴν ὑπὸ τοῦ Bouligand τελευταίως δοθεῖσαν γενικὴν διατύπωσιν αὐτοῦ.

Τὰ συστήματα ἀναφορᾶς ὡς πρὸς τὰ ὁποῖα ἰσχύουν ὅλοι οἱ νόμοι τῆς κλασικῆς Μηχανικῆς λέγονται συστήματα ἀδρανείας ἢ συστήματα τοῦ Γαλιλαίου, οἱ δὲ τύποι μεταβάσεως ἀπὸ ἑνὸς τοιούτου συστήματος εἰς ἄλλο ἀποτελοῦν μίαν ὁμάδα μετασχηματισμῶν, εἶναι δηλαδὴ μορφῆς εἰδικῆς,

¹ P. Painlevé ; loc. cit. p. 11.

ἐχούσης ὅλας τὰς ιδιότητες τῆς ομάδος, καλουμένην ομάδα μετασηματισμῶν τοῦ Γαλιλαίου.

Ἐὰν λοιπὸν λάβωμεν ὑπ' ὄψει καὶ τὴν ἀρχὴν ταύτην δυνάμεθα νὰ διατυπώσωμεν ὡς ἑξῆς τὸ ἀξίωμα τῆς αἰτιότητας :

«Αἷτια ἀναλλοίωτα ὡς πρὸς τοὺς μετασηματισμοὺς τῆς ομάδος τοῦ Γαλιλαίου προκαλοῦν φαινόμενα ἐπίσης ἀναλλοίωτα ὡς πρὸς τοὺς μετασηματισμοὺς τῆς ομάδος ταύτης».

Ἡ διατύπωσις αὕτη τοῦ ἀξιώματος τῆς αἰτιότητας εἶναι καταφανῶς γενικωτέρα τῆς προηγουμένης, περιλαμβάνουσα ταύτην ὡς εἰδικὴν περιπτώσιν, ἀποτελεῖ δὲ, δυνάμεθα νὰ εἴπωμεν, αὐτὴν ταύτην τὴν ἠτιολογημένην ὑπόστασιν τῆς κλασικῆς Δυναμικῆς, ἐκφράζουσα ὅτι αἱ ἐξισώσεις τῆς Δυναμικῆς παραμένουν ἀναλλοίωτοι ὡς πρὸς τοὺς μετασηματισμοὺς τῆς ομάδος τοῦ Γαλιλαίου.

Λέγω δὲ ὅτι ἡ διατύπωσις αὕτη ἀποτελεῖ τὴν ἠτιολογημένην ὑπόστασιν τῆς κλασικῆς Δυναμικῆς, διότι διὰ τοῦ ἀξιώματος τούτου καθίσταται πλέον προφανῆς ὁ λόγος, διὰ τὸν ὁποῖον ἡ ἐπιτάχυνσις παίζει τόσον θεμελιώδη ρόλον εἰς τὴν ἀξιωματικὴν θεμελίωσιν αὐτῆς, λαμβανομένου ὑπ' ὄψει ὅτι ἡ ἐπιτάχυνσις εἶναι τὸ ἀπλούστερον στοιχεῖον τῆς κινήσεως, τὸ ὁποῖον παραμένει ἀναλλοίωτον ὡς πρὸς τοὺς μετασηματισμοὺς τῆς ομάδος τοῦ Γαλιλαίου. Διὰ τῆς εἰσαγωγῆς ἐπομένως τοῦ ἀξιώματος τῆς αἰτιότητας ὑπὸ τὴν τελικῶς εἰς τοῦτο δοθεῖσαν μορφήν, ἡ ἀξιωματικὴ θεμελίωσις τῆς κλασικῆς Δυναμικῆς ἀποβάλλει πλέον τὸν ἐξ ἀποκοσμήσεως, τρόπον τινά, χαρακτῆρα αὐτῆς, καθισταμένη περισσότερον φυσιολογική, ἀπὸ λογικῆς βεβαίως ἀπόψεως, ἐφ' ὅσον δι' αὐτοῦ καθίστανται πλέον προφανῆ τὰ βαθύτερα αἷτια, τὰ ὁποῖα τὴν ἐπιβάλλουν.

Διὰ τῆς γενικωτέρας λοιπὸν ταύτης διατυπώσεως τὸ ἀξίωμα τῆς αἰτιότητας συμβάλλει σημαντικῶς εἰς τὴν ὀλοκλήρωσιν τῶν θεμελιωδῶν προτάσεων, αἱ ὁποῖαι ἀποτελοῦν τὴν βᾶσιν τοῦ θεωρητικοῦ οἰκοδομήματος τῆς κλασικῆς Μηχανικῆς, ἀποτελοῦν οὕτω οὐσιῶδες στοιχεῖον καὶ διὰ τὸ καθαρῶς θεωρητικὸν στάδιον τῆς ἐξελίξεως αὐτῆς. Ἡ μεταξὺ δὲ τῆς ἀρχικῶς ὑπὸ τοῦ Ραινλενέ δοθείσης διατυπώσεως καὶ τῆς τελευταίας ταύτης γενικεύσεως τοῦ ἀξιώματος τούτου ὑφιστιμένη διαφορὰ εἶναι σημαντικὴ, δεδομένου ὅτι ἡ μὲν πρώτη εἶναι σχεδὸν ἄμεσος ἀπόρροια τῆς δαισιθήσεως, ἐνῶ ἡ τελευταία εἶναι προῖον μακρᾶς λογικῆς ἐπεξεργασίας, περισσότερον ἀφηρημένη καὶ σχεδὸν καθαρῶς λογικὴ ἀκριβῶς δὲ διὰ τὸν λόγον τοῦτον εἶναι αὕτη ἐπιδεικτικὴ γενικεύσεως εἰς τοὺς ἄλλους κλάδους τῶν καθαρῶν Μαθηματικῶν.

IV

Οὐσιῶδες χαρακτηριστικὸν τῆς γενικωτέρας ταύτης διατυπώσεως τοῦ ἐν λόγῳ ἀξιώματος εἶναι ἡ σύνδεσις αὐτοῦ μὲ τὰς ἐννοιὰς τῆς ομάδος καὶ τοῦ

συνόλου, παρέχον την δυνατότητα τῆς χρησιμοποιήσεως αὐτοῦ εἰς κλάδους τῶν καθαρῶν Μαθηματικῶν, εἰς τοὺς ὁποίους αἱ δύο αὐται ἔννοιαι παίζουσι σημαντικὰ ρόλον. Διὰ τὸ νὰ καταλήξωμεν ὁμως φυσικώτερον εἰς τὴν περαιτέρω γενίκευσιν τοῦ ἀξιώματος τούτου καὶ νὰ καταστήσωμεν εὐχερεστέραν τὴν κατανόησιν αὐτῆς, εἶναι νομίζω σκόπιμον νὰ δώσωμεν προηγουμένως, ἐν συντόμῳ βεβαίως, τοὺς ὁρισμοὺς τῶν δύο τούτων θεμελιωδῶν ἐννοιῶν μὲ τοὺς ὁποίους τὸ ἀξίωμα τοῦτο ἐμφανίζεται πλέον ἀρρηκτικῶς συνδεδεμένον.

Λέγοντις σύνολον ἐννοοῦμεν, συμφώνως πρὸς τὸν ὑπὸ τοῦ Cantor δοθέντα ὁρισμόν, ἐν πλῆθος πραγμάτων συγκεντρωμένων εἰς ἓν ὅλον. Τὰ ἀπαριζόντα τὸ σύνολον πράγματα λέγονται στοιχεῖα αὐτοῦ. Τὸ δὲ σύνολον θεωρεῖται ὁρισμένον ὅταν δοθέντος ἐνὸς πράγματος δυνάμεθα νὰ διακρίνωμεν ἐὰν τοῦτο εἶναι στοιχεῖον τοῦ συνόλου. Τὰ ἀπαριζόντα δηλαδὴ τὸ σύνολον στοιχεῖα ἔχουσι ὁρισμένα κοινὰ χαρακτηριστικά, τῇ βοήθειᾳ τῶν ὁποίων δυνάμεθα νὰ ἀναγνωρίσωμεν ἐὰν ἓν πρᾶγμα ἀνήκῃ εἰς τὸ σύνολον ἢ ὄχι.

Ἡ δὲ ὁμὰς εἶναι καὶ αὐτὴ ἓν σύνολον, τὸ ὁποῖον ὁμως ἔχει τὰς ἑξῆς ιδιότητας:¹

1ον Διὰ συνδιασμοῦ δύο οἰωνδήποτε στοιχείων τοῦ συνόλου, τῇ βοήθειᾳ μιᾶς ὁρισμένης πράξεως, προκύπτει πάλιν στοιχεῖον τοῦ ἰδίου συνόλου. Τὸ οὔτως προκύπτον στοιχεῖον λέγεται γινόμενον τῶν δύο ἄλλων.

2ον Εἰς τὸ γινόμενον τῶν στοιχείων τοῦ συνόλου ἰσχύει ὁ συνδιαστικός νόμος τῆς ἀριθμητικῆς, ὁ ὁποῖος ἰσχύει καὶ εἰς τὸ γινόμενον ἀριθμῶν.

3ον Ὑπάρχει ἐν στοιχεῖον τῆς ὁμάδος, τὸ ὁποῖον συνδιαζόμενον μὲ οἰωνδήποτε ἄλλο στοιχεῖον αὐτῆς, ἀφίνει τοῦτο ἀμετάβλητον, τῇ βοήθειᾳ πάντοτε τῆς ἐν λόγῳ πράξεως. Τὸ στοιχεῖον τοῦτο λέγεται μοναδιαῖον στοιχεῖον τῆς ὁμάδος.

4ον Εἰς ἕκαστον στοιχεῖον τοῦ συνόλου ἀντιστοιχεῖ ἐν ἄλλο, τὸ ὁποῖον συνδιαζόμενον μετ' αὐτοῦ διὰ τῆς ἐν λόγῳ πράξεως δίδει ὡς γινόμενον τὸ μοναδιαῖον στοιχεῖον. Ἐκαστον τῶν δύο τούτων στοιχείων λέγεται ἀντίστροφον τοῦ ἄλλου.

Μία ἐξαιρετικῶς ἐνδιαφέρουσα περίπτωσις ὁμάδος εἶναι ἡ περίπτωσις τῆς ὁμάδος μετασχηματισμῶν. Ἐὰν τὰς συντεταγμένας ἐνὸς σημείου ὡς πρὸς ἓν ὁρισμένον σύστημα ἐκφράσωμεν ὡς συναρτήσεις τῶν συντεταγμένων ἐνὸς ἄλλου σημείου ὡς πρὸς ἓν ἄλλο ἐν γένει σύστημα, εἶναι δὲ αἱ συναρτήσεις αὗται φύσεως τοιαύτης ὥστε, ὅταν αἱ εἰς αὐτὰς εἰσερχόμεναι παράμετροι λαμβάνουν ὅλας τὰς δυνατὰς τιμὰς, τὰ ἀνωτέρω ἐπιτάγματα πληροῦνται, οἱ τύποι οὗτοι ἀποτελοῦν μίαν ὁμάδα, καλουμένην ὁμάδα μετασχηματισμῶν. καὶ τοῦτο

¹ A. Speiser; Theorie der Oruppen von endlicher Ordnung. S. 10-11 (I. Springer. 1929).

διότι δι' εφαρμογῆς αὐτῶν ἐπὶ τῶν στοιχείων ἑνὸς σχήματος, τὸ σχῆμα τοῦτο μετασχηματίζεται εἰς ἄλλο.

Εἰς ἕκαστην ομάδα μετασχηματισμῶν ἀντιστοιχεῖ ἓν σύνολον, τὸ σύνολον τῶν ἰδιοτήτων τῶν σχημάτων, αἱ ὁποῖαι παραμένουν ἀναλλοίωτοι κατὰ τοὺς μετασχηματισμοὺς τῶν σχημάτων τούτων [τῇ βοήθειᾳ τῶν τύπων τῆς ομάδος].

*«Τὸ σύνολον δὲ ἀκριβῶς τῶν ἰδιοτήτων τούτων ἀποτελεῖ τὸ λεγόμενον πεδῖον αἰτιότητος τῆς ομάδος, γενομένου δεκτοῦ ὅτι αἷτια ἀναλλοίωτα ὡς πρὸς τοὺς μετασχηματισμοὺς μιᾶς ομάδος, ἔχουν ὡς ἐπακολουθήματα ἀποτελέσματα ἐπίσης ἀναλλοίωτα, ὡς πρὸς τοὺς μετασχηματισμοὺς τῆς ομάδος ταύτης».*¹

Ἡ διατύπωσις αὕτη τοῦ ἀξιώματος τῆς αἰτιότητος, γενίκευσις τῆς προηγουμένως διὰ τὴν κλασικὴν Μηχανικὴν δοθείσης, δύναται νὰ χρησιμεύσῃ πλέον εἰς ὅλους τοὺς κλάδους τῶν Μαθηματικῶν καὶ τῆς Φυσικῆς, εἰς τοὺς ὁποίους αἱ ἔννοιαι τοῦ συνόλου καὶ τῆς ομάδος παίζουσι σημαίνοντα ρόλον.

Ἡ μεταξὺ τῶν ἐννοιῶν τοῦ συνόλου καὶ τῆς ομάδος ἀφ' ἑνὸς καὶ τῆς αἰτιότητος ἀφ' ἑτέρου ὑφισταμένη στενὴ σχέσηις ἤγαγε, ὅπως παρατηρεῖ εἰς σχετικὸν ἄρθρον τοῦ ὁ Bouligand,² εἰς τὸν ὁποῖον ἄλλωστε ὀφείλεται ἡ γενικωτέρα αὕτη διατύπωσις τοῦ ἀξιώματος τῆς αἰτιότητος, εἰς τὴν θεωρίαν τῆς εἰδικῆς σχετικότητος. Αἱ προσπάθειαι πρὸς ἐνοποίησην τῆς Φυσικῆς προσέκρουον εἰς μίαν ἀπρόοπτον διαπίστωσιν: τὸ γεγονός δηλαδὴ ὅτι αἱ ἐξισώσεις τῆς κλασικῆς Δυναμικῆς ἀφ' ἑνὸς καὶ αἱ ἐξισώσεις τῆς θεωρίας τοῦ ἠλεκτρομαγνητισμοῦ ἀφ' ἑτέρου παραμένουν ἀναλλοίωτοι ὡς πρὸς τοὺς μετασχηματισμοὺς δύο διαφόρων ομάδων, τῆς τοῦ Γαλιλαίου καὶ τῆς τοῦ Lorentz ἀντιστοιχῶς, ἡ δὲ ἐντεῦθεν προκύπτουσα ἀσυμφωνία καθίστα ἀνεφικτὸν τὴν ἐμφάνισιν τῆς θεωρίας τοῦ ἠλεκτρομαγνητισμοῦ ὡς συνεχείας τῆς Μηχανικῆς. Διὰ τὴν ἀποκατάστασιν τῆς ἐνότητος ἐπεβάλλετο ἡ τροποποίησης τῶν ἐξισώσεων τῆς Δυναμικῆς καὶ μάλιστα κατὰ τρόπον ἐπιρροαζόμενα ἀνεπαισθήτως τὰ συμπεράσματα τῆς κλασικῆς Μηχανικῆς διὰ τὸς συνήθεις ταχύτητας. Ἡ διόρθωσις αὕτη ἔγκειται εἰς τὴν ὑπαγωγήν τῶν ἐξισώσεων τῆς Δυναμικῆς εἰς τὴν ομάδα μετασχηματισμῶν τοῦ Lorentz, ἀποδιδομένης συγχρόνως εἰς τὴν ταχύτητα τοῦ φωτὸς ἐξαιρετικῆς σημασίας, ἀφορώσης εἰς τὸν τρόπον ἀντιλήψεως τῶν διαφόρων ἐννοιῶν τῆς Μηχανικῆς. Μολονότι δὲ τὸ πρὸς τὴν εἰδικὴν σχετικότητα βῆμα, ἀπὸ καθαρῶς Μαθηματικῆς ἀπόψεως εἶναι ἀσήμαντον, προὐκάλεσε ἐν τούτοις σκάνδαλον,

¹ G. Bouligand, Géométrie et causalité, (L'évolution des Sciences physiques et mathématiques) 1935. p. 156.

² G. Bouligand. loc. cit. p. 157.

διότι επέφερε ἀληθῆ ἀναστάωσιν εἰς τὰς καθιερωμένας ἀντιλήψεις ἐπὶ τῶν ἐννοιῶν τοῦ χώρου καὶ τοῦ χρόνου. Ἡ ἐννοια τοῦ συγχρόνου δύο γεγονότων καὶ μαζὶ μὲ αὐτὴν ἡ ἐννοια τοῦ μήκους ἀποβάλλουν πλέον τὸν ἀπόλυτον χαρακτήρα αὐτῶν εἰς τὴν θεωρίαν ταύτην, τῶν δύο τούτων θεμελιωδῶν ἐννοιῶν ἐμφανιζομένων εἰς αὐτὴνοὔχι πλέον ἀνεξαρτήτων ἀλλ' ἀλληλενδέτων.

Σοβαρωτέρα πρὸς τὴν ἐπιδιωκομένην ἀποκατάστασιν τῆς ἐνότητος εἰς τὴν Φυσικὴν πρόοδος ἐπετεύχθη διὰ τῆς γενικευμένης θεωρίας τῆς σχετικότητος, διὰ τῆς ὁποίας ἐπιδιώκεται ἡ ἐπὶ νέων βάσεων θεμελίωσις τῆς θεωρίας τῆς βαρύτητος καὶ τῶν νόμων μεταδόσεως τοῦ φωτός. Ἡ βαρύτης εἰς αὐτὴν ἀποκτᾷ γεωμετρικὸν χαρακτήρα ἐμφανιζομένη ὡς ιδιότης τοῦ χώρου τῶν τεσσάρων διαστάσεων, τῶν τριῶν διαστάσεων τοῦ συνήθους χώρου καὶ τοῦ χρόνου ὡς τετάρτης διαστάσεως, μὲ τὴν διαφορὰν ὅτι διὰ τὴν περιγραφὴν τοῦ φαινομένου τούτου ἐχρειάσθη ἡ προσφυγὴ εἰς γεωμετρικὰ συστήματα γενικωτέρου τύπου, θεωρηθέντα καὶ μελετηθέντα τὸ πρῶτον ὑπὸ τοῦ Riemann. Δὲν δύναμαι βεβαίως ἐνταῦθα νὰ ἐκθέσω τὸν τρόπον, διὰ τοῦ ὁποίου ὁ Einstein ἐπέτυχε τὴν θεμελίωσιν τῆς θεωρίας ταύτης. Ἀρκοῦμαι μόνον νὰ τονίσω ὅτι διὰ τῆς θεωρίας ταύτης αἱ σχέσεις αἰτίου πρὸς ἀποτέλεσμα, αἱ ὁποῖαι ἐμφανίζονται εἰς τὸ πρόβλημα τῆς βαρύτητος, ταυτίζονται μὲ ὠρισμένας ιδιότητες τῶν χώρων τοῦ Riemann. Τὰ φαινόμενα δηλαδὴ τῆς βαρύτητος εἰς τὴν θεωρίαν ταύτην γεωμετρικοποιῦνται. Νέα σημαντικὴ ἐπίσης πρόοδος πρὸς τὴν κατεύθυνσιν ταύτην ἐσημειώθη διὰ τῆς ὑπὸ τοῦ Weyl καὶ τοῦ Cartan ἰδίως ἐπιτευχθείσης γεωμετρικοποιήσεως τῶν ἠλεκτρομαγνητικῶν φαινομένων, τῶν εἰς τὰ φαινόμενα ταῦτα ὑπαρχουσῶν σχέσεων αἰτίου πρὸς ἀποτέλεσμα ταυτιζομένων μὲ ὠρισμένας ιδιότητες γεωμετρικῶν συστημάτων τύπου γενικωτέρου τοῦ ὑπὸ τοῦ Riemann μελετηθέντος. Τοιοῦτρόπως ἀποκαθίσταται βαθμιαίως ἡ μεγαλειτέρα ἐπιθυμητὴ ἐνότης εἰς τὴν Φυσικὴν. Ἡ τάσις δὲ αὕτη πρὸς ἐνοποίηση τῶν Φυσικῶν θεωριῶν ἔχει ὡς κίνητρον, ἔστω καὶ ὑπὸ λανθάνουσαν μορφήν, τὴν ὅσον ἔνεστι ἐναργεστέραν ἀποκατάστασιν τῶν σχέσεων αἰτίου πρὸς ἀποτέλεσμα. Ὁφείλομεν βεβαίως καὶ ἐνταῦθα νὰ τονίσωμεν, ὅτι ἡ λέξις αἴτιον δὲν ἔχει τὴν συνήθη μεταφυσικὴν σημασίαν, ἡ ὁποία ἀφίνει ἀδιάφορον τὴν ἐπιστήμην. Ἀπλῶς αἱ ἐκάστοτε δημιουργούμεναι φυσικαὶ θεωρίαι εἶναι λογικὰ οἰκοδομήματα προσαρμοζόμενα πρὸς τὴν πραγματικότητα ἢ μᾶλλον πρὸς τὴν εἰκόνα τῆς πραγματικότητος, τὴν ὁποίαν παρέχουν τὰ ἐκάστοτε διατιθέμενα μέσα πειραματισμοῦ, τὰ δὲ εἰς ταύτας θεωρούμενα αἴτια εἶναι κατασκευάσματα τοῦ πνεύματος, διὰ τῶν ὁποίων οἱ δημιουργοὶ τῶν θεωριῶν τούτων ἐπιδιώκουν νὰ ἐπιτύχουν τὴν φυσικωτέραν ἀπὸ λογικῆς ἀπόψεως καὶ τὴν συντομωτέραν περιγραφὴν τῶν φαινομένων. Ἡ τελειότης δὲ μιᾶς θεωρίας ἔγκειται ἀφ' ἐνὸς εἰς τὴν σύμπτωσιν μὲ ἰσα-

νοποιητικὴν προσέγγισιν τῶν δι' ἀπαγωγικῶν συλλογισμῶν ἐκ τῶν θεμελιωδῶν βάσεων τῆς θεωρίας ταύτης ἀπορροέντων συμπερασμάτων μὲ τὰ δεδομένα τοῦ πειράματος καὶ ἀφ' ἑτέρου εἰς τὴν κατὰ τὸν φυσικώτερον καὶ τὸν συντομώτερον δυνατὸν τρόπον εὔρεσιν τῶν συμπερασμάτων τούτων.

V

Ἡ τάσις πρὸς ἀποκατάστασιν τῆς μεγίστης δυνατῆς ἀπλότητος καὶ τῆς κατὰ τὸν συντομώτερον καὶ τὸν φυσιολογικώτερον δυνατὸν τρόπον εὔρεσεως τῶν λογικῶν συμπερασμάτων τῶν ἀπορροέντων ἐκ τῶν θεμελιωδῶν προτάσεων, αἱ ὁποῖαι τίθενται ἐν ἀρχῇ μιᾶς μαθηματικῆς θεωρίας, χαρακτηρίζει καὶ τὴν σύγχρονον μαθηματικὴν κίνησιν. Προῆλθε δὲ αὕτη κυρίως ἐκ τῆς ἀπὸ τῶν ἀρχῶν τοῦ παρελθόντος αἰῶνος ἀναγνωρισθείσης ἀνάγκης τῆς ἐκκαθαρίσεως καὶ τῆς κριτικῆς ἐπεξεργασίας τοῦ μέχρι τῆς ἐποχῆς ἐκείνης συσσωρευθέντος ὕλικου, δεδομένου ὅτι, αἱ μετὰ τὴν ὑπὸ τοῦ Descartes δημιουργίαν τῆς Ἀναλυτικῆς Γεωμετρίας καὶ τὴν ὑπὸ τοῦ Newton καὶ τοῦ Leibniz δημιουργίαν τοῦ ἀπειροστικοῦ λογισμοῦ ἐπακολουθήσασαι ραγδαῖαι πρόοδοι εἰς τὰ πεδία τῆς Μαθηματικῆς Ἀναλύσεως καὶ τῆς Γεωμετρίας, ἐγένοντο ἐν πολλοῖς εἰς βάρος τῆς ἀκριβολογίας καὶ τῆς γενικότητος. Ἡ τελευταίως δὲ γενομένη ἀπόπειρα πρὸς τὴν ἐκ τοῦ ἐμφανοῦς πλέον εἰσαγωγὴν τῆς αἰτιότητος εἰς τὰ Μαθηματικά, διὰ τῆς προηγουμένως δοθείσης γενικεύσεως τοῦ ἀξιώματος τῆς αἰτιότητος, εἶναι ἀπόρροια τῆς ὅλης ταύτης κινήσεως. Διότι, διὰ τοῦ ἀκριβοῦς καθορισμοῦ τῶν εἰδικῶν χαρακτηριστικῶν ἐκάστου πεδίου αἰτιότητος, ἀποκαθίσταται ἐν εἶδος λογικοῦ ντετερμινισμοῦ, διὰ τοῦ ὁποῖου ἐπιτυγχάνεται ἡ φυσικωτέρα ἀπὸ λογικῆς ἀπόψεως ταξινόμησις τῶν ιδιοτήτων τοῦ πεδίου τούτου, τοῦ πνεύματος μεταβαίνοντος ἀπὸ μιᾶς ιδιότητος εἰς τὴν ἀμέσως ἐπομένην φυσιολογικῶς καὶ ἄνευ οὐδενὸς δισταγμοῦ. Ἡ καθιέρωσις δὲ τοῦ λογικοῦ τούτου ντετερμινισμοῦ εἰς τοὺς διαφόρους κλάδους τῶν Μαθηματικῶν δὲν παρουσιάζει σημαντικὰς δυσκολίας, συντελοῦσα ἀντιθέτως εἰς τὴν ἀποκατάστασιν τῆς μεγίστης δυνατῆς τελειότητος εἰς τὸν κλάδον τοῦτον τῆς ἐπιστήμης.

Ἄλλωστε ἐὰν παρακολουθήσωμεν τὴν ἐξέλιξιν τῶν διαφόρων κλάδων τῶν Μαθηματικῶν καὶ ἐμβαθύνωμεν εἰς τὸν τρόπον τῆς διαμορφώσεως τῶν διαφόρων Μαθηματικῶν θεωριῶν, ἀναγνωρίζομεν ὅτι τὸ πνεῦμα τῆς αἰτιότητος, ὑπὸ λανθάνουσαν βεβαίως μορφήν, διέπει γενικοῦς ὅλους τοὺς δημιουργοὺς τῶν θεωριῶν τούτων ἐπηρεάζων σημαντικῶς τὴν δημιουργικὴν ἐργασίαν αὐτῶν, ἀποτελεῖ δὲ κατὰ τὴν γνώμην μου τὴν οὐσιαστικωτέραν ἐκδήλωσιν τῆς τάσεως πρὸς ἐξοινονόμησιν πνευματικοῦ ἔργου. Πρὸς διακαιολογίαν τοῦ ἰσχυρισμοῦ τούτου θὰ προσπαθῆσω νὰ ἐκθέσω, ἐν συντόμῳ βεβαίως, τὰς εἰς τὴν Γεωμετρίαν ἐπιτευχθείσας προόδους ἀπὸ τῶν

ἀρχῶν τοῦ παρελθόντος αἰῶνος μέχρι σήμερον, με ἀφετηρίαν τὸ περισπούδαστον ἔργον τοῦ Poncelet περὶ τῶν προβολικῶν ἰδιοτήτων τῶν σχημάτων. Εἰς τὸ ἔργον του αὐτοῦ ὁ Poncelet διακρίνει τὰς ἰδιότητες τῶν σχημάτων εἰς προβολικὰς καὶ μὴ προβολικὰς. Ἀκόμη δ' ἀκριβέστερον αἱ ἰδιότητες τῶν σχημάτων δύνανται νὰ διακριθῶν εἰς τὰς ἑξῆς τρεῖς κατηγορίας:

1ον. Τὰς ἰδιότητας αἱ ὁποῖαι διατηροῦνται κατὰ τὴν μετάβασιν ἀπὸ ἐνὸς σχήματος εἰς ἄλλο ὅμοιον πρὸς αὐτό.

2ον. Τὰς ἰδιότητας αἱ ὁποῖαι διατηροῦνται κατὰ τὴν μετάβασιν ἀπὸ ἐνὸς σχήματος εἰς ἄλλο διὰ κυλινδρικῆς προβολῆς καὶ

3ον. Τὰς ἰδιότητας αἱ ὁποῖαι διατηροῦνται κατὰ τὴν μετάβασιν ἀπὸ ἐνὸς σχήματος εἰς ἄλλο διὰ κωνικῆς προβολῆς.

Τοιοῦτοτρόπως ἡ γεωμετρία διαιρεῖται εἰς τοὺς ἑξῆς τρεῖς κλάδους:

1ον. Τὴν μετρικὴν γεωμετρίαν περιλαμβάνουσαν τὰς ἰδιότητας τῆς α κατηγορίας,

2ον. Τὴν γραμμικὴν Γεωμετρίαν περιλαμβάνουσαν τὰς ἰδιότητας τῆς β' κατηγορίας καὶ

3ον. Τὴν προβολικὴν γεωμετρίαν περιλαμβάνουσαν τὰς ἰδιότητες τῆς γ' κατηγορίας.

Ἡ διαίρεσις αὕτη τῆς γεωμετρίας εἰς τοὺς τρεῖς τούτους κλάδους ἐμφανίζεται πολὺ φυσικωτέρως καὶ περισσότερον δικαιολογημένη διὰ τῆς εἰσαγωγῆς τῆς ἐννοίας τῆς ομάδος μετασχηματισμῶν. Ἐκαστος κλάδος περιλαμβάνει τὰς ἰδιότητας τῶν σχημάτων, αἱ ὁποῖαι παραμένουν ἀναλλοίωτοι ὡς πρὸς τοὺς μετασχηματισμοὺς μιᾶς ὁρισμένης ομάδος καὶ συγκεκριμένως, ἡ μετρικὴ γεωμετρία περιλαμβάνει τὰς ἰδιότητας, αἱ ὁποῖαι παραμένουν ἀναλλοίωτοι ὡς πρὸς τοὺς μετασχηματισμοὺς ὁμοιότητος, ἡ γραμμικὴ γεωμετρία τὰς ἰδιότητας, αἱ ὁποῖαι παραμένουν ἀναλλοίωτοι ὡς πρὸς τοὺς γραμμικοὺς μετασχηματισμοὺς καὶ τέλος ἡ προβολικὴ γεωμετρία τὰς ἰδιότητας, αἱ ὁποῖαι παραμένουν ἀναλλοίωτοι ὡς πρὸς τοὺς προβολικοὺς μετασχηματισμοὺς. Σημειωτέον ὅτι ἡ ὁμάς τῶν μετασχηματισμῶν ὁμοιότητος περιλαμβάνεται εἰς τὴν ὁμάδα τῶν γραμμικῶν μετασχηματισμῶν, τῆς ομάδος ταύτης περιλαμβανομένης ἐπίσης εἰς τὴν γενικὴν ὁμάδα τῶν προβολικῶν μετασχηματισμῶν. Τὸ ζήτημα, τὸ ὁποῖον τίθεται μετὰ τὴν διαίρεσιν ταύτην, εἶναι ἡ ἀναγνώρισις τῆς λογικῆς ἀνεξαρτησίας τῶν τριῶν τούτων κλάδων τῆς Γεωμετρίας, ζήτημα ἀμέσως συνδεδεμένον μετὰ τὴν ἀναζήτησιν τῶν αἰτιῶδων σχέσεων εἰς τὸ πεδῖον τῆς Γεωμετρίας, τὸ δὲ ἔργον τοῦ Poncelet ἀπέτελεσε οὐσιώδη συμβολὴν εἰς τὴν λύσιν τοῦ προβλήματος τούτου.

Αἱ πρὸς ἀπόδειξιν τῆς λογικῆς ἀνεξαρτησίας τῶν τριῶν τούτων κλάδων τῆς Γεωμετρίας προσπάθειαι ἔσχον ὡς ἀποτέλεσμα τὴν ἐπίτευξιν τοῦ γενικωτέρου συμπεράσματος, καθ' ὃ δὲν ὑπάρχει μία Γεωμετρία ἀλλὰ πολλὰ γεωμετρικὰ συστήματα αὐτοτελῆ, ἕκαστον τῶν ὁποίων ἀντιστοιχεῖ εἰς μίαν

ὄρισμένην ομάδα μετασχηματισμῶν. Σημαντικὴν πρὸς τὴν κατεύθυνσιν ταύτην συμβολὴν ἀπετέλεσαν αἱ περιφρήμοι ἐργασίαι τοῦ Gauss ἀφ' ἑνὸς ἐπὶ τῆς θεωρίας τῶν ἐπιφανειῶν καὶ τοῦ Riemann ἀφ' ἑτέρου ἐπὶ τῆς διαφορικῆς Γεωμετρίας ἀπὸ γενικωτέρας ἀπόψεως, διὰ τῶν ὁποίων καθίσταται φανερὰ ἡ θεμελιώδης σημασία τοῦ γραμμικοῦ στοιχείου διὰ τὴν σπουδὴν τῶν γεωμετρικῶν σχημάτων. Τὴν ὀριστικὴν ὅμως λύσιν τοῦ προβλήματος ἐπέτυχεν ὁ Sophus Lie, ὁ ὁποῖος ἔδωσε τὴν πλήρη συσχέτισιν τῶν διαφορῶν γεωμετρικῶν συστημάτων μετὰ τὴν θεωρίαν τῶν ομάδων μετασχηματισμῶν. Τὸ ἔργον δὲ τοῦ διασήμου τούτου νορβηγοῦ μαθηματικοῦ συνεπληρώθη κατόπιν διὰ τῶν περιφρήμων σχετικῶν ἐργασιῶν τοῦ Klein καὶ τοῦ Poincaré. Τέλος, ἡ κατὰ τὰ τελευταῖα ἔτη τοῦ παρελθόντος αἰῶνος γενομένη θεμελίωσις τῆς Μαθηματικῆς Ἀναλύσεως καὶ ἰδιαίτερος τῆς θεωρίας τῶν πραγματικῶν συναρτήσεων ἐπὶ τῇ βάσει τῆς θεωρίας τῶν συνόλων, ἔσχε σημαντικὴν ἐπίδρασιν καὶ ἐπὶ τῆς ἐξελίξεως τῆς διαφορικῆς Γεωμετρίας, δεδομένου ὅτι ἡ μεταξὺ τῶν δύο τούτων κλάδων ὑφίσταμένη σχέση ἐστὶν εἰς αὐτὴν ὡς γνωστόν, στενωτάτη. Τὸ πρῶτον δὲ οὐσιῶδες βῆμα διὰ τὴν πρὸς τὴν νέαν ταύτην κατεύθυνσιν ἀνάπτυξιν τῆς διαφορικῆς Γεωμετρίας ἐγένετο ὑπὸ τοῦ Lebesgue, ὁ ὁποῖος εἰς τὸ V κεφάλαιον τῆς περιωνύμου ἐργασίας του περὶ τῆς θεωρίας τῆς ὀλοκληρώσεως, ἠθέλησε νὰ δεῖξῃ πόσον αἱ συμπληρωματικαὶ ὑποθέσεις, αἱ ὁποῖαι εἰσάγονται πρὸς ἐφαρμογὴν τῶν τύπων τῆς Διαφορικῆς Γεωμετρίας, δύνανται νὰ ἐπηρεάσουν τὰ τελικὰ συμπεράσματα. Οὕτω ἐγκαταλείψας τὰς συμπληρωματικὰς ὑποθέσεις ὑπάξεως παραγῶγων καὶ χρησιμοποιήσας ἀπ' εὐθείας μεθόδους, κατέληξε εἰς τὸ περιεργον διὰ τὴν ἐποχὴν ἐκείνην συμπέρασμα, ὅτι ἐπιφάνεια ἐφαρμοσίμοι ἐπὶ ἐπιπέδου δὲν εἶναι μόνον, ὅσαι σχηματίζονται ἀπὸ τὰς ἐφαπτομένας τῶν ἐν τῷ χώρῳ καμπύλων ὑπάρχουν καὶ ἄλλαι, ἐπὶ τῶν ὁποίων οὔτε τὸ ἐλάχιστον τμήμα εὐθείας ὑπάρχει ἑπίσης δὲ ὅτι οὔτε ὅλαι αἱ ἐπιφάνεια αἱ σχηματιζόμεναι ἀπὸ τὰς ἐφαπτομένας τῶν ἐν τῷ χώρῳ καμπύλων εἶναι ἀναπυκταὶ ἐπὶ ἐπιπέδου. Καταλήγων δὲ εἰς τὰ συμπεράσματα ταῦτα, ὑποδεικνύει συγχρόνως καὶ τὰς συμπληρωματικὰς ὑποθέσεις, αἱ ὁποῖαι ἐπέφερον τὴν ἀλλοίωσιν τῶν τελικῶν συμπερασμάτων. Εἰς τὴν σύντομον ταύτην ἀνασκόπησιν τῆς ἐξελίξεως τῆς Γεωμετρίας ἀπὸ τῶν ἀρχῶν τοῦ παρελθόντος αἰῶνος, διαφαίνεται ἀρετὰ σαφῶς ἡ ἐπίδρασις τοῦ πνεύματος τῆς αἰτιότητος πρὸς ἀποκάλυψιν τῶν στενωτέρων δεσμῶν, οἱ ὁποῖοι ὑφίστανται μετὰ τῶν διαφορῶν γεωμετρικῶν προτάσεων.

Σημαντικὴν ἐπίδρασιν τοῦ πνεύματος τῆς αἰτιότητος ἀνευρίσκουεν ἐπίσης ἰδίως εἰς τὴν δημιουργίαν ἑνὸς νέου κλάδου τῶν Μαθηματικῶν, τῆς Ἀξιωματικῆς, βασιζομένου ἐπὶ τῆς θεωρίας τῶν συνόλων καὶ προελθόντος ἐκ τῆς κατὰ τὰ τελευταῖα ἔτη γενομένης ἀναθεωρήσεως τῶν ἀξιωμάτων τῆς Ἀριθμητικῆς καὶ τῆς Γεωμετρίας.

Ἡ Ἀξιοματικὴ συνίσταται κατὰ τὸν Weyl¹ εἰς τὴν συλλογὴν ὄλων τῶν θεμελιωδῶν ἔννοιῶν καὶ τῶν θεμελιωδῶν προτάσεων, τῇ βοήθειᾳ τῶν ὁποίων δύνανται νὰ προκύψουν ὅλοι αἱ ἔννοιαι καὶ αἱ σχέσεις, αἱ ὑφιστάμεναι μεταξὺ τῶν στοιχείων ἑνὸς συνόλου. Ἐν δὲ τῶν θεμελιωδῶν προβλημάτων τοῦ κλάδου τούτου εἶναι τὸ ἑξῆς: Δοθέντος ἑνὸς συστήματος ἀξιομάτων, νὰ ἀναγνωρισθῇ ἂν τὰ ἀξιώματα ταῦτα εἶναι λογικῶς ἀνεξάρτητα ἀπ' ἄλλήλων ἢ ὄχι. Τὸ πρόβλημα τοῦτο εἶναι βεβαίως καθαρῶς λογικόν, ἢ προέλευσις του ὁμοῦ εἶναι γεωμετρικὴ· διότι ἡ πρώτη νῦξις διὰ τὴν θέσιν ἑνὸς τοιούτου προβλήματος ὀφείλεται εἰς τὴν διὰ τῆς δημιουργίας τῆς γεωμετρίας τοῦ Lobalzelkij ἀναγνώρισιν τοῦ λογικῶς ἀνεξαρτήτου τοῦ αἰτήματος τοῦ Εὐκλείδου ἀπὸ τῶν ἄλλων ἀξιομάτων τῆς Γεωμετρίας. Γενικῶς ἄλλωστε, ὅπως καὶ προηγουμένως εἴπομεν, ἡ προέλευσις τοῦ κλάδου τούτου εἶναι γεωμετρικὴ, δημιουργηθέντος κυρίως διὰ τὰς ἀνάγκας τῆς ἀξιοματικῆς θεμελιώσεως τῆς Γεωμετρίας. Ἡ πρώτη προσπάθεια πρὸς ἀξιοματικὴν θεμελίωσιν τῆς Γεωμετρίας, καὶ μάλιστα ἀρκετὰ ἐπιτυχῆς, ὀφείλεται εἰς τὸν Εὐκλείδην, ἡ συστηματικὴ ὁμοῦ χρησιμοποιήσις ἀξιοματικῶν μεθόδων ἐγένετο κυρίως τὸ πρῶτον ὑπὸ τοῦ Peano ἀπ' ἑνὸς καὶ τοῦ Pasch ἀπ' ἑτέρου, ἡ ὀριστικὴ δὲ διαμόρφωσις τοῦ κλάδου τούτου ὀφείλεται εἰς τὸν Hilbert καὶ τοὺς μαθητὰς αὐτοῦ. Διὰ τῆς ἀξιοματικῆς θεμελιώσεως ἑκάστου κλάδου ἐπιδιώκεται κυρίως ἡ ἀπλουστερά καὶ φυσικωτέρα εὕρεσις τῶν σχέσεων τῶν ὑφισταμένων μεταξὺ τῶν στοιχείων τοῦ κλάδου τούτου, εἶναι λοιπὸν φυσικὸν ὅτι ἡ ὅλη αὕτη κριτικὴ κυρίως ἐπεξεργασία διέπεται ἀπὸ τὸ πνεῦμα τῆς αἰτιότητος καὶ τοῦ λογικοῦ ντετερμινισμοῦ.

Ἡ σημασία τὴν ὁποίαν ἐπομένως ἔχει διὰ τὰ Μαθηματικὰ ἡ ἔννοια τῆς αἰτιότητος εἶναι καθαρῶς μεθοδολογικὴ. Ἡ ἀξία μιᾶς μαθηματικῆς ἀποδείξεως ἔγκειται κυρίως εἰς τὸν τρόπον μὲ τὸν ὁποῖον ἀποκαλύπτονται οἱ βαθύτεροι καὶ οἱ μᾶλλον ἀποχρῶντες λόγοι ἑνὸς ἀποτελέσματος. Μία κοινὴ ἀπόδειξις ἐπιβεβαιώνει ἀπλῶς τὴν ἀλήθειαν μιᾶς προτάσεως, τὴν ὑπαρξιν μιᾶς ἰδιότητος, ἐνῶ ἀντιθέτως μία ἀπόδειξις διεπομένη ἀπὸ τὸ πνεῦμα τῆς αἰτιότητος καθιστᾷ προφανῆ τὸν δεσμὸν, ὁ ὁποῖος ὑφίσταται μεταξὺ τῆς ἀφετηρίας τῶν συλλογισμῶν καὶ τοῦ ἐπιδιωκομένου ἀποτελέσματος, καθιστῶσα ἐπὶ πλεόν εὐχερεστέραν τὴν ἀναγνώρισιν τῶν λόγων, διὰ τοὺς ὁποίους τὸ ἀποτέλεσμα τοῦτο ἔχει ὄρισμένην μορφήν. Ἀπὸ τῆς ἀπόψεως δὲ ταύτης ἡ ἀναζήτησις τῶν τοιούτων ἀποδείξεων ἀποκτᾷ ἐξαιρετικὸν ἐνδιαφέρον, διότι δι' αὐτῶν τὰ Μαθηματικὰ κερδίζουν εἰς βάθος καὶ διαύγειαν, ἐπιτυγχανομένης πρὸς τούτους τῆς μεγίστης δυνατῆς ἀπλότητος καὶ ἀκριβολογίας ἐν αὐτοῖς. Εἰς τὴν εὕρεσιν τῶν ἐν λόγῳ ἀποδείξεων συντελεῖ ὁ καθορισμὸς

¹ A. Fraenkel, Zehn Vorlesungen über die Grundlegung der Mengenlehre. (Teubner, 1927), S. 59.

τῶν εὐρύτερων δυνατῶν συνθηκῶν, ὑπὸ τὰς ὁποίας ἰσχύουν τὰ διάφορα θεωρήματα, ἐπιτυγχανόμενος διὰ τῆς συνεχοῦς ἀναθεωρήσεως τῶν χρησιμοποιουμένων ἐννοιῶν. Ἡ δὲ ἀδιάκοπος ἀναθεώρησις ὁρισμῶν καὶ ἐννοιῶν ἀποτελεῖ τὸ κύριον χαρακτηριστικὸν τῆς συγχρόνου μαθηματικῆς ἐρεῦνης. Οἱ σύγχρονοι ἐρευνηταὶ προσπαθοῦν νὰ ἀπαιλαγοῦν ἀπὸ τοὺς περιορισμοὺς, τοὺς ὁποίους ἐπιβάλλει ὁ λογισμὸς, διατηροῦντες ἀπόλυτον πρωτοβουλίαν εἰς τὴν ἐκλογὴν τῶν ὑποθέσεων καὶ προσανατολιζόμενοι πρὸς ἀπ' εὐθείας μεθόδους μὲ κύριον σκοπὸν τὴν ἐπίτευξιν τῆς μεγίστης δυνατῆς ἀπλότητος καὶ ἀκριβολογίας εἰς τὴν ἀπόδειξιν καὶ τὴν διατύπωσιν τῶν ἀποτελεσμάτων τῆς ἐρεῦνης. Ἐπομένως δὲ τῆς ὅλης ταύτης κινήσεως εἶναι, ὅπως καὶ ἀλλαγῶν εἴπομεν, ἡ διὰ τῆς προηγουμένως δοθείσης γενικεύσεως τοῦ ἀξιώματος τῆς αἰτιότητος γενομένη προσπάθεια πρὸς τὴν ἐκ τοῦ ἐμφανοῦς πλέον καθιέρωσιν τῆς αἰτιότητος εἰς τὰ Μαθηματικά.

Ἐπομένως διὰ μὲν τὴν Μηχανικὴν καὶ τὰς Φυσικὰς γενικῶς ἐπιστήμας τὸ ἀξίωμα τοῦτο ἔχει διττὴν χρησιμότητα, ἀπ' ἐνὸς εἰς τὸ πειραματικὸν στάδιον τῆς ἐξελιξέως αὐτῶν, ὡς στοιχεῖον ἀπαραίτητον διὰ τὴν ἐφαρμογὴν τῆς ἐπαγωγικῆς μεθόδου πρὸς ταξινόμησιν τοῦ ἐκ τῆς παρατηρήσεως καὶ τοῦ πειράματος προερχομένου ὕλικου καὶ διαμόρφωσιν τῶν ἐκ τῆς ἐπεξεργασίας ταύτης προκυπτόντων νόμων καὶ ἀπ' ἑτέρου ὡς πολύτιμον στοιχεῖον διὰ τὴν ἠτιολογημένην θεμελίωσιν τῶν διαφόρων κλάδων, πρὸς ἀποκατάστασιν τῆς μεγίστης δυνατῆς ἀπλότητος καὶ ἐνότητος ἐν αὐτοῖς. Διὰ δὲ τὰ Μαθηματικά ἔχει καθαρῶς σχεδὸν μεθοδολογικὴν ἀξίαν, συντελοῦν μετὰ τοῦ ἐξ αὐτοῦ ἀπορρέοντος λογικοῦ ντετερμινισμοῦ εἰς τὴν φυσικωτέραν ταξινόμησιν τῶν προτάσεων ἐκάστου κλάδου, πρὸς ἐπίτευξιν τῆς μεγίστης δυνατῆς ἀπλότητος, ἐνότητος καὶ ἀκριβολογίας εἰς τὴν ἀπόδειξιν καὶ τὴν διατύπωσιν τῶν ἀποτελεσμάτων, ἀποτελεῖ δέ, ὡς καὶ ἀλλαγῶν εἴπομεν, τὴν πλέον οὐσιαστικὴν ἐκδήλωσιν τῆς οἰκονομικῆς διαθέσεως τοῦ πνεύματος, ἡ ὁποία διέπει γενικῶς τὴν ἐπιστημονικὴν σκέψιν.