Über die Strahlensysteme deren Brennflächenmäntel durch die Systemstrahlen konform aufeinander abgebildet werden

Von
O. PYLARINOS

Über die Strahlensysteme, deren Brennflächenmäntel durch die Systemstrahlen konform aufeinander abgebildet werden. [1]

Von
O. PYLARINOS

Die Geraden eines zweiparametrigen Strahlensystems vermitteln zwischen den beiden Mänteln seiner Brennfläche eine Abbildung, bei der unter entsprechenden Punkten der zwei Mäntel die auf derselben Gerade des Systems liegenden Brennpunkte zu verstehen siud. Von nun an entsteht die Frage nach der Ermittelung derjenigen Strahlensysteme, bei denen die durch die Systemstrahlen vermittelte Abbildung ihrer Brennflächenmäntel aufeinander von einer von vorherein bestimmten Art wird.

Diese Frage ist insbesondere im Falle untersucht, bei dem die durch die Geraden des Strahlensystems vermittelte Abbildung der zwei Mäntel seiner Brennfläche aufeinander eine *Isometrie* ist [2] und welcher mit dem Problem der Bestimmung aller Flächen von einem gegebenen Linienelemente eng zusammenhängt.

In der vorliegenden Arbeit werden wir uns mit dem Falle beschäftigen, bei dem diese Abbildung *konform* ist.

Im § 1 werden in symmetrischer Form die Bedingungen aufgestellt, welche der Brennpunktsabstand und die drei Fundamentalgrössen erster Ordnung des sphärischeu Bildes der abwickelbaren Flächen des Strah-

---

1. Eine Zusammenfassung dieser Arbeit wurde im "*Archiv der Math.* ***2***, 1950, S. S. 449 - 455" veröffentlicht.

2. *A. Schur*, Über diejenigen Strahlensysteme, deren Brennflächen durch die Systemstrahlen isometrisch aufeinauder bezogen werden. *Math. Zeitschrift*, ***19***, 1924, S. S. 114 - 127.

S. Finikoff, Congruences avec les deux nappes de la surface focale applicables l'une sur l'autre par les points correspondants, *Annali di Mat.* ***4***, 1924, S. S. 175 - 184.

lensystems erfüllen müssen, damit ihre Brennflächenmäntel durch die Systemstrahlen konform aufeinander abgebildet werden.

Im § 2 wird das System der partiellen Differentialgleichungen, welches die oben erwähnten Bedingungen bilden im Falle derjenigen Strahlensysteme integriert, in denen der Winkel ω der Brennebenen konstant ist und welche wir im folgenden mit Vincensini [1] als *Strahlensysteme (ω)* bezeichnen wollen. Es wird sich somit zeigen, dass, wenn die durch die Geraden eines Strahlensystems (ω) vermittelte Abbildung ihrer Brenuflächenmäntel aufeinander konform ist, der Winkel ω gleich $\frac{2\pi}{3}$ ist. Weiter werden die zugehörigen Strahlensysteme (ω) in zwei Klasseu eingeteilt.

Im § 3 werden die aufgestellten Bedingungen zur Untersuchung der unserer Frage zugehörigen W-Strahlensysteme benutzt. Man erhält so wieder als einen spezielleren Fall solcher Strahlensysteme *die Strahlensysteme von Thybaut*[2], welche die einzigen bis jetzt bekanuten Strahlensysteme sind, dereu Brenuflächenmäntel durch die Systemstrahleu konform aufeinauder bezogen sind.

1. Für unsere Aufgabe scheint es zweckmässig als Parameterflächen u, v auf dem betrachteten Strahlensystem die abwickelbaren Flächen des Systems zu wählen, so dass, wenn e, f, g die Fundamentalgrössen erster Ordnung des sphärischen Bildes des Strahlensystems bedeuten, der Brennpunktsabstand 2ϱ eine Funktion von u, v wird, welche der partiellen Differentialgleichung

$$[1,1] \qquad \frac{\partial^2\varrho}{\partial u\partial v} + a\,\frac{\partial\varrho}{\partial u} + b\,\frac{\partial\varrho}{\partial v} + \left(\frac{\partial a}{\partial u} + \frac{\partial b}{\partial v} + f\right)\varrho = 0$$

genügt [3], wobei

$$[1,2] \qquad a \equiv \left\{\begin{matrix}12\\1\end{matrix}\right\} = \frac{g\,\dfrac{\partial e}{\partial v} - f\,\dfrac{\partial g}{\partial u}}{2\,(eg - f^2)}, \quad b \equiv \left\{\begin{matrix}12\\2\end{matrix}\right\} = \frac{e\,\dfrac{\partial g}{\partial u} - f\,\dfrac{\partial e}{\partial v}}{2\,(eg - f^2)}$$

sind.

---

1. *P. Vincensini*, Sur les généralisations de quelques problèmes de géometrie differentielle et sur certains cycles de congruences. *Acta Math. 71*, 1939, S. 145.

2. Siehe *L. Bianchi*, Lezioni di geometria differenziale, 1927, B. II_1, S.S. 188-190.

3. *L. Bianchi*, loc. cit. B. I_2, S. 484.

Bedeutet nun ω den Winkel der Parameterkurven u, v auf der Bildkugel, welcher, unter der obigen Annahme für die Parameterflächen u, v, dem Winkel der Brennebenen des Systems gleich ist (1), so gilt

$$[1,3] \qquad \cos\omega = \frac{f}{\sqrt{eg}}, \quad \sin\omega = \frac{\sqrt{eg-f^2}}{\sqrt{eg}}$$

und e, g, ω der partiellen Differentialgleichung

$$[1,4] \qquad \frac{\partial^2\omega}{\partial u\,\partial v} + \cos\omega\left[b\sqrt{\frac{g}{e}} + a\frac{\partial\omega}{\partial v}\sqrt{\frac{e}{g}}\right]$$

$$+ \sin\omega\left[\frac{\partial}{\partial u}\left(b\sqrt{\frac{g}{e}}\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(a\sqrt{\frac{e}{g}}\right) + \sqrt{eg}\right] = 0$$

genügen, wobei f in a, b durch e, g, ω mittels [1,3] ausgedrückt werden kann. Letztere Gleichung ergibt sich aus der Liouvilleschen Form (2) der Gausschen Gleichung für das Krümmungsmass einer Fläche mit Rücksicht auf die Tatsache, dass hier die Fläche eine Einheitskugel ist.

Bezeichnet man ferner mit E_1, F_1, G_1; E_2, F_2, G_2 und mit L_1, M_1, N_1; L_2, M_2, N_2 die Fundamentalgrössen erster und zweiter Ordnung der Brennflächenmäntel des betrachteten Strahlensystems, so hat man (3)

$$[1,5] \quad E_1 = 4\left(\frac{\partial\varrho}{\partial u} + b\varrho\right)^2, \; F_1 = -4\,a\varrho\left(\frac{\partial\varrho}{\partial u} + b\varrho\right), \; G_1 = 4\varrho^2(a^2+g),$$

$$[1,6] \quad E_2 = 4\varrho^2\left(b^2+e\right), \; F_2 = -4\,b\varrho\left(\frac{\partial\varrho}{\partial v} + a\varrho\right), \; G_2 = 4\left(\frac{\partial\varrho}{\partial v} + a\varrho\right)^2$$

und

$$[1,7] \; L_1 = 2\sqrt{e}\left(\frac{\partial\varrho}{\partial u} + b\varrho\right)\sin\omega, \; M_1 = 0, \; N_1 = -2\varrho\sqrt{g}\left(\frac{\partial\omega}{\partial v} + b\sqrt{\frac{g}{e}}\sin\omega\right)$$

---

1. *L. Bianchi*, loc. cit. B. I_2, S. 488.
2. *L. Bianchi*, loc. cit. B. I_1, S. 271.
3. *L. Bianchi*, loc. cit. B. I_2, S.S. 486 - 488.

$$[1,8]\quad L_2 = -2\varrho\sqrt{e}\left(\frac{\partial\omega}{\partial u}+a\sqrt{\frac{e}{g}}\sin\omega\right),\quad M_3=0,\ N_2=2\sqrt{g}\left(\frac{\partial\varrho}{\partial v}+a\varrho\right)\sin\omega,$$

wobei

$$[1,9]\qquad \frac{\partial\varrho}{\partial u}+b\varrho\not\equiv 0,\quad \frac{\partial\varrho}{\partial v}+a\varrho\not\equiv 0,\quad a^2+g\not\equiv 0,\quad b^2+e\not\equiv 0$$

sein müssen, da hier beide Mäntel der Brennfläche als verschiedene Flächen angesehen werden.

Die jedem Wertepaare von u, v entsprechende Punkte beider Mäntel sind, nach der obigen Annahme für die Parameterflächen u, v, die Brennpunkte des demselben Wertepaare zugehörigen Systemstrahles; demgemäss bilden diese Punkte ein Paar entsprechender Punkte bei der durch die Systemstrahlen vermittelten Abbildung der zwei Mäntel aufeiuander. Damit also diese Abbildung *konform* ist, muss bekanntlich

$$[1,10]\qquad \frac{E_1}{E_2}=\frac{F_1}{F_2}=\frac{G_1}{G_2}$$

sein.

Hieraus mit Rücksicht auf [1,5], [1,6] und [1,9] erkennt man zuerst, dass in unserer Aufgabe

$$a^2+g\not\equiv 0,\quad b^2+e\not\equiv 0$$

sein müssen und weiter, dass beide Grössen a, b nur gleichzeitig identisch verschwinden können.

Ist nun $a\equiv b\equiv 0$, so ergibt sich aus [1,5] und [1,6] $F_1\equiv F_2\equiv 0$ und die Bedingung [1,10] geht in die

$$[1,11]\qquad \left(\frac{\partial\varrho}{\partial u}\,\frac{\partial\varrho}{\partial v}\right)^2-eg\varrho^4=0$$

über.

Sind hingegen $a, b\not\equiv 0$, so nimmt [1,10] mit Rücksicht auf [1,5] und [1,6] die Gestallt

$$[1,12]\qquad \frac{\left(\frac{\partial\varrho}{\partial u}+b\varrho\right)^2}{\varrho^2\,(b^2+e)}=\frac{a\left(\frac{\partial\varrho}{\partial u}+b\varrho\right)}{b\left(\frac{\partial\varrho}{\partial v}+a\varrho\right)}=\frac{\varrho^2\,(a^2+g)}{\left(\frac{\partial\varrho}{\partial v}+a\varrho\right)^2}$$

an. Letzteres ist aber dem Gleichungsysteme

$$[1,13] \qquad a^2e - b^2g = 0, \left(\frac{\partial \varrho}{\partial u} + b\varrho\right)\left(\frac{\partial \varrho}{\partial v} + a\varrho\right) - \frac{a}{b}(b^2 + e)\varrho^2 = 0$$

gleichwertig.

Aus der ersten Gleichung [1,13] ergibt sich, dass entweder $a\sqrt{e} - b\sqrt{g} = 0$, oder $a\sqrt{e} + b\sqrt{g} = 0$ sein muss. Letztere Gleichung geht aber in die erste über, wenn an Stelle von u, v die Parameter $u' = u$, $v' = -v$ eingeführt werden [1], so dass [1,13] durch das Gleichungsystem

$$[1,14] \qquad a\sqrt{e} - b\sqrt{g} = 0, \left(\frac{\partial \varrho}{\partial u} + b\varrho\right)\left(\frac{\partial \varrho}{\partial v} + a\varrho\right) - \varrho^2\,[ab + \sqrt{eg}] = 0$$

ersetzt werden kann, welches auch wenn $a = b = 0$ ist, gilt.

Die vier Gleichungen [1,1], [1,4] und [1,14] bilden die Bedingungen, denen die Grössen e, g, ω, ϱ genügen müssen, damit die Brennflächenmäntel des betrachteten Strahlensystems durch die Systemstrahlen konform aufeinander bezogen werden.

Aus [1,14] ergibt sich zunächst, dass in unserer Aufgabe *der Brennpunktsabstand* 2ϱ *nicht denselben Wert auf allen Systemstrahlen beibehalten kann.*

Wäre nämlich $\frac{\partial \varrho}{\partial u} \equiv \frac{\partial \varrho}{\partial v} \equiv 0$, so müssen nach [1,9] $a, b \not\equiv 0$ sein und die Bedingungen [1,14] gehen in die

$$a\sqrt{e} - b\sqrt{g} = 0, \quad eg = 0$$

über. Daraus aber folgt $e \equiv g \equiv 0$ und somit nach [1,2] $a \equiv b \equiv 0$.

Aus der ersten Bedingung [1,14] mit Rücksicht auf [1,2] ergibt sich nun

$$[1,15] \qquad \frac{\partial \sqrt{e}}{\partial v} = \frac{\partial \sqrt{g}}{\partial u}$$

und daraus, dass im betrachteten Falle die Grössen $\sqrt{e}$, $\sqrt{g}$ die Ableitungen erster Ordnung nach u, bzw. v derselben Funktion λ (u, v):

---

1. *P. Vincensini*, loc. cit. S. 150.

[1,16] $$\sqrt{e} \equiv \frac{\partial \lambda}{\partial u}, \quad \sqrt{g} \equiv \frac{\partial \lambda}{\partial v}$$

sind.

Dabei gilt [1]

[1,17] $$\frac{\partial \omega}{\partial u} = -\sqrt{eg-f^2}\left[\frac{\begin{Bmatrix}11\\2\end{Bmatrix}}{e} + \frac{\begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix}}{g}\right], \quad \frac{\partial \omega}{\partial v} = -\sqrt{eg-f^2}\left[\frac{\begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix}}{e} + \frac{\begin{Bmatrix}22\\1\end{Bmatrix}}{g}\right],$$

wobei

[1,18] $$\begin{Bmatrix}11\\2\end{Bmatrix} = \frac{-f\frac{\partial e}{\partial u} + 2e\frac{\partial f}{\partial u} - e\frac{\partial e}{\partial v}}{2\,(eg-f^2)}, \quad \begin{Bmatrix}22\\1\end{Bmatrix} = \frac{-f\frac{\partial g}{\partial v} + 2g\frac{\partial f}{\partial v} - g\frac{\partial g}{\partial u}}{2\,(eg-f^2)}$$

sind.

Setzt man nun

[1,19] $$\Phi = \log \operatorname{tg}\frac{\omega}{2},$$

so erhält man aus [1,17] mit Rücksicht auf [1,2] und [1,14]

[1,20] $$\frac{\partial \Phi}{\partial u} + b = -\sqrt{\frac{g}{e}}\begin{Bmatrix}11\\2\end{Bmatrix}, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial v} + a = -\sqrt{\frac{e}{g}}\begin{Bmatrix}22\\1\end{Bmatrix}$$

und daraus

[1,21] $$\frac{\partial \Phi}{\partial u}\frac{\partial \Phi}{\partial v} + a\frac{\partial \Phi}{\partial u} + b\frac{\partial \Phi}{\partial v} - A = 0,$$

wobei

[1,22] $$A \equiv \begin{Bmatrix}11\\2\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}22\\1\end{Bmatrix} - a\,b$$

ist.

Bezeichnet man ferner mit kg_u, kg_v die geodätischen Krümmungen der Parameterkurven $v =$ konst. $u =$ konst. auf der Bildkugel, so gilt [2]

---

1. L. *Bianchi*, loc. cit. B. I_1 S. 271.
2. L. *Bianchi*, loc. cit. B. I_1, S. 270.

$$[1,23] \qquad k_{g_u} = \frac{\sqrt{eg-f^2}}{e\sqrt{e}} \begin{Bmatrix} 11 \\ 2 \end{Bmatrix}, \quad k_{g_v} = \frac{\sqrt{eg-f^2}}{g\sqrt{g}} \begin{Bmatrix} 22 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

nnd somit lassen sich die Formeln [1,20] in der Form

$$[1,24] \qquad \frac{\partial \Phi}{\partial u} + b = -\frac{\sqrt{e}}{\sin\omega} k_{g_u}, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial v} + a = -\frac{\sqrt{g}}{\sin\omega} k_{g_v}$$

schreiben.

Daraus folgert man auch mittels [1,14] und [1,16]

$$[1,25] \qquad \frac{D(\lambda,\Phi)}{D(u,v)} = \frac{\frac{\partial\lambda}{\partial u}\,\frac{\partial\lambda}{\partial v}}{\sin\omega}\,(k_{g_u} + k_{g_v}).$$

Zudem erhält die Gleichung [1,4] mit Rücksicht auf der ersten Gleichung [1,14] die Form

$$[1,26] \qquad \frac{\partial^2\omega}{\partial u\,\partial v} + \cos\omega \left[a\frac{\partial\omega}{\partial u} + b\frac{\partial\omega}{\partial v}\right] + \sin\omega\left[\frac{\partial a}{\partial u} + \frac{\partial b}{\partial v} + \sqrt{eg}\right] = 0.$$

Letztere kann man aber, Falls $\cos\omega \neq 0$ ist [1], mit Hilfe von [1,19] und [1,21] durch die

$$[1,27] \qquad \frac{\partial^2\Phi}{\partial u\,\partial v} + \frac{\partial a}{\partial u} + \frac{\partial b}{\partial v} + \sqrt{eg} + A\cos\omega = 0$$

ersetzen.

Setzt man schliesslich

$$[1,28] \qquad \varphi = \log\varrho,$$

so erhält die zweite Gleichung [1,14] die Form

$$[1,29] \qquad \frac{\partial\varphi}{\partial u}\,\frac{\partial\varphi}{\partial v} + a\frac{\partial\varphi}{\partial u} + b\frac{\partial\varphi}{\partial v} - \sqrt{eg} = 0.$$

---

1. Es ist zu bemerken, dass in unserer Aufgabe $\cos\omega$ nie identisch verschwinden kann, wie es sich aus dem letzten Satz des § 2 ergibt.

Andererseits kann im betrachteten Falle die Gleichung [1,1] unter Betrachtung der Bedingungen [1,14] durch die

$$\frac{1}{\varrho^2}\frac{\partial^2 \varrho}{\partial u\,\partial v} - \frac{1}{\varrho^2}\frac{\partial \varrho}{\partial u}\frac{\partial \varrho}{\partial v} + \frac{\partial a}{\partial u} + \frac{\partial b}{\partial v} + f + \sqrt{eg} = 0$$

ersetzt werdeu. Berücksichtigt man ferner, dass hier mindenstens eine der Ableitungen $\frac{\partial \varrho}{\partial u}, \frac{\partial \varrho}{\partial v}$ nicht identisch verschwindet, so kann man mit leichten Rechnungen letztere Gleichung mittels [1,3], und [1,28] in die Form

$$[1,30] \qquad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u\,\partial v} + \frac{\partial a}{\partial u} + \frac{\partial b}{\partial v} + \sqrt{eg}\,(1 + \cos\omega) = 0$$

bringen.

Aus den obigen Ausführungen folgt, dass die Bedingungen [1,1], [1,4] und [1,14], denen die Grössen e, g, ω, ϱ genügen müssen, damit die Brennflächenmäntel des betrachteten Strahlensystems durch die Systemstrahlen konform aufeinander bezogen werden, durch die

$$a\sqrt{e} - b\sqrt{g} = o$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial u}\frac{\partial \varphi}{\partial v} + a\frac{\partial \varphi}{\partial u} + b\frac{\partial \varphi}{\partial v} = \sqrt{eg}$$

$$[1,31] \qquad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial u \partial v} = -\left[\frac{\partial a}{\partial u} + \frac{\partial b}{\partial v} + \sqrt{eg} + A\cos\omega\right]$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial u \partial v} = -\left[\frac{\partial a}{\partial u} + \frac{\partial b}{\partial v} + \sqrt{eg}\,(1 + \cos\omega)\right]$$

ersetzt werden können, wobei $\varphi = \log\varrho$, $\Phi = \log\operatorname{tg}\frac{\omega}{2}$ sind und a, b, A sich aus [1,2], [1,3], [1,20] und [1,21] als Funktionen von e, g, ω und ihren Ableitungen nach u, v ausdrücken.

Dabei erhält man aus [1,5], [1,6], [1,7] und [1,8] mit Rücksicht auf [1,19], [1,26] und [1,31] für die Krümmungsmasse K_1, K_2 und die mittleren Krümmungen H_1, H_2 der Brennflächenmäntel der zu unserer Aufgabe zugehörigen Strahlensysteme

$$[1,32] \qquad K_1 = -\frac{\sin^2\omega}{4\varrho^2}\sqrt{\frac{e}{g}}\,\frac{\frac{\partial\Phi}{\partial v}+a}{\frac{\partial\Phi}{\partial u}+b}, \quad K_2 = -\frac{\sin^2\omega}{4\varrho^2}\sqrt{\frac{g}{e}}\,\frac{\frac{\partial\Phi}{\partial u}+b}{\frac{\partial\Phi}{\partial v}+a}$$

und

$$[1,33] \qquad H_1 = \frac{\sin\omega}{2\varrho\sqrt{g}}\,\frac{\partial(\varphi-\Phi)}{\partial v}, \quad H_2 = \frac{\sin\omega}{2\varrho\sqrt{e}}\,\frac{\partial(\varphi-\Phi)}{\partial u}.$$

2. Wir werden nun mit Hilfe der in § 1 aufgestellten Bedingungen die Strahlensysteme (ω) nntersuchen, deren Brennflächenmäntel durch die Systemstrahlen konform aufeinander bezogen sind.

Wählt man die abwickelbaren Flächen eines Strahlensystems (ω) als Parameterflächen u, v, so wird der Winkel ihrer sphärischen Bilder auf der Bildkugel

$$[2,1] \qquad \omega \equiv 2\alpha = \text{konst.}$$

wobei

$$[2,2] \qquad \pi > 2\alpha > 0$$

ist, und somit nehmen in diesem Falle die Bedingungen [1,31] die Gestalt

$$[2,3] \qquad \begin{aligned} & a\sqrt{e} - b\sqrt{g} = 0, && \frac{\partial a}{\partial u} + \frac{\partial b}{\partial v} + \sqrt{eg} = 0, \\ & \frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial\varphi}{\partial v} + a\frac{\partial\varphi}{\partial u} + b\frac{\partial\varphi}{\partial v} = \sqrt{eg}, && \frac{\partial^2\varphi}{\partial u\,\partial v} = -\cos 2\alpha\sqrt{eg}. \end{aligned}$$

an, da nach [1,21] und [2,1]

$$[2,4] \qquad A \equiv 0$$

ist.

Dabei gilt nach [1,25] und [2,1]

$$[2,5] \qquad k_{g_u} + k_{g_v} = 0.$$

Führt man nun auf der Bildkugel ein geographisches Koordinatensystem $\{u_1, v_1\}$ ein, wobei die Kurven $u_1 =$ konst. $v_1 =$ konst. die Parallelkreise bzw. die Meridiane des Systems sind, so erhält bekanntlieh das Linienelement der Kugel die Form

$$[2,6] \qquad ds^2 = du_1{}^2 + dv_1{}^2\sin^2 u_1.$$

Bedeutet ferner ϑ den Winkel, welchen eine Kurve c der Bildkugel mit den Meridianen $v_1 = \text{konst.}$ bildet, so gilt für die geodätische Krümmung k_g dieser Kurve die bekannte Formel

$$[2,7] \qquad k_g = \frac{d\vartheta}{ds} + k_{g_{u_1}} \cos\vartheta + k_{g_{v_1}} \sin\vartheta,$$

wobei $k_{g_{u_1}}$, $k_{g_{v_1}}$ die geodätischen Krümmungen der Parameterkurven $v_1 = \text{konst.}$ $u_1 = \text{konst.}$ darstellen.

Es ist aber

$$[2,8] \qquad k_{g_{u_1}} \equiv 0, \quad k_{g_{v_1}} = \frac{\cos u_1}{\sin u_1},$$

wie man leicht aus [2,6] erhält und wenn

$$[2,9] \qquad v_1 = v_1(u_1)$$

die Gleichung der Kurve c in Bezug auf das Parametersystem u_1, v_1 ist, so hat man aus [2,6]

$$[2,10] \qquad \frac{dv_1}{du_1} = \frac{\operatorname{tg}\vartheta}{\sin u_1}$$

und

$$[2,11] \qquad ds = du_1 \sqrt{1 + \left(\frac{dv_1}{du_1}\right)^2 \sin^2 u_1} = \frac{du_1}{\cos\vartheta}.$$

Somit erhält [2,7] die Gestalt

$$[2,12] \qquad k_g = \cos\vartheta \frac{d\vartheta}{du_1} + \sin\vartheta \frac{\cos u_1}{\sin u_1}.$$

Seien nun S_ϑ, $S_{\vartheta'}$ zwei Kurvenscharen der Bildkugel, welche die folgenden Eigenschaften besitzen:

Die durch denselben Punkt der Kugel hindurchgehenden Kurven der zwei Scharen den konstanten Winkel 2a bilden und entgegengesetzten geodätischen Krümmungen besitzen.

Wenn ϑ, ϑ' die Winkel, welche die Kurven der zwei Scharen mit den Meridianen $v_1 =$ konst. bilden und k_g, k'_g ihre geodätischen Krümmungen bedeuten, so wird nach der obigen Annahme

$$\vartheta' - \vartheta = 2\alpha, \qquad k_g + k'_g = 0$$

und daher mit Hilfe von [2,12]

$$\text{[2,13]} \qquad \cos\vartheta \frac{d\vartheta}{du_1} + \cos\vartheta' \frac{d\vartheta'}{du_1} = -(\sin\vartheta + \sin\vartheta')\frac{\cos u_1}{\sin u_1}.$$

Daraus folgt durch Integration

$$\text{[2,14]} \qquad \sin\vartheta + \sin\vartheta' = \frac{c_1}{\sin u_1},$$

wobei c_1 eine Integrationskonstante bedeutet.

Setzt man weiter

$$\text{[2,15]} \qquad \vartheta = \vartheta_1 - \alpha, \qquad \vartheta' = \vartheta_1 + \alpha,$$

so erhält man aus [2,14]

$$\text{[2,16]} \qquad \sin\vartheta_1 = \frac{c}{\sin u_1},$$

wobei $c = \dfrac{c_1}{2\cos\alpha}$ ist.

Berücksichtigt man nun, dass nach [2,3] der durch den Punkt (u_1, v_1) der Kugel hindurchgehende Parallelkreis $u_1 =$ konst. den Radius $R = \sin u_1$ besitzt, so erkennt man aus [2,16], dass die Kurve der Kugel, welche die Meridiane $v_1 =$ konst. unter dem Winkel ϑ_1 schneidet eine geodätische Linie ist [1]. Die jedem Werte von c in [2,16] entsprechenden Kurven, bilden also eine Schar von geodätischen Linien der Bildkugel, welche jeden Parallelkreis $u_1 =$ konst. unter demselben Winkel schneiden.

Es ergibt sich daher mit Rücksicht aus (2,5), dass *in unserer Aufgabe die Kurven, welche den Winkel* ω *der sphärischen Bilder der abwickelbaren Flächen der zugehörigen Strahlensysteme* (ω) *halbieren, geodätischen Linien der Bildkugel sind, welche einen Kreis der Kugel unter demselben Winkel schneiden:*

---

1. *L. Bianchi*, loc. cit. B. I_1, S. 305.

Die Differentialgleichungen der Kurvenscharen, welche die Meridiane $v_1 =$ konst. unter den Winkel $\vartheta = \vartheta_1 - \alpha$, $\vartheta' = \vartheta_1 + \alpha$ schneiden, sind nach (2,10) und (2,12)

$$\frac{dv_1}{du_1} = \frac{tg\,(\vartheta_1 - \alpha)}{\sin u_1} = \frac{1}{\sin u_1}\,\frac{c - tg\alpha\sqrt{\sin^2 u_1 - c^2}}{\sqrt{\sin^2 u_1 - c^2} + c.\, tg\alpha}$$

[2,17]

$$\frac{dv_1}{du_1} = \frac{tg\,(\vartheta_1 + \alpha)}{\sin u_1} = \frac{1}{\sin u_1}\,\frac{c + tg\alpha\sqrt{\sin^2 u_1 - c^2}}{\sqrt{\sin^2 u_1 - c^2} - c.\, tg\alpha}.$$

Setzt man nun

$$du = - dv_1 + \frac{du_1}{\sin u_1}\,\frac{c - tg\alpha\sqrt{\sin^2 u_1 - c^2}}{\sqrt{\sin^2 u_1 - c^2} + c.\, tg\alpha}$$

[2,18]

$$dv = \quad dv_1 - \frac{du_1}{\sin u_1}\,\frac{c + tg\alpha\sqrt{\sin^2 u_1 - c^2}}{\sqrt{\sin^2 u_1 - c^2} - c.\, tg\alpha}$$

and führt die Variablen u, v als Parameter auf der Kugel ein, so werden die Kurven der von den Differentialgleichungen [2,17] bestimmten Kurvenscharen, die Parameterkurven $u =$ konst. $v =$ konst. des neuen Parametersystems.

Aus [2,18] hat man auch

$$du_1 = \frac{c^2 - \cos^2\alpha\,\sin^2 u_1}{\sin 2\alpha\,\sin u_1}\,(du + dv)$$

[2,19]

$$dv_1 = -\frac{1}{2}(du - dv) - \frac{c\sqrt{\sin^2 u_1 - c^2}}{\sin 2\alpha\,\sin u_1}\,\Big(du + dv\Big)$$

und somit erhält das Linienelement [2,6] der Kugel die Form

[2,20] $$ds^2 = e\,du^2 + 2f\,du\,dv + g\,dv^2,$$

wobei

$$e = \frac{\cos^2\alpha \sin^2 u_1 - c^2 \cos 2\alpha}{\sin^2 2\alpha} + \frac{c\sqrt{\sin^2 u_1 - c^2}}{\sin 2\alpha},$$

[2,21] $$f = \frac{\cos^2\alpha \sin^2 u_1 - c^2}{\sin^2 2\alpha} \cos 2\alpha$$

$$g = \frac{\cos^2\alpha \ \sin^2 u_1 - c^2 \cos 2\alpha}{\sin^2 2\alpha} - \frac{c\sqrt{\sin^2 u_1 - c^2}}{\sin 2\alpha}$$

sind, wie sich aus [2,6] und [2,19] durch leichte Rechnungen ergibt.

Aus [2,21] erkeunt man, dass die Fundamentalgrössen e, f, g Funktionen der einzigen Variabel $p = u + v$ sind, da u_1 nach der ersten Gleichung [2,19] eine Funktion von p ist, welche der Differentialgleichung

[2,22] $$\frac{du_1}{dp} = \frac{c^2 - \cos^2\alpha \sin^2 u_1}{\sin 2\alpha \ \sin u_1}$$

genügt.

Ferner hat man aus [1,2] mit Rücksicht auf [2,21] uud [2,22]

[2,23] $$a \equiv \begin{Bmatrix} 12 \\ 1 \end{Bmatrix} = - \frac{\cos u_1 \left(\sqrt{\mathrm{siu}^2 u_1 - c^2} - c . \operatorname{tg} \alpha\right)}{2 \ \mathrm{siu}\ 2\alpha \sqrt{\sin^2 u_1 - c^2}},$$

$$b \equiv \begin{Bmatrix} 12 \\ 2 \end{Bmatrix} = - \frac{\cos u_1 \left(\sqrt{\sin^2 u_1 - c^2} + c . \operatorname{tg} \alpha\right)}{2 \sin 2\alpha \ \sqrt{\sin^2 u_1 - c^2}},$$

woraus man folgert, dass a, b ebenso wie ihre Ableitungen nach u, v Funktionen der einzigen Variabel $p = u + v$ sind.

Aus [2,21], [2,22] und [2,23] erkennt man leicht, dass die Grössen e, f, g Funktionen von u, v sind, welche den zwei ersten Gleichungen [2,3] genügen, während die vierte Gleichung [2,3] in Verbinduug mit [2,21] die Form

[2,24] $$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial u \, \partial v} = - \cos 2\alpha \ \frac{\cos^2\alpha \sin^2 n_1 - c^2}{\sin^2 2\alpha}$$

annimmt.

Berücksichtigt man ferner, dass u_1 eine Funktion von $p = u + v$ ist, und bezeichnet mit $\sigma(p)$ die allgemeine Lösung der gewönlichen Differentialgleichung

$$\frac{d^2\sigma}{dp^2} = -\cos 2\alpha \frac{\cos^2 \alpha \sin^2 u_1 - c^2}{\sin^2 2\alpha}, \tag{2,25}$$

so wird

$$\varphi = \sigma(p) + A(u) + B(v) \tag{2,26}$$

die allgemeine Lösung der Differentialgleichung [2,24], wobei A(u), B(v) willkürlichen Funktionen von u bzw. v sind.

In unserer Aufgabe müssen A (u), B (v) so gewählt werden, dass $\varphi(u, v)$ der dritten Gleichung [2,3] genügt, welche mit Rücksicht auf [2,26] die Form

$$\left(\frac{d\sigma}{dp} + \frac{dA}{du}\right)\left(\frac{d\sigma}{dp} + \frac{dB}{dv}\right) + (a+b)\frac{d\sigma}{dp} + a\frac{dA}{du} + b\frac{dB}{dv} = \sqrt{eg} \tag{2,27}$$

annimmt.

Die Differentialgleichung [2,25] lässt sich aber mittels [2,22] in der Form

$$\frac{d}{du_1}\left(\frac{d\sigma}{dp}\right) = \frac{\sin u_1}{\operatorname{tg} 2\alpha_1}$$

schreiben und daraus folgt durch Integration

$$\frac{d\sigma}{dp} = -\frac{\cos u_1}{\operatorname{tg} 2\alpha} + c_1, \tag{2,28}$$

wobei c_1 eine Integrationskonstante bedeutet. Da weiter nach [2,26]

$$\frac{d\sigma}{dp} = \frac{d\sigma}{du_1} \frac{c^2 - \cos^2\alpha \sin^2 u_1}{\sin 2\alpha \sin u_1} \tag{2,29}$$

ist, so folgt aus [2,28] mit Rücksicht auf [2,29]

$$\frac{d\sigma}{du_1} = \left[c_1 - \frac{\cos u_1}{\operatorname{tg} 2\alpha}\right]\left[\frac{\sin 2\alpha \sin u_1}{c^2 - \cos^2\alpha \sin^2 u_1}\right]$$

und daraus

$$[2,30]\qquad \sigma = \int \frac{\sin 2\alpha .\ \sin u_1}{c^2 - \cos^2 \alpha .\ \sin^2 u_1} \left[c_1 - \frac{\cos u_1}{\operatorname{tg} 2\alpha} \right] du_1 + c_2$$

wobei c_2 eine Konstante bedeutet und u_1 eine Funktion von $p = u + v$ ist, welche der Differentialgleichung [2,22] genügt.

Somit erhält die Gleichung (2,27) die Form

$$[2,31]\qquad \frac{dA}{du}\,\frac{dB}{dv} + \frac{dA}{du}\,k\,(u+v) + \frac{dB}{dv}\,l\,(u+v) + m\,(u+v) = 0,$$

wobei nach [2,21], [2,23] und [2,28]

$$k = -\cos u_1 \frac{1 + 2\cos 2\alpha}{2\sin 2\alpha} + \frac{c.\ \cos u_1}{4\cos^2 \alpha \sqrt{\sin^2 u_1 - c^2}} + c_1\ ,$$

$$[2,32]\ l = -\cos u_1 \frac{1 + 2\cos 2\alpha}{2\sin 2\alpha} - \frac{c.\ \cos u_1}{4\cos^2 \alpha \sqrt{\sin^2 u_1 - c^2}} + c_1\ ,$$

$$m = -\cos^2 u_1 \frac{(1 + 2\cos 2\alpha)(1 + \cos 2a)}{2\sin^2 2\alpha} - c_1 \cos u_1 \frac{1 + 2\cos 2\alpha}{\sin 2\alpha} + {} + c_1^2 - \frac{\cos^2 \alpha - c_1^2}{\sin^2 2\alpha}$$

sind.

Aus den obigen Ausführungen geht es hervor, dass die Aufgabe der Ermittelung der Strahlensysteme (ω), deren Brennflächenmäntel durch die Systemstrahlen konform aufeinander abgebildet sind, in die Aufgabe der Bestimmung der Funktionen A (u), B (v) übergeht, welche die Funktionalgleichung [2,31] befriedigen, nachdem natürlich die Bedingungen aufgestellt werden, welche die Koeffizienten k, l, m erfüllen müssen, damit diese Gleichung Lösungen besitzt.

Zunächst bemerken wir, dass wenn die eine der Funktionen A (u), B (v), welche eventuell [2,31] befriedigen, eine lineare Funktion ihres Arguments wird, auch die andere linear sein muss.

Wird nämlich z. B. $\frac{dA}{du} \equiv$ konst. so folgt aus [2,31]

$$\frac{dB}{dv} = -\frac{\frac{dA}{du}k + m}{\frac{dA}{du} + l}$$

und daraus mit Rücksicht auf die Tatsache, dass k, l, m Funktionen von $u + v$ sind, dass auch $\frac{dB}{dv}$ konstant sein muss.

Durch Differentiation von [2,31] nach u bzw. v und Elimination von $\frac{dA}{du}$ bzw. $\frac{dB}{dv}$ zwischen [2,31] und je einer der Gleichungen, welche die Differentiation liefert, ergibt sich, dass die Funktionen A (u), B (v), welche die Funktionalgleichung [2,31] befriedigen, auch den Gleichungeu

[2,33]

$$\frac{d^2B}{dv^2}(kl-m) + \left(\frac{dB}{dv}\right)^2\frac{dl}{dp} + \frac{dB}{dv}\left(\frac{dm}{dp} + \frac{dl}{dp}k - \frac{dk}{dp}l\right) + k\frac{dm}{dp} - m\frac{dk}{dp} = 0$$

$$\frac{d^2A}{du^2}(kl-m) + \left(\frac{dA}{du}\right)^2\frac{dk}{dp} + \frac{dA}{du}\left(\frac{dm}{dp} + \frac{dk}{dp}l - \frac{dl}{dp}k\right) + l\frac{dm}{dp} - m\frac{dl}{dp} = 0$$

genügen müssen, wobei $p = u + v$ ist.

Wenn nun

$$kl - m \equiv 0$$

ist, so gehen die Gleichungen [2,33] in die

[2,34] $$\left(\frac{dB}{dv}\right)^2 r + \frac{dB}{dv}s + t = 0, \left(\frac{dA}{du}\right)^2 r' + \frac{dA}{du}s' + t' = 0$$

über, wobei

$$[2,35]\qquad \begin{aligned} r &= \frac{dl}{dp}, \quad s = \frac{dm}{dp} + \frac{dl}{dp}k - l\frac{dk}{dp}, \quad t = k\frac{dm}{dp} - m\frac{dk}{dp} \\ r' &= \frac{dk}{dp}, \quad s' = \frac{dm}{dp} + \frac{dk}{dp}l - k\frac{dl}{dp}, \quad t' = l\frac{dm}{dp} - m\frac{dl}{dp} \end{aligned}$$

sind und wenn

$$r = s = t \equiv 0$$

ist, so folgt aus den zwei ersten Gleichungen [2,35]

$$[2,36]\qquad l = \alpha, \quad \frac{dm}{dp} = \alpha\frac{dk}{dp},$$

wobei α eine Konstante bedeutet und somit lautet die zweite Gleichung [2,34]

$$\frac{dk}{dp}\left[\left(\frac{dA}{du}\right)^2 + 2\alpha\frac{dA}{du} + \alpha^2\right] = 0.$$

Daraus aber folgt, dass entweder:

$$\frac{dk}{dp} \equiv 0 \quad \text{oder} \quad \left(\frac{dA}{du}\right)^2 + 2\alpha\frac{dA}{du} + \alpha^2 = 0$$

sein muss. Im ersten Falle ergibt sich aus [2,36], dass auch $\frac{dm}{dp} \equiv 0$ sein muss und somit aus [2,31] mit Rücksicht auf [2,36], dass $\frac{dA}{du}, \frac{dB}{dv}$ konstant sein müssen. Im zweiten Falle wird $\frac{dA}{du} = -\alpha$ und daher, nach der obigen Bemerkung, $\frac{dB}{dv} = \text{konst.}$

Wenn auch r, s, t Konstanten sind, welche nicht sämtlich verschwinden, so folgt aus der ersten Gleichung [2,34], dass $\frac{dB}{dv}$ konstant sein muss und daher, dass auch $\frac{dA}{du}$ konstant sein muss.

Wenn schliesslich mindestens eine der Ableitungen $\frac{dr}{dp}, \frac{ds}{dp}, \frac{dt}{dp}$ von Null verschieden ist, so folgert man durch zweimalige Differentiation der ersten Gleichung [2,34] nach u, dass die Koeffizienten r, s, t Funktionen von $p = u + v$ sind, welche der Differentialgleichung

$$\begin{vmatrix} \frac{d^2r}{dp^2} & \frac{d^2s}{dp^2} & \frac{d^2t}{dp^2} \\ \frac{dr}{dp} & \frac{ds}{dp} & \frac{dt}{dp} \\ r & s & t \end{vmatrix} = 0$$

genügen müssen und daraus, dass zwischen r, s, t eine Relation von der Form

$$\alpha r + \beta s + \gamma t \equiv 0$$

mit konstanten Koeffizienten bestehen muss.

Daraus aber in Verbindung mit der ersten Gleichung [2,34] ergibt sich $\frac{dB}{dv} \equiv$ konst. und somit nach der obigen Bemerkung $\frac{dA}{du} \equiv$ konst.

Ist hingegen

$$kl - m \not\equiv 0,$$

so lassen sich die Gleichungen [2,33] in der Form

$$\text{[2,37]} \qquad \frac{d^2B}{dv^2} = \varkappa \left(\frac{dB}{dv}\right)^2 + \lambda \frac{dB}{dv} + \mu, \quad \frac{d^2A}{du^2} = \varkappa' \left(\frac{dA}{du}\right)^2 + \lambda' \frac{dA}{du} + \mu'$$

schreiben, wobei

$$\text{[2,38]} \qquad \begin{aligned} \varkappa &= -\frac{\frac{dl}{dp}}{kl - m}, \quad \lambda = -\frac{\frac{dm}{dp} + k\frac{dl}{dp} - l\frac{dk}{dp}}{kl - m}, \quad \mu = -\frac{k\frac{dm}{dp} - m\frac{dk}{dp}}{kl - m}, \\ \varkappa' &= -\frac{\frac{dk}{dp}}{kl - m}, \quad \lambda' = -\frac{\frac{dm}{dp} + l\frac{dk}{dp} - k\frac{dl}{dp}}{kl - m}, \quad \mu' = -\frac{l\frac{dm}{dp} - m\frac{dl}{dp}}{kl - m} \end{aligned}$$

sind und, wenn nicht alle drei Koeffizienten $\varkappa, \lambda, \mu$ konstant sind, so folgt durch Differentiation der ersten Gleichung [2,37] nach u und Anwendung des im vorigen Falle Verfahrens $\frac{dB}{dv} =$ konst. und somit auch $\frac{dA}{du} =$ konst.

Aus den obigen Ausführungen folgt, dass die Funktionalgleichung [2,31] nur dann nicht-linearen Lösungen besitzen kann, wenn $kl - m \neq 0$ ist und

[2,39] $$\varkappa = c_1,\ \lambda = c_2,\ \mu = c_3\ ; \quad \varkappa' = c_1',\ \lambda' = c_2',\ \mu' = c_3'$$

sind, wobei c_1, c_2, c_3 und c_1', c_2' c_3' Konstanten sind, von denen mindestens Eine in je einem Trippel von Null verschieden ist.

Aus [2,39] in Verbindung mit [2,38] ergibt sich aber, dass in diesem Falle k, l, m Funktionen von $p = u + v$ sind, welche den Differentialgleichungen

[2,40] $$\frac{dk}{dp} = c\,(kl - m),\ \frac{dl}{dp} = c'\,(kl - m),\ \frac{dm}{dp} = c''(kl - m)$$

genügen, wobei c, c', c'' Konstanten sind.

Daraus ergibt sich, Falls $c \neq 0$ ist, dass zwischen k, l, m zwei Relationen von der Form

[2,41] $$l = \alpha k + \beta, \quad m = \gamma k + \delta$$

mit konstanten Koeffizienten bestehen müssen, während k der Differentialgleichung

[2,42] $$\frac{dk}{dp} = c\,[\,k\,(\alpha k + \beta) - \gamma k - \delta\,]$$

genügt; Falls $c = 0$, $c' \neq 0$ sind, dass

[2,43] $$k = \alpha = \text{konst.}\ \ m = \gamma l + \delta$$

sind, während l der Differentialgleichung

[2,44] $$\frac{dl}{dp} = c'\,[\,(\alpha - \gamma)\,l - \delta\,]$$

genügt und schliesslich, Falls $c = c' = 0$ und $c'' \neq 0$ sind, dass

[2,45] $$k = \alpha = \text{konst.}\ \ l = \beta = \text{konst.}$$

sind, während m der Differentialgleichung

[2,46] $$\frac{dm}{dp} = c''\,[\,\alpha\beta - m\,]$$

genügt.

Wenn umgekehrt k, l, m Funktionen von $p = u + v$ sind, welche den Differentialgleichungen [2,40] genügen, in denen mindestens Eine der Konstanten c, c', c'' von Null verschieden ist, so sind, wie man ohne Schwierigkeit aus [2,40] und [2,38] folgert, auch $\varkappa, \lambda, \mu; \varkappa', \lambda', \mu'$ Konstanten, von denen mindestens Eine in je einer Gruppe von Null verschieden wird.

Man erhält so den Satz:

Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür dass die Funktionalgleichung [2,31] *nicht-lineare Lösungen besitzt, ist dass die Koeffizienten k, l, m Funktionen von $p = u + v$ sind, welche den Differentialgleichungen* [2,40] *genügen, in denen c, c', c'' nicht sämtlich verschwindenden Konstanten bedeuten.*

In unserer Aufgabe sind die Koeffizienten k, l, m in [2,31] aus [2,32] definiert und, wenn

$$k = \text{konst.}\ l = \text{konst.}$$

sind, so folgt aus [2,32], dass

$$1 + 2 \cos 2\alpha = 0$$

und entweder $c = 0$ oder $c = \pm 1$ sein müssen. Daraus aber in Verbindung mit der dritten Gleichung [2,32] ergibt sich, dass auch

$$m \equiv c_1^2 - \frac{\cos^2\alpha - c^2}{\sin^2 2\alpha} \equiv \text{konst.}$$

ist und somit aus [2,31], dass $\frac{dA}{du}, \frac{dB}{dv}$ konstant sein müssen.

Wenn nicht beide Koeffizienten k, l konstant sind, so müssen nach der obigen Ausführungen zwischen k, l, m zwei Relationen entweder von der Form [2,41] oder von der Form [2,43] bestehen, damit [2,31] nicht lineare Lösungen besitzt.

Die zweite Relation [2,41] erhält hier in Verbindung mit [2,32] die Form

$$-\cos^2 u_1 \frac{(1 + 2\cos 2\alpha)\ (1 + \cos 2\alpha)}{2 \sin^2 2\alpha} - \cos u_1 . c_1 \frac{1 + 2\cos 2\alpha}{\sin 2\alpha} + c_1^2 -$$

$$-\frac{\cos^2\alpha - c^2}{\sin^2 2\alpha} = \gamma \left[-\cos u_1 \frac{1 + 2\cos 2\alpha}{2 \sin 2\alpha} + \frac{c. \cos u_1}{4 \cos^2\alpha \sqrt{\sin^2 u_1 - c^2}} + c_1 \right] + \delta$$

und die zweite Relation [2,43] wird

$$-\cos^3 u_1 \frac{(1+2\cos 2\alpha)\,(1+\cos 2\alpha)}{2\sin^2 2\alpha} - \cos u_1 . c_1 \frac{1+2\cos 2\alpha}{\sin 2\alpha} +$$

$$+ c_1{}^2 - \frac{\cos^2\alpha - c^2}{\sin^2 2\alpha} = \gamma\left[-\cos u_1 \frac{1+2\cos 2\alpha}{2\sin 2\alpha} -\right.$$

$$\left. - \frac{c.\cos u_1}{4\cos^2\alpha\sqrt{\sin^2 u_1 - c^2}} + c_1\right] + \delta.$$

Hieraus aber folgt, dass in beiden Fällen eine Identität von der Form

$$(1 - c^2 - \cos^2 u_1).\left[-\cos^2 u_1 \frac{(1+2\cos 2\alpha)\,(1+\cos 2\alpha)}{2\sin^2 2\alpha} -\right.$$

[2,46′]
$$-\cos u_1 . (2c - \gamma)\frac{1+2\cos 2\alpha}{2\sin 2\alpha} + c_1{}^2 - c\gamma - \delta -$$

$$\left. - \frac{\cos^2\alpha - c^2}{\sin^2 2\alpha}\right]^2 - \frac{\gamma^2 c^2 \cos^2 u_1}{16\cos^4\alpha} \equiv 0$$

existieren muss.

Da nun die linke Seite von [2,46′] ein Polynom von $\cos u_1$ mit konstanten Koeffizienten ist, so müssen diese Koeffizienten sämtlich verschwinden, damit diese Gleichung eine Identität sei. Der Koeffizient von $\cos^6 u_1$ in [2,46′] ist aber $-\dfrac{(1+2\cos 2\alpha)^2\,(1+\cos 2\alpha)^2}{4\sin^4 2\alpha}$ und da nach [2,2] $1+\cos 2\alpha \not\equiv 0$ ist, so muss

[2,47]
$$1 + 2\cos 2\alpha = 0$$

sein und daher

[2,48]
$$\sin 2\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2},\ \operatorname{tg} 2\alpha = -\sqrt{3},\ \cos\alpha = \frac{1}{2},\ \sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2},\ \operatorname{tg}\alpha = \sqrt{3}.$$

Somit erhält man aus [2,32]

[2,49]
$$k = c_1 + \frac{c.\cos u_1}{\sqrt{\sin^2 u_1 - c^2}},\ l = c_1 - \frac{c.\cos u_1}{\sqrt{\sin^2 u_1 - c^2}},\ m = c_1{}^2 - \frac{1-4c^2}{3}$$

und die Gleichung [2,31] geht in die

$$[2,50] \quad \frac{dA}{du}\frac{dB}{dv} + \frac{dA}{du}\left(c_1 + \frac{c.\cos u_1}{\sqrt{\sin^2 u_1 - c^2}}\right) + \frac{dB}{dv}\left(c_1 - \frac{c.\cos u_1}{\sqrt{\sin^2 u_1 - c^2}}\right) +$$

$$+ c_1^2 - \frac{1 - 4c^2}{3} = 0$$

über.

Aus [2,49] ergibt sich nun

$$l \equiv k - 2c_1, \quad m = \text{konst.}$$

und nach der vorigen Diskussion kann die Funktionalgleichung [2,50] nur dann nicht-lineare Lösungen besitzen, wenn k eine Funktion von $p = u + v$ ist, welche der Differentialgleichung

$$[2,51] \qquad \frac{dk}{dp} = \alpha\left[-k^2 + 2c_1 k - m\right]$$

genügt, wobei α eine Konstante bedeutet.

Aus [2,49] in Verbindung mit [2,22] und [2,47] erhält man aber

$$\frac{dk}{dp} = \frac{dk}{du_1}\frac{du_1}{dp} = \frac{c(c^2 - 1)(4c^2 - 1 + \cos^2 u_1)}{2\sqrt{3}\,(1 - c^2 - \cos^2 u_1)\sqrt{1 - c^2 - \cos^2 u_1}}$$

uud damit k der Differentialgleichung [2,51] genügt, muss

$$(c^2 - 1)^2\left[\frac{\alpha^2(1 - c^2 - \cos^2 u_1)}{3} - \frac{c^2}{4}\right] \equiv 0$$

sein. Daraus aber folgt entweder $c = \pm 1$, oder $\alpha = 0$, $c = 0$. In beiden Fällen sind k, l konstant und, da nach [2,49] m auch konstant ist, so erhält man aus [2,50] dass $\frac{dA}{du}$, $\frac{dB}{dv}$ konstant sind.

In unserer Aufgabe kann also die Funktionalgleichung [2,31] *nur lineare Lösungen besitzen.*

Falls nnn zwei lineare Funktionen von u bzw. v:

$$A(u) \equiv A_1 u + A_2, \qquad B(v) \equiv B_1 v + B_2$$

mit konstanten Koeffizienten existieren, welche der Funktionalgleichung [2,31] genügen, so besteht zwischen k, l, m die lineare Relation

$$[2,52] \qquad A_1 B_1 + A_1 k + B_1 l + m = 0.$$

Eine solche Relation zwischen k, l, m kann aber, wie man leicht erkennt, nur dann existieren, wenn $1 + 2 \cos 2\alpha = 0$ ist. In diesem Falle nimmt die Relation [2,52] die Form

$$[2,53] \quad A_1 B_1 + A_1 \left(c_1 + \frac{c.\cos u_1}{\sqrt{\sin^2 u_1 - c^2}}\right) + B_1 \left(c_1 - \frac{c.\cos u_1}{\sqrt{\sin^2 u_1 - c^2}}\right) + \\ + c_1^2 - \frac{1 - 4c^2}{3} = 0$$

an.

Zudem gilt ersichtlich

$$[2,54] \quad c_1 - \frac{c.\cos u_1}{\sqrt{\sin^2 u_1 - c^2}} = -\left(c_1 + \frac{c.\cos u_1}{\sqrt{\sin^2 u_1 - c^2}}\right) + 2c_1$$

und daraus in Verbindung mit [2,53] erkennt man, dass entweder

$$[2,55] \quad A_1 = B_1 = -c_1 \pm \sqrt{\frac{1 - 4c^2}{3}}$$

oder

$$c_1 + \frac{c.\cos u_1}{\sqrt{\sin^2 u_1 - c^2}} \equiv \text{koust.} \qquad c_1 - \frac{c.\cos u_1}{\sqrt{\sin^2 u_1 - c^2}} \equiv \text{konst.}$$

sein müssen.

Im letzteren Falle muss entweder

$$[2,56] \quad c = 0$$

oder

$$[2,57] \quad c = \pm 1$$

sein.

Falls aber $c = \pm 1$ ist, so hat man aus [2,21], [2,22] und [2,48]

$$e = \frac{\sin^2 u_1 + 2}{3} \pm i \frac{2 \cos u_1}{\sqrt{3}}, \ f = -\frac{\sin^2 u_1 - 4}{6},$$

$$g = \frac{\sin^2 u_1 + 2}{3} \mp i \frac{2 \cos u_1}{\sqrt{3}},$$

$$a = \mp i - \frac{\cos u_1}{\sqrt{3}}, \ b = \pm i - \frac{\cos u_1}{\sqrt{3}}$$

und daraus

$$a^2 + g \equiv 0, \qquad b^2 + e \equiv 0,$$

was nach [1,5], [1,6] und [1,9] ausgeschlossen ist.

Es bleiben also nur die zwei ersten Fälle zu untersuchen:

I. $c = 0$.

In diesem Falle werden nach [2,16] die geodätischen Linien der Bildkugel, welche den Winkel $\omega \equiv 2\,\alpha = \frac{2\pi}{3}$ der Bildkurven der abwickelbaren Flächen der zugehörigen Strahlensysteme halbieren, die Meridiane $v_1 =$ konst. Weiter hat man aus [2,21] und [2,23] mit Rücksicht auf [2,48] und [2,56]

[2,58] $$e = g = \frac{\sin^2 u_1}{3}, \ f = -\frac{\sin^2 u_1}{6}$$

[2,59] $$a = b = -\frac{\cos u_1}{\sqrt{3}}$$

und die Gleichung [2,22] geht in die

[2,60] $$\frac{du_1}{dp} = -\frac{\sin u_1}{2\sqrt{3}}$$

über. Woraus man folgert

[2,61] $$\operatorname{tg}\frac{u_1}{2} = c_2\, e^{-\frac{P}{2\sqrt{3}}} = c_2\, e^{-\frac{u+v}{2\sqrt{3}}}$$

wobei c_2 eine Integrationskonstante bedeutet.

Schliesslich erhält man aus [2,30] in Verbindung mit [2,47], [2,56] und [2,61]

$$\sigma = \log \frac{c'' e^{c_1 (u+v)}}{\sin^2 u_1}$$

und somit aus [2,26] und [1,28] mit Rücksicht auf die Tatsache, dass hier A (u), B (v) in [2,26] lineare Funktionen von u bzw. v sind,

$$[2,62] \qquad \varrho = \frac{c'' e^{(c_1 + A_1) u} \cdot e^{(c_1 + B_1) v}}{\sin^2 u_1},$$

wobei u_1 aus [2,61] zu bestimmen ist und c'', c_1, A_1, B_1 Konstanten sind, von denen die drei letzteren nach [2,53] und [2,56] die Relation

$$[2,63] \qquad (c_1 + A_1)\,(c_1 + B_1) = \frac{1}{3}$$

erfüllen müssen.

Für die Fundamentalgrössen erster Ordnung der Brennflächenmäntel der zugehörigen Strahlensysteme erhält man aus [1,5] und [1,6] in Verbindung mit [2,58] und [2,59] die Werte

$$[2,64] \qquad \begin{aligned} E_1 &= 4\varrho^2 (c_1 + A_1)^2, & F_1 &= \frac{4\varrho^2}{\sqrt{3}} (c_1 + A_1) \cos u_1, & G_1 &= \frac{4\varrho^2}{3} \\ E_2 &= \frac{4\varrho^2}{3}, & F_2 &= \frac{4\varrho^2}{\sqrt{3}} (c_1 + B_1) \cos u_1, & G_2 &= 4\varrho^2 (c_1 + B_1)^2, \end{aligned}$$

woraus man mit Rücksicht auf [2,63] erkennt, dass

$$E_1 : F_1 : G_1 = E_2 : F_2 : G_2$$

ist.

II. $A_1 = B_1 = - c_1 \pm \sqrt{\frac{1 - 4c^2}{3}}$.

In diesem Falle hat man aus [2,21], [2,23] und [2,52]

$$[2,65] \qquad \begin{aligned} e &= \frac{\sin^2 u_1 - 2c^2}{3} + \frac{2c\sqrt{\sin^2 u_1 - c^2}}{\sqrt{3}}, \quad f = - \frac{\sin^2 u_1 - 4c^2}{6}, \\ g &= \frac{\sin^2 u_1 - 2c^2}{3} - \frac{2c\sqrt{\sin^2 u_1 - c^2}}{\sqrt{3}}, \end{aligned}$$

und

$$[2,66] \qquad \begin{aligned} a &= -\frac{\cos u_1 \left[\sqrt{\sin^2 u_1 - c^2} - c\sqrt{3}\right]}{\sqrt{3}\;\sqrt{\sin^2 u_1 - c^2}}, \\ b &= -\frac{\cos u_1 \left[\sqrt{\sin^2 u_1 - c^2} + c\sqrt{3}\right]}{\sqrt{3}\;\sqrt{\sin^2 u_1 - c^2}} \end{aligned}$$

während [2,22] die Form

$$[2,67] \qquad \frac{du_1}{dp} = \frac{4\,c^2 - \sin^2 u_1}{2\sqrt{3}\;\sin u_1}$$

erhält.

Ferner erhält man aus [2,26] und [1,28] mit Berücksichtigung der Tatsache, dass hier $A(u) \equiv A_1 u + A_2$, $B(v) \equiv B_1 v + B_2$ sind,

$$[2,68] \qquad \varrho = c' e^{A_1 u + B_1 v} \,.\, e^{\int \frac{2 \sin u_1 \left[\cos u_1 + c_1 \sqrt{3}\right]}{4\,c^2 - \sin^2 u_1} du_1}$$

wobei u_1 aus [2,67] als Funktion von $p = u + v$ zu bestimmen ist und c', c_1, A_1, B_1, c Konstanten sind, von denen die vier letzteren die Beziehungen

$$A_1 = B_1 = -c_1 \pm \sqrt{\frac{1 - 4\,c^2}{3}}$$

erfüllen müssen.

Daraus aber folgt, dass ϱ eine Funktion von $p = u + v$:

$$[2,69] \qquad \varrho = c' e^{A_1 (u + v)} \,.\, e^{\int \frac{2 \sin u_1 \left[\cos u_1 + c_1 \sqrt{3}\right]}{4\,c_2 - \mathrm{siu}^2 u_1} du_1}$$

ist.

Die Formeln [2,65], [2,66], [2,67] und [2,69] gestatten nun die Fundamentalgrössen erster und zweiter Ordnung der Brennflächenmäntel der zugehörigen Strahlensysteme als Funktionen von $p = u + v$ zu berechnen und somit zu erkennen, dass die Krümmungsmasse ebenso wie die mittleren Krümmungen beider Mäntel auch Funktionen von $p = u + v$ sind.

Daraus aber folgt, dass *beide Mäntel der Brennfläche eines solchen Strahlensystems W-Flächen sind.*

Wenn insbesondere die durch die Geraden eines solchen Strahlensystems vermittelte Abbildung beider Mäntel seiner Brennfläche aufeinander eine *Isometrie* ist, so werdeu, bekanutlich, die Krümmungsmasse beider Mäntel in entsprechenden Punkten eiuander gleich.

Danu findet man aus [1,32] iu Verbindung mit [2,3] und [1,31]

[2,70]
$$\sqrt{g}\,\frac{\partial\varphi}{\partial u}=\sqrt{e}\,\frac{\partial\varphi}{\partial v}.$$

Da nun, nach [2,69] $\varphi\equiv\log\varrho\equiv\varphi\,(u+v)$ ist, so folgt aus [2,70]

$$e=g$$

und daraus nach [2,65]

[2,71]
$$c=0.$$

Somit erhält man aus [2,21] und [2,64]

$$E_1=E_2=\frac{4\varrho^2}{3},\quad F_1=F_2=\pm\frac{4\varrho^2}{3}\cos u_1,\; G_1=G_2=\frac{4\varrho^2}{3}$$

und

$$\varrho=\frac{c''\,e^{\pm\frac{u+v}{2\sqrt{3}}}}{\sin^2 u_1},$$

da hier nach [2,71] und [2,55]

$$A_1=B_1=-c_1\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$$

ist.

Daraus folgt mit Rücksicht auf [1,32], [1,33] und [2,3] für die Krümmungsmasse und die mittlere Krümmungen der Brennflächenmäntel der zugehörigen Strahlensysteme

$$K_1=K_2=\pm\frac{3}{16\varrho^2}\cos u_1,\qquad H_1=H_2=\frac{\sqrt{3}}{4\varrho\sin u_1}(\cos u_1\pm1).$$

Beide Mäntel der Brennflächenmäntel der zugehörigen Strahlensysteme haben also in entsprechenden Punkten dasselbe Krümmungsmass und dieselbe mittlere Krümmung.

Die obigen Ausführungen gestatten nun folgenden Satz zu formulieren:

«Wenn die Brennflächenmäntel eines Strahlensystems (ω) durch die Systemstrahlen konform aufeinander abgebildet sind, so wird der Winkel ω der durch jede Gerade des Strahlensystems durchgeheuden Brennebenen $\frac{2\pi}{3}$ gleich.

Die Strahlensysteme (ω), deren Brennflächenmäntel durch die Systemstrahlen konform aufeinander bezogen sind, lassen sich in zwei Klassen einteilen.

Die sphärischen Bilder der abwickelbaren Flächen der in der einen Klasse zugehörigen Strahlensysteme bilden zwei Scharen von Loxodromien, welche die Meridiane desselben Schares der Bildkugel nnter den Winkel $-\frac{\pi}{3}$ bzw. $\frac{\pi}{3}$ schneiden.

Die Brennflächenmäntel der in der anderen Klasse zugehörigen Strahlensysteme sind W-Flächen, welche durch die Systemstrahlen konform aufeinander abgebildet sind.

Wird insbesondere die Abbildung eine Isometrie, so sind beide Brennflächenmäntel der zugehörigen Strahlensysteme (ω) W-Flächen, deren Hauptkrümmungsradien dieselbe Relation erfüllen».

3. Wir werden schliesslich die im § 1 aufgestellten Bedingungen zur Untersuchung der unseren Aufgabe zugehörigen W-Strahlensysteme benutzen.

In einem W-Strahlensysteme entsprechen, bekanntlich, bei der durch die Systemstrahlen vermittelte Abbildung ihrer Brennflächenmäntel aufeinander, die Asymptotenlinien der beiden Mäntel, so dass, wenn L_1, M_1, N_1 und L_2, M_2, N_2 die Fundamentalgrössen zweiter Ordnung in entsprechenden Punkten der zwei Mäntel sind, nach [1,6] und [1,8] $M_1 \equiv M_2 \equiv 0$ wird, während zwischen L_1, N_1 und L_2, N_2 die Beziehung

$$L_1 N_2 - L_2 N_1 \equiv 0 \tag{3,1}$$

besteht.

Wird nun die durch die Systemstrahlen vermittelte Abbildung der zwei Mäntel aufeinander konform, so nimmt [3,1] mit Hilfe von [1,6], [1,8] und [1,31] die Form

$$[3,2] \qquad \left[\frac{\partial \Phi}{\partial u} + b\right]\left[\frac{\partial \Phi}{\partial v} + a\right] - \left[\frac{\partial \varphi}{\partial u} + b\right]\left[\frac{\partial \varphi}{\partial v} + a\right] = 0$$

an, woraus man mittels [1,31] und [1,21]

$$[3,3] \qquad A = \sqrt{eg}$$

erhält.

Somit ergibt sich aber aus den zwei letzteren Gleichungen [1,31]

$$[3,4] \qquad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial u \partial v} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u \partial v}$$

und daraus folgt, dass

$$[3,5] \qquad \varphi = \Phi\,(u, v) + A\,(u) + B\,(v)$$

sein muss, wobei A (u), B (v) Funktionen von u bzw. v sind und Φ eine Funktion von u, v ist, welche mit e, g den Differentialgleichungen

$$[3,6] \qquad \begin{aligned} & a\sqrt{g} - b\sqrt{e} = 0, \quad \begin{Bmatrix} 11 \\ 2 \end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} 22 \\ 1 \end{Bmatrix} - ab = \sqrt{eg} \\ & \frac{\partial^2 \Phi}{\partial u \partial v} = -\left[\frac{\partial a}{\partial u} + \frac{\partial b}{\partial v} + \sqrt{eg}\,(1 + \cos \omega)\right] \end{aligned}$$

genügt. Letztere Gleichungen, in denen nach [1,19] $\Phi = \log \operatorname{tg} \frac{\omega}{2}$ ist, ergeben sich aus [1,31] mit Rücksicht auf [3,2] und [3,3].

In unserer Aufgabe muss φ (u, v) auch der dritten Gleichung [1,31] genügen, welche hier nach [3,5] die Form

$$\left(\frac{\partial \Phi}{\partial u} + \frac{dA}{du}\right)\left(\frac{\partial \Phi}{\partial v} + \frac{dB}{dv}\right) + a\left(\frac{\partial \Phi}{\partial u} + \frac{dA}{du}\right) + b\left(\frac{\partial \Phi}{\partial v} + \frac{dB}{dv}\right) = \sqrt{eg}$$

annimmt und mit Hilfe von [3,3] und [1,21] in die

$$[3,7] \qquad \frac{dA}{du}\frac{dB}{dv} + \frac{dA}{du}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial v} + a\right) + \frac{dB}{dv}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial u} + b\right) = 0$$

übergeht.

Daraus folgt, dass die Aufgabe der Ermittelung der W - Strahlensysteme, deren Brennflächenmäntel durch die Systemstrahlen konform aufeinander bezogen sind, in die Untersuchung der Lösungen des Systems der partiellen Differentialgleichungen [3,6] übergeht, welche eventuell eine Beziehung vor der Form [3,7] befriedigen.

Es ist zu bemerken, dass, wenn die Eine der Funktionen A (u), B (v) in [3,7] eine Konstante ist, so muss auch die andere konstant sein.

Wäre nämlich $\frac{dA}{du} \equiv 0$, so geht die Gleichung [3,7] in die

$$\frac{dB}{dv}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial u} + b\right) = 0 \qquad [3,8]$$

über und Falls $\frac{dB}{dv} \not\equiv 0$ ist, muss

$$\frac{\partial \Phi}{\partial u} + b = 0 \qquad [3,9]$$

sein.

Andererseits hätte man aus [3,5] $\frac{\partial \varphi}{\partial u} = \frac{\partial \Phi}{\partial u}$, da nach der gemachten Voraussetzung $\frac{dA}{du} \equiv 0$ ist und somit aus [3,9]

$$\frac{\partial \varphi}{\partial u} + b = 0,$$

was nach [1,9] ausgesclossen ist.

Aus den obigen Ausführungen folgt nun der Satz:

Wenn die Grössen e, g, ω *Funktionen von* u, v *sind, welche den Differentialgleichungen* [3,5] *genügen und*

$$\varrho = c e^{\Phi} = c \operatorname{tg} \frac{\omega}{2} \qquad [3,10]$$

ist, wobei c *eine Konstante bedeutet, so werden die zugehörigen Strahlensysteme W - Strahlensysteme, deren Brennflächenmäntel durch die Systemstrahlen konform aufeinander zugeordnet sind.*

Dann hat man aus [3,5] und [3,10] mit Rücksicht auf [1,19] und [1,28].

$$\frac{\partial\varphi}{\partial u} = \frac{\partial\Phi}{\partial u}, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial v} = \frac{\partial\Phi}{\partial v}$$

und somit aus [1,33]

$$H_1 = H_2 = 0.$$

Beide Mäntel der Brennflächen der zugehörigen Strahlensysteme sind also Minimalflächen.

Die diesem Falle entsprechenden Strahlensysteme sind die *Strahlensysteme von Thybaut* (1).

ΠΕΡΙΛΗΨΙΣ

Περὶ τῶν σμηνῶν εὐθειῶν, τῶν ὁποίων αἱ χῶναι τῆς ἑστιακῆς ἐπιφανείας ἀπεικονίζονται διὰ τῶν εὐθειῶν αὐτῶν συμμόρφως ἐπ' ἀλλήλων.

Αἱ εὐθεῖαι ἑνὸς σμήνους, τοῦ ὁποίου αἱ δύο χῶναι τῆς ἑστιακῆς ἐπιφανείας εἶναι ἐπιφάνειαι διακεκριμέναι ἀπ' ἀλλήλων, ἀποκαθιστοῦν ἀμφιμονότιμον ἀντιστοιχίαν μεταξὺ τῶν σημείων τῶν χωνῶν τούτων, μίαν δηλ. ἀπεικόνισιν τῶν δύο χωνῶν ἐπ' ἀλλήλων, τῶν ἐφ' ἑκάστης εὐθείας τοῦ σμήνους ἑστιακῶν σημείων θεωρουμένων ὡς ἀντιστοίχων κατὰ τὴν ἀπεικόνισιν ταύτην σημείων τῶν δύο χωνῶν. Τίθεται δὲ τὸ πρόβλημα τοῦ καθορισμοῦ τῶν σμηνῶν εὐθειῶν, εἰς τὰ ὁποῖα ἡ ἀπεικόνισις αὕτη εἶναι μορφῆς ἐκ τῶν προτέρων καθοριζομένης.

Τὸ πρόβλημα τοῦτο ἐμελετήθη συστηματικώτερον εἰς τὴν περίπτωσιν, καθ' ἣν ἡ τῇ βοηθείᾳ τῶν εὐθειῶν τοῦ σμήνους ἐπιτυγχανομένη ἀπεικόνισις τῶν χωνῶν τῆς ἑστιακῆς αὐτοῦ ἐπιφανείας ἐπ' ἀλλήλων εἶναι *ἰσομετρική*.

Εἰς τὰ προεκτεθέντα ἐξετάζεται ἡ γενικωτέρα περίπτωσις, καθ' ἣν ἡ τῇ βοηθείᾳ τῶν εὐθειῶν τοῦ σμήνους ἐπιτυγχανομένη ἀπεικόνισις τῶν δύο χωνῶν τῆς ἑστιακῆς αὐτοῦ ἐπιφανείας ἐπ' ἀλλήλων εἶναι *σύμμορφος*.

---

1. *L. Bianchi*, loc. cit. B. II_1, S. S. 188 - 190.

Εἰς τὴν § 1 τίθενται ὑπὸ μορφὴν συμμετρικὴν αἱ διαφορικαὶ εἰς μερικὰς παραγώγους ἐξισώσεις, αἱ ἐκφράζουσαι τὰς πληρωτέας εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην συνθήκας ὑπὸ τῶν καθοριζόντων τὸ σμῆνος στοιχείων, τῆς ἑστιακῆς δηλ. ἀποστάσεως καὶ τῶν θεμελιωδῶν ποσῶν πρώτης τάξεως τῆς σφαιρικῆς εἰκόνος τοῦ σμήνους ἀναφερομένου εἰς τὰς ἀναπτυκτὰς αὐτοῦ ἐπιφανείας ὡς παραμετρικάς.

Εἰς τὴν § 2 ἐπιτυγχάνεται ἡ ὁλοκλήρωσις τοῦ συστήματος τῶν διαφορικῶν τούτων εἰς μερικὰς παραγώγους ἐξισώσεων εἰς τὴν περίπτωσιν, *τῶν σμηνῶν* (ω), τῶν σμηνῶν δηλ. εἰς τὰ ὁποῖα ἡ γωνία ω τῶν ἑστιακῶν ἐπιπέδων εἶναι σταθερά. Ἀποδεικνύονται δὲ τὰ ἑξῆς:

Ἡ γωνία ω τῶν ἑστιακῶν ἐπιπέδων σμήνους (ω), τοῦ ὁποίου αἱ χῶναι τῆς ἑστιακῆς ἐπιφανείας ἀπεικονίζονται διὰ τῶν εὐθειῶν αὐτοῦ συμμόρφως ἐπ' ἀλλήλων εἶναι ἴση πρὸς $\frac{2\pi}{3}$, τὰ δὲ σμήνη (ω) τὰ ἔχοντα τὴν ἰδιότητα ταύτην εἶναι δυνατὸν νὰ χωρισθοῦν εἰς δύο κατηγορίας.

Εἰς τὰ σμήνη τῆς πρώτης κατηγορίας αἱ σφαιρικαὶ εἰκόνες τῶν δύο οἰκογενειῶν τῶν ἀναπτυκτῶν ἐπιφανειῶν αὐτῶν εἶναι δύο οἰκογένειαι λοξοδρομιῶν τεμνουσῶν τοὺς μεσημβρινοὺς τῆς αὐτῆς οἰκογενείας ὑπὸ γωνίας $-\frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{3}$ ἀντιστοίχως.

Εἰς τὰ σμήνη τῆς δευτέρας κατηγορίας ἀμφότεραι αἱ χῶναι τῆς ἑστιακῆς αὐτῶν ἐπιφανείας εἶναι ἐπιφάνειαι W.

Εἰς τὴν εἰδικωτέραν περίπτωσιν, καθ' ἣν ἡ τῇ βοηθείᾳ τῶν εὐθειῶν σμήνους (ω) ἐπιτυγχανομένη ἀπεικόνισις τῶν χωνῶν τῆς ἑστιακῆς αὐτοῦ ἐπιφανείας ἐπ' ἀλλήλων εἶναι ἰσομετρική, ἀμφότεραι αἱ χῶναι τῆς ἑστιακῆς αὐτοῦ ἐπιφανείας εἶναι ἐπιφάνειαι W, τῶν ὁποίων αἱ κύριαι καμπυλότητες συνδέονται διὰ τῆς αὐτῆς σχέσεως.

Εἰς τὴν § 3 χρησιμοποιοῦνται αἱ εἰς τὴν § 1 εὑρεθεῖσαι συνθῆκαι πρὸς καθορισμὸν *τῶν σμηνῶν* W, τῶν ὁποίων αἱ χῶναι τῆς ἑστιακῆς ἐπιφανείας ἀπεικονίζονται διὰ τῶν εὐθειῶν αὐτῶν ἐπ' ἀλλήλων συμμόρφως καὶ ὡς εἰδικὴ περίπτωσις τοιούτων σμηνῶν ἐπανευρίσκονται τὰ σμήνη τοῦ Thybaut.