ΓΕΝΙΚΕΥΣΙΣ ΘΕΜΕΛΙΩΔΩΝ ΕΝΝΟΙΩΝ ΤΗΣ ΤΟΠΟΛΟΓΙΑΣ ΤΟΥ ΜΕΤΡΙΚΟΥ ΧΩΡΟΥ

Ὑπὸ
ΒΑΣΙΛΙΚΗΣ Δ. ΦΡΑΓΚΟΥ
Πτυχιούχου τῶν Μαθηματικῶν

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Εἰς τὴν παροῦσαν ἐργασίαν εἰσάγεται μία γενίκευσις θεμελιωδῶν τινων ἐννοιῶν τῆς συνήθους τοπολογίας τοῦ μετρικοῦ χώρου καὶ μελετῶνται αἱ ἐκ τῆς γενικεύσεως ταύτης προκύπτουσαι ἐπιπτώσεις ἐπὶ τῶν κυριωτέρων προτάσεων τῆς ἐν λόγῳ τοπολογίας.

Ἡ ὅλη ἐργασία διαιρεῖται εἰς τρία μέρη.

Εἰς τὸ πρῶτον μέρος ἀφ' ἑνὸς μὲν ἀναφέρονται γνωσταὶ ἔννοιαι καὶ προτάσεις, τῶν ὁποίων γίνεται χρῆσις εἰς τὰ ἑπόμενα δύο μέρη, καὶ ἀφ' ἑτέρου ἐκτίθεται εἰς γενικὰς γραμμὰς ὁ σκοπὸς τῆς παρούσης ἐργασίας.

Εἰς τὸ δεύτερον μέρος ἐκτίθενται οἱ ὁρισμοί, διὰ τῶν ὁποίων γενικεύονται γνωσταὶ ἔννοιαι τῆς τοπολογίας τοῦ μετρικοῦ χώρου καὶ πλῆθος προτάσεων, διὰ τῶν ὁποίων καθίσταται ἐμφανὴς ἡ ἐκ τῶν ὡς ἄνω γενικεύσεων ἐπίπτωσις ἐπὶ ἀντιστοίχων προτάσεων τῆς ἐν λόγῳ τοπολογίας.

Τέλος εἰς τὸ τρίτον μέρος γίνεται μία σύγκρισις τῶν κυριωτέρων ἀποτελεσμάτων τοῦ δευτέρου μέρους μετὰ τῶν ἐκτεθέντων εἰς τὸ πρῶτον μέρος, ἀποσκοποῦσα κυρίως εἰς τὴν διαπίστωσιν ὅτι αἱ νέαι εἰσαγόμεναι γενικευμέναι ἔννοιαι δὲν προσφέρονται διὰ τὴν δημιουργίαν ἑνὸς συνήθους τοπολογικοῦ χώρου, ἀλλὰ ἑνὸς πλέον γενικευμένου χώρου, τοῦ C - χώρου (closure space).

I. ΕΙΣΑΓΩΓΗ - ΓΝΩΣΤΑΙ ΕΝΝΟΙΑΙ ΚΑΙ ΣΥΜΒΟΛΙΣΜΟΙ

1. Ἔννοια τοῦ μετρικοῦ χώρου (*).

Ἔστω X τυχὸν μὴ κενὸν σύνολον· ὡς γνωστὸν κάθε μὴ ἀρνητικὴ πραγματικὴ συνάρτησις σ ὡρισμένη ἐπὶ τοῦ καρτεσιανοῦ γινομένου $X \times X = X^2$ καλεῖται *μετρικὴ* ἐπὶ τοῦ συνόλου X, ἐάν:

(i) $\forall\ (\chi,\psi) \in X^2,\ (\sigma(\chi,\psi) = 0) \Leftrightarrow (\chi = \psi)$ καὶ

(ii) $\forall\ (\chi,\psi,z) \in X^3,\ \sigma(\chi,\psi) + \sigma(\psi,z) \geqq \sigma(z,\chi)$.

Ἐὰν ἡ σ εἶναι μία μετρικὴ ἐπὶ τοῦ συνόλου X, ἡ δυὰς (X,σ) καλεῖται, ὡς γνωστόν, *μετρικὸς χῶρος*. Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν ἀντὶ τῆς ἐκφράσεως «ἡ δυὰς (X,σ) εἶναι μετρικὸς χῶρος» χρησιμοποιοῦμεν συνήθως τὴν ἔκφρασιν «τὸ σύνολον X εἶναι μετρικὸς χῶρος μὲ μετρικὴν σ», ἤ, ἐφ' ὅσον δὲν κρίνεται ἀπαραίτητον νὰ ἀναφέρηται ἡ μετρικὴ σ, «τὸ σύνολον X εἶναι μετρικὸς χῶρος».

Ἐπίσης εἰς ἣν περίπτωσιν ἀναφερόμεθα πάντοτε εἰς τὴν αὐτὴν μετρικὴν σ, ἐὰν (χ,ψ) εἶναι τυχὸν στοιχεῖον τοῦ X^2, ἡ ἀντίστοιχος τιμὴ $\sigma(\chi,\psi)$ τῆς σ παρίσταται διὰ τοῦ συμβολισμοῦ $|\chi\psi|$.

Διὰ τῆς εἰσαγωγῆς τοῦ συμβολισμοῦ αὐτοῦ, τοῦ ὁποίου θὰ γίνεται χρῆσις εἰς τὰ ἑπόμενα, αἱ προτάσεις (i) καὶ (ii) λαμβάνουν ἀντιστοίχως τὴν ἀκόλουθον μορφήν:

(α) $\forall\ (\chi,\psi) \in X^2,\ (|\chi\psi| = 0) \Leftrightarrow (\chi = \psi)$,

(β) $\forall\ (\chi,\psi,z) \in X^3,\ |\chi\psi| + |\psi z| \geqq |z\chi|$.

Διὰ συνδυασμοῦ τῶν δύο τούτων προτάσεων προκύπτει εὐκόλως ὅτι:

(γ) $\forall\ (\chi,\psi) \in X^2,\ |\chi\psi| = |\psi\chi|$.

Ἐφ' ὅσον τὸ σύνολον X ἔχει καταστῆ μετρικὸς χῶρος διά τινος μετρικῆς, τὰ στοιχεῖα αὐτοῦ καλοῦνται *σημεῖα* τοῦ ἐν λόγῳ μετρικοῦ χώρου, ἐὰν δὲ $(\chi,\psi) \in X^2$, ὁ μὴ ἀρνητικὸς πραγματικὸς ἀριθμὸς $|\chi\psi|$ καλεῖται *ἀπόστασις* τῶν σημείων χ,ψ τοῦ X.

(*) Ἴδε: [9] σελ. 46, [6] σελ. 94, [8] σελ. 33.

(Οἱ ἐντὸς τῶν ἀγκυλῶν ἀριθμοὶ παραπέμπουν εἰς τὴν εἰς τὸ τέλος τῆς παρούσης ἐργασίας βιβλιογραφίαν).

Ὡς γνωστόν, ἐὰν $X = \mathbf{R}_1$, ἔνθα $\mathbf{R}_1$ τὸ σύνολον τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν, ἡ μὴ ἀρνητικὴ συνάρτησις σ, ἡ ὁριζομένη ἐπὶ τοῦ $\mathbf{R}_1$ εἰς τρόπον, ὥστε:

$$\forall\ (\chi,\psi) \in \mathbf{R}_1{}^2,\ \ \sigma(\chi,\psi) = |\chi - \psi|,$$

εἶναι μία μετρικὴ ἐπὶ τοῦ $\mathbf{R}_1$. Ἑπομένως δι' αὐτῆς τὸ $\mathbf{R}_1$ καθίσταται μετρικὸς χῶρος.

Ἐπίσης, ἐάν:

$$X = \mathbf{R}_n = \{(\chi_1,\chi_2,\ldots,\chi_n):\ \forall \kappa \in \Phi_n,\ \chi_\kappa \in \mathbf{R}_1\},$$

ἔνθα $\Phi_n = \{1,2,\ldots,n\}$, ἡ μὴ ἀρνητικὴ συνάρτησις σ, ἡ ὁριζομένη ἐπὶ τοῦ $\mathbf{R}_n{}^2$ εἰς τρόπον, ὥστε:

$$\forall\ (\chi,\psi) \in \mathbf{R}_n{}^2,\ \ \sigma(\chi,\psi) = \Big[\sum_{\kappa=1}^{n} (\chi_\kappa - \psi_\kappa)^2\Big]^{1/2},$$

ἔνθα $\chi = (\chi_1,\chi_2,\ldots,\chi_n)$ καὶ $\psi = (\psi_1,\psi_2,\ldots,\psi_n)$, εἶναι μία μετρικὴ ἐπὶ τοῦ $\mathbf{R}_n$ καὶ ὡς ἐκ τούτου τὸ $\mathbf{R}_n$ καθίσταται δι' αὐτῆς μετρικὸς χῶρος.

Ἐκτὸς τούτων ὑπάρχουν καὶ πλεῖστοι ἄλλοι μετρικοὶ χῶροι εἰδικῆς μορφῆς, τῶν ὁποίων ἡ μελέτη παρουσιάζει ἰδιαίτερον ἐνδιαφέρον, ὅπως π.χ. ὁ χῶρος τοῦ Minkowski, ὁ χῶρος τοῦ Hilbert, ὁ χῶρος τοῦ Baire κ.ἄ. (ἴδε [6] σελ. 98-102, [5] σελ. 40).

2. Ἔννοια τῆς περιοχῆς. Ὁριακά, μεμονωμένα, ἐσωτερικά, ἐξωτερικὰ καὶ συνοριακὰ σημεῖα (*).

Ἰδιαίτερον ἐνδιαφέρον διὰ τὴν μελέτην ἑνὸς μετρικοῦ χώρου X παρουσιάζουν αἱ ἔννοιαι τῆς περιοχῆς καὶ τῆς περιωρισμένης περιοχῆς τυχόντος σημείου τοῦ X.

Ὡς γνωστόν, ἐὰν $\chi_0 \in X$ καὶ $\varepsilon > 0$, τὸ σύνολον

$$\{\chi:\ (\chi \in X)\ (|\chi\chi_0| < \varepsilon)\}$$

καλεῖται *ε-περιοχὴ* ἢ *περιοχὴ ἀκτῖνος* ε τοῦ σημείου χ_0 καὶ παρίσταται διὰ τοῦ συμβολισμοῦ $\pi(\chi_0,\varepsilon)$, ἤτοι:

$$\pi(\chi_0,\varepsilon) = \{\chi:\ (\chi \in X)\ (|\chi\chi_0| < \varepsilon)\}.$$

Ἀντιστοίχως, τὸ σύνολον $\pi(\chi_0,\varepsilon) - \{\chi_0\}$ καλεῖται *περιωρισμένη ε—περιοχὴ* ἢ *περιωρισμένη περιοχὴ ἀκτῖνος* ε τοῦ σημείου χ_0 καὶ παρίσταται διὰ τοῦ συμβολισμοῦ $\pi_1(\chi_0,\varepsilon)$, ἤτοι:

$$\pi_1(\chi_0,\varepsilon) = \pi(\chi_0,\varepsilon) - \{\chi_0\},$$

(*) Ἴδε [10] σελ. 20, 32, [2] σελ. 13, [8] σελ. 44.

ἢ ἀκόμη:

$$\pi_1\,(\chi_0,\varepsilon)=\{\chi\colon\,(\chi\in X)\;(0<|\chi\chi_0|<\varepsilon)\}.$$

Ἐὰν δὲν ὑπάρχῃ ἰδιαίτερος λόγος νὰ ἀναφέρηται ἡ «ἀκτὶς» ε, τότε ἀντὶ τῶν ὅρων «ε—περιοχή», «περιωρισμένη ε—περιοχή», χρησιμοποιοῦμεν τοὺς ὅρους «περιοχή», «περιωρισμένη περιοχή», τῶν ὁποίων οἱ ἀντίστοιχοι συμβολισμοὶ εἶναι $\pi(\chi_0)$ καὶ $\pi_1(\chi_0)$.

Ἄς θεωρήσωμεν ἤδη τυχὸν ὑποσύνολον Α τοῦ Χ. Ὡς γνωστόν, τὸ $\chi_0\in X$ καλεῖται *ὁριακὸν σημεῖον τοῦ Α*, ἐάν:

$$\forall\,\varepsilon>0,\;\pi_1(\chi_0,\varepsilon)\cap A\neq\varnothing.$$

Ἀντιθέτως, ἐὰν $\chi_0\in A$, τὸ χ_0 καλεῖται *μεμονωμένον σημεῖον τοῦ Α*, ἐάν:

$$\exists\,\varepsilon>0,\;\pi_1(\chi_0,\varepsilon)\cap A=\varnothing.$$

Ἐὰν $\chi_0\in A$, τὸ χ_0 καλεῖται, ὡς γνωστόν, *ἐσωτερικὸν σημεῖον τοῦ Α*, ἐάν:

$$\exists\,\varepsilon>0,\;\pi(\chi_0,\varepsilon)\subseteq A.$$

Ἀντιθέτως τὸ $\chi_0\in X$ καλεῖται *ἐξωτερικὸν σημεῖον τοῦ Α*, ἐάν:

$$\exists\,\varepsilon>0,\;\pi(\chi_0,\varepsilon)\cap A=\varnothing,$$

ἢ (ἰσοδυνάμως), ἐάν:

$$\exists\,\varepsilon>0,\;\pi(\chi_0,\varepsilon)\subseteq CA,$$

ἔνθα $CA=X-A$.

Τέλος τὸ $\chi_0\in X$ καλεῖται *συνοριακὸν σημεῖον τοῦ Α*, ἐάν:

$$\forall\,\varepsilon>0,\;(\pi(\chi_0,\varepsilon)\cap A\neq\varnothing)\,.\,(\pi(\chi_0,\varepsilon)\cap CA\neq\varnothing).$$

3. Παράγωγον σύνολον. Περίβλημα, ἀνοικτὸς πυρήν, ἐξωτερικὸν καὶ σύνορον συνόλου (*).

Ὡς γνωστόν, ἐὰν $A\subseteq X$, τότε:

(α) Τὸ σύνολον τῶν ὁριακῶν σημείων τοῦ Α καλεῖται *παράγωγον σύνολον τοῦ Α* καὶ παρίσταται διὰ τοῦ συμβολισμοῦ Α′, ἤτοι:

$$A'=\{\chi\colon\,(\chi\in X)\,(\forall\,\varepsilon>0,\;\pi_1(\chi,\varepsilon)\cap A\neq\varnothing)\}.$$

(β) Τὸ σύνολον τῶν ἐσωτερικῶν σημείων τοῦ Α καλεῖται *ἀνοικτὸς πυρὴν ἢ ἐσωτερικὸν τοῦ Α* καὶ παρίσταται διὰ τοῦ συμβολισμοῦ int(A), ἤτοι:

$$\mathrm{int}(A)=\{\chi\colon\,(\chi\in A)\,(\exists\,\varepsilon>0,\;\pi(\chi,\varepsilon)\subseteq A)\}.$$

(*) Ἴδε: [1] σελ. 14-16, [2] σελ. 13-16, [4] σελ. 34-37, [7] σελ. 20, 29, 44.

(γ) Τὸ σύνολον τῶν ἐξωτερικῶν σημείων τοῦ A καλεῖται *ἐξωτερικὸν τοῦ A* καὶ παρίσταται διὰ τοῦ συμβολισμοῦ ext(A), ἤτοι:

$$\mathrm{ext}(A) = \{\chi \colon (\chi \in X)\,(\exists\, \varepsilon > 0,\ \pi(\chi,\varepsilon) \subseteq CA)\}.$$

(δ) Τέλος τὸ σύνολον τῶν συνοριακῶν σημείων τοῦ A καλεῖται *σύνορον τοῦ A* καὶ παρίσταται διὰ τοῦ συμβολισμοῦ $\partial(A)$, ἤτοι:

$$\partial(A) = \{\chi \colon (\chi \in X)\,(\forall \varepsilon > 0,\ \pi(\chi,\varepsilon) \cap A \neq \varnothing \text{ καὶ } \pi(\chi,\varepsilon) \cap CA \neq \varnothing)\}.$$

Ἐκτὸς τῶν ἀνωτέρω ἐννοιῶν εἰσάγεται, ὡς γνωστόν, καὶ ἡ ἔννοια τοῦ περιβλήματος τοῦ συνόλου A ὡς ἀκολούθως:

(ε) Τὸ σύνολον $A \cup A'$ καλεῖται *περίβλημα τοῦ A* καὶ παρίσταται διὰ τοῦ συμβολισμοῦ $\bar{A}$, ἤτοι:

$$\bar{A} = A \cup A'.$$

4. Συγκλίνουσαι καὶ θεμελιώδεις ἀκολουθίαι (*).

Ἔστω (χ_n) μία ἀκολουθία σημείων τοῦ μετρικοῦ χώρου X. Ὡς γνωστόν, ἡ (χ_n) καλεῖται *συγκλίνουσα εἰς τὸ σημεῖον* $\chi_0 \in X$, ἐάν:

$$\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists N = N(\varepsilon) \in \Phi,\ \forall n \geq N,\ \chi_n \in \pi(\chi_0,\varepsilon),$$

ἔνθα Φ τὸ σύνολον τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν.

Τὸ σημεῖον χ_0 καλεῖται *ὅριον* τῆς ἀκολουθίας (χ_n) καὶ εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν γράφομεν:

$$\lim_{n \to \infty} \chi_n = \chi_0,$$

ἢ ἁπλούστερον

$$\lim \chi_n = \chi_0.$$

Ὥστε ἐξ ὁρισμοῦ:

$$(\lim \chi_n = \chi_0) \Leftrightarrow (\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists N = N(\varepsilon) \in \Phi,\ \forall n \geqq N,\ \chi_n \in \pi(\chi_0,\varepsilon)).$$

Ἐὰν (χ_n'), (χ_n) εἶναι δύο ἀκολουθίαι, ἡ (χ'_n) καλεῖται, ὡς γνωστόν, *μερικὴ ἀκολουθία* ἢ *ὑπακολουθία* τῆς (χ_n), ἐάν:

(i) $\forall\, n \in \Phi,\ \exists\, \kappa_n \in \Phi,\ \chi'_n = \chi_{\kappa_n}$ καὶ

(ii) $\forall\, n \in \Phi,\ \kappa_n \leqq \kappa_{n+1}$.

(*) Ἴδε: [2] σελ. 21, [6] σελ. 103, [10] σελ. 37, 39.

Τὸ γεγονὸς τοῦτο θὰ παρίσταται εἰς τὰ ἑπόμενα διὰ τοῦ συμβολισμοῦ:

$$(\chi'_n) \mathrel{\widetilde{\subset}} (\chi_n).$$

Κατόπιν τούτων παραθέτομεν τὰς ἀκολούθους γνωστὰς προτάσεις:

I. $(\lim\chi_n = \chi_0)\ (\lim\chi_n = \chi'_0) \Rightarrow (\chi_0 = \chi'_0).$

Δηλαδὴ τὸ ὅριον συγκλινούσης ἀκολουθίας (χ_n) σημείων τοῦ X ὁρίζεται μονοτίμως.

II. $((\chi'_n) \mathrel{\widetilde{\subset}} (\chi_n))\ (\lim\chi_n = \chi_0) \Rightarrow (\lim\chi_n' = \chi_0).$

III. $(\forall\, n \in \Phi,\ \chi_n = \alpha \in X) \Rightarrow (\lim\chi_n = \alpha).$

IV. Ἔστω (χ_n) ἀκολουθία σημείων τοῦ X καὶ $\chi_0 \in X$. Ἐὰν ἡ (χ_n) δὲν συγκλίνῃ εἰς τὸ χ_0, τότε ὑπάρχει μία τοὐλάχιστον ὑπακολουθία τῆς (χ_n), τῆς ὁποίας οὐδεμία ὑπακολουθία συγκλίνει εἰς τὸ χ_0.

Ἐκ τῶν προτάσεων I, II, III καὶ IV συνάγεται, ὅτι ὁ χῶρος X εἶναι ἕνας χῶρος L^*. (Ἴδε: [7] σελ. 83).

Ὡς γνωστόν, ἐὰν (χ_n) εἶναι τυχοῦσα ἀκολουθία σημείων τοῦ X, ἡ (χ_n) καλεῖται *θεμελιώδης ἀκολουθία* ἢ *ἀκολουθία τοῦ Cauchy*, ἐάν:

$$\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists N = N(\varepsilon) \in \Phi,\ \forall p \geqq N,\ \forall q \geqq N,\ |\chi_p\chi_q| < \varepsilon.$$

Ἀποδεικνύεται ὅτι:

V. Κάθε συγκλίνουσα ἀκολουθία εἶναι καὶ θεμελιώδης, ἐνῷ τὸ ἀντίστροφον δὲν ἰσχύει.

Τέλος ἀναφέρομεν δύο γνωστὰς προτάσεις, αἱ ὁποῖαι συνδέουν τὴν ἔννοιαν τοῦ ὁρίου ἀκολουθίας καὶ τὴν ἔννοιαν τοῦ ὁριακοῦ σημείου δοθέντος συνόλου A:

VI. $\forall\, A \subseteq X,\ (\chi_0 \in A') \Leftrightarrow (\exists\ (\chi_n),\ \forall n \in \Phi,\ \chi_n \in A - \{\chi_0\},\ \lim\chi_n = \chi_0).$

VII. $\forall\, A \subseteq X,\ (\chi_0 \in \bar{A}) \Leftrightarrow (\exists\ (\chi_n),\ \forall n \in \Phi,\ \chi_n \in A,\ \lim\chi_n = \chi_0).$

5. Βασικαὶ προτάσεις ἀφορῶσαι εἰς τὸ παράγωγον σύνολον, τὸ περίβλημα, τὸν ἀνοικτὸν πυρῆνα, τὸ ἐξωτερικὸν καὶ τὸ σύνορον δοθέντος ὑποσυνόλου τοῦ X (*).

Κατ' ἀρχὴν ἐὰν $A = \varnothing$, ἐκ τῶν ὁρισμῶν τῆς § 3 προκύπτει ἀμέσως ὅτι:

I. $\varnothing' = \varnothing,\ \overline{\varnothing} = \varnothing,\ \mathrm{ext}(\varnothing) = X,\ \mathrm{int}(\varnothing) = \varnothing$ καὶ $\partial(\varnothing) = \varnothing$.

Ἐπίσης ἐὰν $A = X$, τότε:

II. $X' = X,\ \overline{X} = X,\ \mathrm{ext}(X) = \varnothing,\ \mathrm{int}(X) = X$ καὶ $\partial(X) = \varnothing$.

(*) Ἴδε: [5] σελ. 24, 25, [8] σελ. 10, 95-101, [10] σελ. 28-31.

Κατόπιν τούτων, ἐὰν $A \subseteq X$ ($A \neq \varnothing$ ἢ $=\varnothing$ ἀδιαφόρως), ἀποδεικνύεται ὅτι:

III. (α) $A' \subseteq \bar{A}$, $\operatorname{int}(A) \subseteq A \subseteq \bar{A}$, $\partial(A) \subseteq \bar{A}$, $\partial(A) \subseteq \overline{CA}$,

(β) $\operatorname{int}(A) \cap \partial(A) = \varnothing$, $\operatorname{int}(A) \cap \operatorname{ext}(A) = \varnothing$, $\partial(A) \cap \operatorname{ext}(A) = \varnothing$,

(γ) $\bar{A} = \operatorname{int}(A) \cup \partial(A)$, $\operatorname{int}(A) \cup \partial(A) \cup \operatorname{ext}(A) = X$,

(δ) $\operatorname{int}(CA) = \operatorname{ext}(A)$, $\operatorname{int}(A) = \operatorname{ext}(CA)$ καὶ

(ε) $\operatorname{int}(A) = C(\overline{CA})$, $\bar{A} = C[\operatorname{int}(CA)]$.

Ἔστω I τυχὸν σύνολον καὶ 2^X τὸ σύνολον ὅλων τῶν ὑποσυνόλων τοῦ X.

Ὡς γνωστόν, κάθε ἀπεικόνισις τῆς μορφῆς

$$I \to 2^X$$

καλεῖται *οἰκογένεια συνόλων* καὶ παρίσταται διὰ τοῦ συμβολισμοῦ $(A_i)_{i\varepsilon I}$. Τὸ I καλεῖται *σύνολον δεικτῶν* τῆς ἐν λόγῳ οἰκογενείας συνόλων, τὰ δὲ στοιχεῖα τοῦ I καλοῦνται *δεῖκται.*

Τὸ σύνολον

$$\{\chi: \exists\, i \in I,\ \chi \in A_i\},$$

καλεῖται ἕνωσις τῶν συνόλων τῆς οἰκογενείας $(A_i)_{i\varepsilon I}$ καὶ παρίσταται διὰ τοῦ συμβολισμοῦ $\bigcup_{i\varepsilon I} A_i$, ἤτοι:

$$\bigcup_{i\varepsilon I} A_i = \{\chi: \exists\, i \in I,\ \chi \in A_i\}.$$

Ἀντιστοίχως τὸ σύνολον

$$\{\chi: \forall i \in I,\ \chi \in A_i\}$$

καλεῖται *τομὴ* τῶν συνόλων τῆς οἰκογενείας $(A_i)_{i\varepsilon I}$ καὶ παρίσταται διὰ τοῦ συμβολισμοῦ $\bigcap_{i\varepsilon I} A_i$, ἤτοι:

$$\bigcap_{i\varepsilon I} A_i = \{\chi: \forall i \in I,\ \chi \in A_i\}.$$

Κατόπιν τούτων ἀναφέρομεν τὴν ἀκόλουθον γνωστὴν πρότασιν:

IV. Ἐὰν $(A_i)_{i\varepsilon I}$ εἶναι τυχοῦσα οἰκογένεια ὑποσυνόλων τοῦ μετρικοῦ χώρου X, τότε:

(α) $$\overline{\bigcup_{i\varepsilon I} A_i} \supseteq \bigcup_{i\varepsilon I} \bar{A}_i,$$

(β) $$\overline{\bigcap_{i\varepsilon I} A_i} \subseteq \bigcap_{i\varepsilon I} \bar{A}_i,$$

(γ) $$\operatorname{int}\Big(\bigcup_{i\varepsilon I} A_i\Big) \supseteq \bigcup_{i\varepsilon I} \operatorname{int}(A_i)$$ καὶ

(δ) $$\operatorname{int}\Big(\bigcap_{i\varepsilon I} A_i\Big) \subseteq \bigcap_{i\varepsilon I} \operatorname{int}(A_i).$$

Εἰς τὴν εἰδικὴν περίπτωσιν, καθ' ἣν

$$I = \Phi_n = \{1,2,...,n\},$$

τότε ἀντὶ τῶν συμβολισμῶν

$$\bigcup_{i \in I} A_i \quad \text{καὶ} \quad \bigcap_{i \in I} A_i$$

χρησιμοποιοῦμεν, ὡς γνωστόν, τοὺς συμβολισμοὺς

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i \quad \text{καὶ} \quad \bigcap_{i=1}^{n} A_i$$

ἀντιστοίχως, αἱ δὲ (IVα) καὶ (IVδ) καθίστανται ἰσότητες, ἤτοι:

V. (α) $$\overline{\bigcup_{i=1}^{n} A_i} = \bigcup_{i=1}^{n} \overline{A_i} \quad \text{καὶ}$$

(β) $$\operatorname{int}\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) = \bigcap_{i=1}^{n} \operatorname{int}(A_i).$$

6. Κλειστὰ καὶ ἀνοικτὰ ὑποσύνολα τοῦ X (*).

Ὡς γνωστόν, ἓν ὑποσύνολον A τοῦ X καλεῖται *κλειστόν*, ἐὰν $\bar{A} = A$, ἤτοι ἐξ ὁρισμοῦ:

$$(A \text{ κλειστὸν}) \Leftrightarrow (\bar{A} = A).$$

Ἐπειδὴ δὲ

$$(\bar{A} = A) \Leftrightarrow (A' \subseteq A),$$

ἔχομεν:

I. $$(A \text{ κλειστὸν}) \Leftrightarrow (A' \subseteq A).$$

Ἐκ τοῦ ὁρισμοῦ τῆς ἐννοίας τοῦ κλειστοῦ συνόλου καὶ τῶν προτάσεων I, II τῆς § 5 προκύπτει ἀμέσως ὅτι:

II. Τὰ σύνολα $\varnothing$ καὶ X εἶναι κλειστά.

Ἐπίσης ἐκ τοῦ ὁρισμοῦ τῆς ἐννοίας τοῦ κλειστοῦ συνόλου καὶ τῶν προτάσεων (IVβ) καὶ (Vα) τῆς § 5 προκύπτει ὅτι:

III. (α) Ἐὰν $(A_i)_{i \in I}$ εἶναι τυχοῦσα οἰκογένεια κλειστῶν ὑποσυνόλων τοῦ X, τότε καὶ τὸ σύνολον $\bigcap_{i \in I} A_i$ εἶναι κλειστόν.

(β) Ἐὰν A_i, $(i = 1,2,...,n)$, εἶναι n κλειστὰ ὑποσύνολα τοῦ X, τότε καὶ τὸ σύνολον $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$ εἶναι κλειστόν.

(*) Ἴδε: [4] σελ. 33, 35, [8] σελ. 52, 60, [10] σελ. 21, 24.

Ὡς γνωστόν, ἓν ὑποσύνολον A τοῦ X καλεῖται ἀνοικτόν, ἐὰν $\mathrm{int}(A) = A$, ἤτοι ἐξ ὁρισμοῦ:

$$(A \text{ ἀνοικτὸν}) \Leftrightarrow (\mathrm{int}(A) = A).$$

Ἐκ τοῦ ὁρισμοῦ τούτου καὶ τῶν προτάσεων I,II τῆς § 5 προκύπτει ὅτι:

IV. Τὰ σύνολα $\varnothing$ καὶ X εἶναι ἀνοικτά.

Ἐπίσης ἐκ τοῦ ὁρισμοῦ τῆς ἐννοίας τοῦ ἀνοικτοῦ συνόλου καὶ τῶν προτάσεων (IVδ) καὶ (Vβ) τῆς § 5 προκύπτει ὅτι:

V. (α) Ἐὰν $(A_i)_{i \in I}$ εἶναι τυχοῦσα οἰκογένεια ἀνοικτῶν ὑποσυνόλων τοῦ X, τότε καὶ τὸ σύνολον $\bigcup_{i \in I} A_i$ εἶναι ἀνοικτόν.

(β) Ἐὰν A_i, $(i = 1,2,\ldots,n)$ εἶναι n ἀνοικτὰ ὑποσύνολα τοῦ X, τότε καὶ τὸ σύνολον $\bigcap_{i=1}^{n} A_i$ εἶναι ἀνοικτόν.

Τέλος ἀποδεικνύεται ὅτι:

VI. (α) $\forall A \subseteq X$, $(A \text{ κλειστὸν}) \Rightarrow (CA \text{ ἀνοικτὸν})$ καὶ

(β) $\forall A \subseteq X$, $(A \text{ ἀνοικτὸν}) \Rightarrow (CA \text{ κλειστόν})$.

7. Ἔννοια τοῦ τοπολογικοῦ χώρου (*).

Ἔστω X τυχὸν σύνολον καὶ $\mathfrak{T}$ σύνολον ὑποσυνόλων τοῦ X. Ἐάν:

(α) $(\forall i \in I,\ A_i \in \mathfrak{T}) \Rightarrow (\bigcup_{i \in I} A_i \in \mathfrak{T})$,

ἔνθα I τυχὸν σύνολον δεικτῶν (πεπερασμένον ἢ ἄπειρον),

(β) $(\forall n \in \Phi,\ \forall i \in \Phi_n = \{1,2,\ldots,n\},\ A_i \in \mathfrak{T}) \Rightarrow (\bigcap_{i=1}^{n} A_i \in \mathfrak{T})$ καὶ

(γ) $X \in \mathfrak{T}$, $\quad \varnothing \in \mathfrak{T}$,

τότε, ὡς γνωστόν, ἡ δυὰς $(X,\mathfrak{T})$ καλεῖται *τοπολογικὸς χῶρος*.

Ἄς θεωρήσωμεν ἤδη τυχόντα μετρικὸν χῶρον X καὶ τὸ σύνολον $\mathfrak{T}^*$ ὅλων τῶν ἀνοικτῶν ὑποσυνόλων τοῦ X, ἤτοι:

$$\mathfrak{T}^* = \{A\colon (A \subseteq X)\ (A \text{ ἀνοικτόν})\}.$$

Ἐκ τῆς προτάσεως V τῆς § 6 προκύπτει ὅτι:

(α*) $\quad (\forall i \in I,\ A_i \in \mathfrak{T}^*) \Rightarrow (\bigcup_{i \in I} A_i \in \mathfrak{T}^*)$

(*) Ἴδε: [1] σελ. 9, [2] σελ. 11, [8] σελ. 84, [9] σελ. 21.

καὶ

$$(\beta^*) \qquad (\forall n \in \Phi,\ \forall i \in \Phi_n,\ A_i \in \mathfrak{D}^*) \Rightarrow (\bigcap_{i=1}^{n} A_i \in \mathfrak{D}^*).$$

Ἐπίσης ἐκ τῆς προτάσεως IV τῆς § 6 συνάγομεν ὅτι:

$$(\gamma^*) \qquad X \in \mathfrak{D}^*,\ \varnothing \in \mathfrak{D}^*.$$

Ἤδη ἐκ τῶν (α^*), (β^*), (γ^*) καὶ τοῦ ὁρισμοῦ τῆς ἐννοίας τοῦ τοπολογικοῦ χώρου προκύπτει ἡ πρότασις:

I. Ἐὰν X μετρικὸς χῶρος καὶ $\mathfrak{D}^*$ τὸ σύνολον τῶν ἀνοικτῶν ὑποσυνόλων τοῦ X, τότε ἡ δυὰς ($X,\mathfrak{D}^*$) εἶναι τοπολογικὸς χῶρος.

8. Ἔννοια τοῦ C—χώρου (*).

Ἔστω X τυχὸν μὴ κενὸν σύνολον καὶ u μία συνάρτησις ἔχουσα σύνολον ὁρισμοῦ τὸ 2^X καὶ λαμβάνουσα τιμὰς εἰς τὸ 2^X.

Ἐάν:

$$(\alpha) \qquad u(\varnothing) = \varnothing,$$
$$(\beta) \qquad \forall A \in 2^X,\ A \subseteq u(A) \quad \text{καὶ}$$
$$(\gamma) \qquad \forall A \in 2^X,\ \forall B \in 2^X,\ u(A \cup B) = u(A) \cup u(B),$$

τότε ἡ δυὰς (X,u) καλεῖται *C — χῶρος*.

Ἐὰν ὁ X εἶναι μετρικὸς χῶρος καὶ θεωρήσωμεν τὴν συνάρτησιν:
$u\colon 2^X \to 2^X$, καθ' ἣν

$$\forall A \in 2^X,\ u(A) = \bar{A},$$

εἶναι φανερόν, ὅτι ἡ κατ' αὐτὸν τὸν τρόπον ὁριζομένη συνάρτησις u πληροῖ τὰς ἀνωτέρω συνθήκας (α), (β), (γ) καὶ ὡς ἐκ τούτου ἡ δυὰς (X,u) εἶναι C — χῶρος. Ὥστε:

I. Ἐὰν ὁ X εἶναι μετρικὸς χῶρος καὶ ἡ συνάρτησις

$$u : 2^X \to 2^X$$

εἶναι τοιαύτη, ὥστε

$$\forall A \in 2^X,\ u(A) = \bar{A},$$

τότε ἡ δυὰς (X,u) εἶναι C — χῶρος.

Ἐὰν ἡ συνάρτησις $u\colon 2^X \to 2^X$, ἐκτὸς τῶν τῶν συνθηκῶν (α), (β), (γ), πληροῖ καὶ τὴν συνθήκην:

$$(\delta) \qquad \forall A \in 2^X, \qquad u(u(A)) = u(A),$$

(*) Ἴδε [3] σελ. 237.

τότε ἡ δυὰς (X,u) καλεῖται *τοπολογικὸς* C — *χῶρος*.

Εἶναι φανερόν, ὅτι ἡ συνάρτησις u τῆς προηγουμένης προτάσεως I πληροῖ τὴν συνθήκην (δ). Ἑπομένως:

II. Ἐὰν ὁ X εἶναι μετρικὸς χῶρος καὶ ἡ συνάρτησις

$$u: 2^X \to 2^X$$

εἶναι τοιαύτη, ὥστε

$$\forall A \in 2^X, \quad u(A) = \bar{A},$$

τότε ἡ δυὰς (X,u) εἶναι τοπολογικὸς C — χῶρος.

Ἔστω (X,u) τυχὼν C — χῶρος καὶ $K \subseteq X$. Τὸ K καλεῖται *κλειστὸν* σύνολον τοῦ ἐν λόγῳ C — χώρου, ἐάν:

$$u(K) = K.$$

Ἐπίσης, ἐὰν $A \subseteq X$, τὸ A καλεῖται *ἀνοικτὸν* σύνολον τοῦ ἐν λόγῳ C — χώρου, ἐὰν τὸ $CA = X - A$ εἶναι κλειστὸν σύνολον, δηλαδὴ ἐάν:

$$u(CA) = CA.$$

Ἄς ὑποθέσωμεν ἤδη, ὅτι ἡ δυὰς (X,u) εἶναι τοπολογικὸς C — χῶρος. Ἀποδεικνύεται ὅτι:

III. Ἐὰν $\mathfrak{D}$ εἶναι τὸ σύνολον τῶν ἀνοικτῶν ὑποσυνόλων τοῦ X, ἤτοι ἐάν:

$$\mathfrak{D} = \{A: (A \in 2^X) \ (u(CA) = CA)\},$$

τότε ἡ δυὰς $(X,\mathfrak{D})$ εἶναι τοπολογικὸς χῶρος.

Ἀντιστρόφως:

IV. Ἐὰν $(X,\mathfrak{D})$ εἶναι τυχὼν τοπολογικὸς χῶρος, τότε ὑπάρχει μία τελείως καθωρισμένη συνάρτησις

$$u: 2^X \to 2^X$$

τοιαύτη, ὥστε ἡ δυὰς (X,u) νὰ εἶναι εἷς τοπολογικὸς C — χῶρος.

9. Σκοπὸς τῆς παρούσης ἐργασίας.

Εἰς τὴν § 4 ἐδόθη ὁ ὁρισμὸς τῆς συγκλίσεως ἀκολουθίας σημείων μετρικοῦ χώρου X. Κατ᾽ αὐτόν, ἐὰν (χ_n) εἶναι ἀκολουθία σημείων τοῦ X καὶ $\chi_0 \in X$, τότε:

$$(\lim \chi_n = \chi_0) \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0, \quad \exists N = N(\varepsilon) \in \Phi, \quad \forall n \geqq N, \quad \chi_n \in \pi(\chi_0, \varepsilon)).$$

Εἶναι φανερόν, ὅτι, ἐὰν $\lim \chi_n = \chi_0$, τότε $\forall \varepsilon > 0$ ἡ περιοχὴ $\pi(\chi_0,\varepsilon)$ περιέχει ἀπείρους ὅρους τῆς ἀκολουθίας (χ_n), ἐνῶ ἐκτὸς τῆς περιοχῆς ταύτης κεῖνται τὸ πολὺ πεπερασμένον πλῆθους ὅροι τῆς ἐν λόγῳ ἀκολουθίας.

Τὸ γεγονὸς τοῦτο δηλοῦμεν συνήθως διὰ τῆς ἐκφράσεως:

Ἐὰν $\lim \chi_n = \chi_0$, τότε «ἀπείρως ἐγγὺς» τοῦ χ_0 εὑρίσκονται σχεδὸν ὅλοι οἱ ὅροι τῆς ἀκολουθίας (χ_n).

Ἄς θεωρήσωμεν ἤδη τὴν ἀκολουθίαν (χ_n), ἔνθα:

$$(1) \quad \chi_n = \begin{cases} 1 + \frac{1}{n} + \delta, & \text{ὅταν } n \text{ περιττὸς} \\ 1 - \frac{1}{n} - \delta, & \text{ὅταν } n \text{ ἄρτιος, καὶ } \delta = 10^{-10}. \end{cases}$$

Προφανῶς ἡ (χ_n) δὲν εἶναι συγκλίνουσα εἰς τὸ σημεῖον $\chi_0 = 1$. Παρατηροῦμεν ὅμως, ὅτι $\forall \varepsilon > \delta$ ἡ περιοχὴ $\pi(\chi_0, \varepsilon)$ περιέχει ἀπείρους ὅρους τῆς ἀκολουθίας (χ_n), ἐνῶ ἐκτὸς τῆς $\pi(\chi_0, \varepsilon)$ κεῖνται τὸ πολὺ πεπερασμένου πλῆθους ὅροι τῆς ἐν λόγῳ ἀκολουθίας.

Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν θὰ ἠδυνάμεθα νὰ εἴπωμεν, ὅτι: «ἀρκούντως ἐγγὺς» τοῦ χ_0 εὑρίσκονται σχεδὸν ὅλοι οἱ ὅροι τῆς ἀκολουθίας (χ_n) ἢ ὅτι ἡ ἀκολουθία (χ_n) συγκλίνει «κατὰ προσέγγισιν δ» εἰς τὸ χ_0.

Ἐκ τοῦ παραδείγματος αὐτοῦ καθίσταται φανερὰ ἡ χρησιμότης τοῦ ὁρισμοῦ μιᾶς «κατὰ προσέγγισιν συγκλίσεως».

Ἐὰν Α εἶναι τὸ σύνολον τῶν σημείων τῆς ὑπὸ τῆς (1) ὁριζομένης ἀκολουθίας, προφανῶς τὸ χ_0 δὲν εἶναι ὁριακὸν σημεῖον τοῦ Α, δηλαδὴ (ἴδε § 2) δὲν εἶναι ἀληθὲς ὅτι:

$$\forall \varepsilon > 0, \ \pi_1(\chi_0, \varepsilon) \cap A \neq \varnothing.$$

Διότι, ἐὰν $0 < \varepsilon < \delta$, τότε $\pi_1(\chi_0, \varepsilon) \cap A = \varnothing$.

Ἐν τούτοις εἶναι φανερὸν ὅτι:

$$\forall \varepsilon > \delta, \ \pi_1(\chi_0, \varepsilon) \cap A \neq \varnothing,$$

ἤτοι ἑκάστη περιοχὴ $\pi(\chi_0, \varepsilon)$ ἀκτῖνος $\varepsilon > \delta$ περιέχει τοὐλάχιστον ἕνα σημεῖον τοῦ Α, διάφορον τοῦ χ_0.

Ἐκ τῆς παρατηρήσεως ταύτης καθίσταται φανερὰ ἡ χρησιμότης τοῦ ὁρισμοῦ τῆς ἐννοίας τοῦ «κατὰ προσέγγισιν» ὁριακοῦ σημείου, ἑνὸς ὑποσυνόλου Α μετρικοῦ χώρου Χ.

Γεννᾶται ἑπομένως τὸ πρόβλημα τοῦ ὁρισμοῦ ἀφ' ἑνὸς μὲν τῆς «κατὰ προσέγγισιν» συγκλίσεως ἀκολουθίας σημείων ἑνὸς μετρικοῦ χώρου Χ καὶ ἀφ' ἑτέρου τοῦ ὁρισμοῦ τῆς ἐννοίας τῶν «κατὰ προσέγγισιν» ὁριακῶν σημείων συνόλου Α, ὑποσυνόλου τοῦ Χ.

Οἱ ὁρισμοὶ ὅμως αὐτοὶ θέτουν κατ' ἀνάγκην καὶ τὸ πρόβλημα τῆς καταλλήλου τροποποιήσεως τῶν ἐννοιῶν τοῦ μεμονωμένου, τοῦ ἐσωτερικοῦ, τοῦ συνοριακοῦ καὶ τοῦ ἐξωτερικοῦ σημείου ὑποσυνόλου Α τοῦ Χ.

Οἱ νέοι οὗτοι ὁρισμοὶ πρέπει νὰ εἶναι γενικεύσεις τῶν γνωστῶν ὁρισμῶν εἰς τρόπον, ὥστε ἑκάστη τῶν ὡς ἄνω ἐννοιῶν νὰ προκύπτῃ ὡς εἰδικὴ περίπτωσις τῆς ἀντιστοίχου νέας τοιαύτης.

Ἐπίσης τῇ βοηθείᾳ τῶν ἐννοιῶν τούτων θὰ πρέπῃ νὰ ὁρίζωνται καὶ αἱ ἔννοιαι αἱ ἀντίστοιχοι πρὸς τὰς ἐννοίας τοῦ παραγώγου συνόλου, τοῦ περιβλήματος, τοῦ ἐσωτερικοῦ, τοῦ ἐξωτερικοῦ καὶ τοῦ συνόρου συνόλου $A \subseteq X$ (ἴδε § 3).

Σκοπὸς τῆς παρούσης ἐργασίας εἶναι ἀφ' ἑνὸς μὲν νὰ ὁρίσῃ τὰς ὡς ἄνω ἀναφερθείσας ἐννοίας καὶ ἀφ' ἑτέρου νὰ δώσῃ μίαν σειρὰν προτάσεων, ἀναλόγων πρὸς τὰς ἐκτεθείσας εἰς τὰς προηγουμένας παραγράφους.

II. ΓΕΝΙΚΕΥΣΙΣ ΘΕΜΕΛΙΩΔΩΝ ΕΝΝΟΙΩΝ ΤΗΣ ΤΟΠΟΛΟΓΙΑΣ ΤΟΥ ΜΕΤΡΙΚΟΥ ΧΩΡΟΥ

1. δ—συγκλίνουσαι ἀκολουθίαι.

Ἔστω (χ_n) μία ἀκολουθία σημείων ἑνὸς μετρικοῦ χώρου X καὶ δ δοθεὶς θετικὸς ἀριθμός.

(1.1) Ὁρισμός: Θὰ λέγωμεν, ὅτι ἡ ἀκολουθία (χ_n) εἶναι *δ — συγκλίνουσα* εἰς τὸ σημεῖον $\chi_0 \in X$, ὅταν:

$$\forall\, \varepsilon > \delta,\ \exists N = N(\varepsilon) \in \Phi,\ \forall n \geqq N,\ \chi_n \in \pi(\chi_0, \varepsilon),$$

ἔνθα Φ τὸ σύνολον τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν.

Τὸ σημεῖον χ_0 καλεῖται *δ — ὅριον*, ἡ δὲ ἀνωτέρω ὁρισθεῖσα σύγκλισις παρίσταται διὰ τοῦ συμβολισμοῦ:

$$\delta - \lim_{n \to \infty} \chi_n = \chi_0,$$

ἢ διὰ τοῦ ἁπλουστέρου συμβολισμοῦ

$$\delta - \lim \chi_n = \chi_0.$$

Ὥστε ἐξ ὁρισμοῦ:

(1.2) $(\delta - \lim \chi_n = \chi_0) \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > \delta,\ \exists N = N(\varepsilon) \in \Phi, \forall n \geqq N, \chi_n \in \pi(\chi_0, \varepsilon))$.

Διὰ $\delta = 0$ ἔχομεν τὴν συνήθη σύγκλισιν, διότι εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν τὸ δεύτερον σκέλος τῆς (1.2) γίνεται:

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N = N(\varepsilon) \in \Phi,\ \forall n \geqq N,\ \chi_n \in \pi(\chi_0, \varepsilon)$$

καὶ ὡς ἐκ τούτου:

$$\lim \chi_n = \chi_0.$$

Θὰ δείξωμεν ὅτι:

(1.3) Τὸ δ — ὅριον μιᾶς δ — συγκλινούσης ἀκολουθίας δὲν ὁρίζεται πάντοτε μονοτίμως.

Τοῦτο διαπιστοῦται ἐκ τοῦ κατωτέρω παραδείγματος:

Ἔστω $X = \mathbf{R}_1$, ἔνθα $\mathbf{R}_1$ τὸ σύνολον τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν καὶ $\chi_0 = 0$. Θεωροῦμεν τὴν ἀκολουθίαν (χ_n), ἔνθα:

$$(1) \qquad \chi_n = \begin{cases} \alpha_n = \delta + \frac{1}{n} & \text{ὅταν n ἄρτιος} \\ \beta_n = -\delta - \frac{1}{n} & \text{ὅταν n περιττός.} \end{cases}$$

Εἶναι φανερὸν ὅτι:

$$(2) \qquad \forall \varepsilon > \delta, \quad \exists N = N(\varepsilon) \in \Phi, \quad \forall n \geqq N, \quad \chi_n \in \pi(\chi_0, \varepsilon),$$

ἤ, λόγῳ τῆς (1.2),

$$\delta - \lim \chi_n = \chi_0,$$

καὶ ἐπὶ πλέον τὸ δ — ὅριον τῆς (χ_n) ὁρίζεται μονοτίμως.

Πράγματι, ἐὰν λάβωμεν ἓν σημεῖον $\chi_0' \in (0, +\infty)$, δὲν εἶναι δυνατὸν νὰ ἔχωμεν:

$$\delta - \lim \chi_n = \chi_0',$$

διότι, ὡς εὐκόλως διαπιστοῦται, ἡ (2) δὲν ἰσχύει διὰ τὸ χ_0'.

Ὁμοίως διαπιστοῦται, ὅτι διὰ τὸ τυχὸν σημεῖον $\chi_0'' \in (-\infty, 0)$ δὲν ἰσχύει ἡ (2).

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συνάγομεν, ὅτι τὸ δ — ὅριον τῆς ἀκολουθίας (χ_n), τῆς ὁριζομένης διὰ τῆς (1), εἶναι μονοτίμως ὡρισμένον.

Ἀντιθέτως διὰ τὴν ἀκολουθίαν (α_n), ἔνθα $\forall n \in \Phi$, $\alpha_n = \delta + \frac{1}{n}$, εἶναι:

$$\chi_0 = \delta - \lim \alpha_n,$$

τὸ δὲ δ — ὅριον τῆς (α_n) δὲν ὁρίζεται μονοτίμως.

Πράγματι, διότι, ἐὰν $\chi_0' \in (0, \delta)$, εἶναι φανερὸν ὅτι:

$$\chi_0' = \delta - \lim \alpha_n.$$

Τὸ αὐτὸ ἰσχύει προφανῶς καὶ διὰ τὴν ἀκολουθίαν (β_n), ἔνθα $\forall n \in \Phi$, $\beta_n = -\delta - \frac{1}{n}$.

Θὰ δείξωμεν ὅτι:

$$(1.4) \qquad ((\chi_n') \subseteq (\chi_n), \ \delta - \lim \chi_n = \chi_0) \Rightarrow (\delta - \lim \chi_n' = \chi_0).$$

Ἀπόδειξις:

Ἔστω $\delta - \lim \chi_n = \chi_0$ καὶ (χ_n') μία ὑπακολουθία τῆς χ_n.

Θὰ δείξωμεν, ὅτι καὶ $\delta - \lim \chi_n' = \chi_0$, ἔνθα $\chi_n' = \chi_{\kappa_n}$ καὶ

$$\kappa_1 < \kappa_2 < \ldots < \kappa_n < \ldots$$

'Εφ' ὅσον $\delta - \lim \chi_n = \chi_0$, θὰ ἔχωμεν:

(1) $\quad \forall \varepsilon > \delta,\ \exists N = N(\varepsilon) \in \Phi,\ \forall n \geqq N,\ \chi_n \in \pi(\chi_0, \varepsilon)$.

Εἶναι φανερὸν ὅμως, ὅτι:

$$\forall n \in \Phi,\ \kappa_n \geqq n,$$

ἑπομένως:

(2) $\quad (n \geqq N(\varepsilon)) \Rightarrow (\kappa_n \geqq N(\varepsilon))$.

'Εκ τῶν (1) καὶ (2) προκύπτει ὅτι:

$$\forall \varepsilon > \delta,\ \exists N = N(\varepsilon) \in \Phi,\ \forall n \geqq N,\ \chi_{\kappa_n} \in \pi(\chi_0, \varepsilon),$$

ἤ, ἐπειδὴ $\chi_{\kappa_n} = \chi_n'$,

$$\forall \varepsilon > \delta,\ \exists N = N(\varepsilon) \in \Phi,\ \forall n \geqq N,\ \chi_n' \in \pi(\chi_0, \varepsilon)$$

καὶ ὡς ἐκ τούτου:

$$\delta - \lim \chi_n' = \chi_0. \qquad \square$$

'Επίσης διαπιστοῦται εὐκόλως ὅτι:

(1.5) $\quad (\delta - \lim \chi_n = \chi_0)\ (\delta' > \delta) \Rightarrow (\delta' - \lim \chi_n = \chi_0)$.

'Απόδειξις:

'Εφ' ὅσον $\delta - \lim \chi_n = \chi_0$, συμφώνως πρὸς τὴν (1.2),

(1) $\quad \forall \varepsilon > \delta,\ \exists N = N(\varepsilon) \in \Phi,\ \forall n \geqq N,\ \chi_n \in \pi(\chi_0, \varepsilon)$.

'Εκ τῆς (1) καὶ τοῦ γεγονότος ὅτι $\delta' > \delta$ προκύπτει προφανῶς ὅτι:

$$\forall \varepsilon > \delta',\ \exists N = N(\varepsilon) \in \Phi,\ \forall n \geqq N,\ \chi_n \in \pi(\chi_0, \varepsilon),$$

καὶ ὡς ἐκ τούτου:

$$\delta' - \lim \chi_n = \chi_0. \qquad \square$$

'Ως γνωστόν, ἐὰν (χ_n) εἶναι μία ἀκολουθία σημείων τοῦ X, τὸ σημεῖον $\chi_0 \in X$, καλεῖται ὁριακὸν σημεῖον τῆς ἀκολουθίας (χ_n), ἐάν:

$$\exists\ (\chi_n') \widetilde{\subset} (\chi_n),\ \lim \chi_n' = \chi_0.$$

Κατόπιν τούτου θὰ δείξωμεν ὅτι:

(1.6) $\quad (\chi_0 = \delta - \lim \chi_n) \Rightarrow (d\ (\chi_0, A) \leqq \delta)$,

ἔνθα A τὸ σύνολον τῶν ὁριακῶν σημείων τῆς ἀκολουθίας (χ_n) καὶ $d\ (\chi_0, A) = \sup\{|\chi\chi_0| : \chi \in A\}$.

'Απόδειξις:

"Εστω $\chi \in A$, ὁπότε:

$$\exists\ (\chi_n') \widetilde{\subset} (\chi_n),\ \lim\chi_n' = \chi.$$

'Επομένως

(1) $\quad \forall K > 0,\ \exists N_1 = N_1(K) \in \Phi,\ \forall n \geqq N_1,\ |\chi_n'\chi| < K.$

'Αλλά, συμφώνως πρὸς τὴν (1.4), ἐκ τῶν σχέσεων

$$(\chi_n') \widetilde{\subset} (\chi_n),\ \delta - \lim\chi_n = \chi_0,$$

προκύπτει ὅτι:

$$\delta - \lim\chi_n' = \chi_0,$$

ἄρα:

(2) $\quad \forall K > 0,\ \ \exists N_2 = N_2(K) \in \Phi,\ \ \forall n \geqq N_2,\ \ |\chi_n'\chi_0| < \delta + K.$

'Εὰν δὲ $N = \max\{N_1, N_2\}$, ἐκ τῶν (1) καὶ (2) προκύπτει ὅτι:

$\forall K > 0,\ \forall n \geqq N,\ |\chi\chi_0| \leqq |\chi\chi_n'| + |\chi_n'\chi_0| < K + \delta + K = \delta + 2K,$

ἤτοι:

$$\forall K > 0,\ \forall \chi \in A,\ |\chi\chi_0| < \delta + 2K,$$

καὶ συνεπῶς:

$$d\ (\chi_0, A) \leqq \delta. \qquad \square$$

2. δ—θεμελιώδεις ἀκολουθίαι.

"Εστω (χ_n) μία ἀκολουθία σημείων ἑνὸς μετρικοῦ χώρου X.

(2.1) 'Ορισμός: 'Η (χ_n) καλεῖται *δ — θεμελιώδης ἀκολουθία*, ἐάν:

$$\forall \varepsilon > \delta,\ \exists N = N(\varepsilon) \in \Phi,\ \forall p \geqq N,\ \forall q \geqq N,\ |\chi_p\chi_q| < \varepsilon.$$

Κατόπιν τούτου εἶναι εὔκολον νὰ διαπιστωθῇ ὅτι:

(2.2) Κάθε δ — συγκλίνουσα ἀκολουθία εἶναι 2δ — θεμελιώδης ἀκολουθία, ἤτοι:

$$(\delta - \lim\chi_n = \chi_0) \Rightarrow ((\chi_n)\ \ 2\delta - \theta\varepsilon\mu\varepsilon\lambda\iota\acute{\omega}\delta\eta\varsigma).$$

'Απόδειξις:

'Εφ' ὅσον $\delta - \lim\chi_n = \chi_0$, συμφώνως πρὸς τὴν (1.2),

$$\forall \frac{\varepsilon}{2} > \delta,\ \exists N = N(\varepsilon) \in \Phi,\quad \forall n \geqq N,\quad \chi_n \in \pi\left(\chi_0, \frac{\varepsilon}{2}\right),$$

ἑπομένως:

$$\forall p \geqq N,\ \forall q \geqq N,\ |\chi_p\chi_0| < \frac{\varepsilon}{2}\ ,\ |\chi_q\chi_0| < \frac{\varepsilon}{2}$$

καὶ ὡς ἐκ τούτου:

$$\forall \frac{\varepsilon}{2} > \delta,\ \exists N = N(\varepsilon) \in \Phi,\ \forall p \geqq N,\ \forall q \geqq N,\ |\chi_p\chi_q| \leqq |\chi_p\chi_0| + |\chi_q\chi_0| < \varepsilon,$$

ἤτοι:

(1) $\forall \varepsilon > 2\delta,\ \exists N = N(\varepsilon) \in \Phi,\ \forall p \geqq N,\ \forall q \geqq N,\ |\chi_p\chi_q| < \varepsilon.$

Ἄμεσος συνέπεια τῆς (1) καὶ τοῦ ὁρισμοῦ (2.1) εἶναι προφανῶς, ὅτι ἡ (χ_n) εἶναι 2δ - θεμελιώδης. □

Θὰ δείξωμεν ὅτι:

(2.3) $\big((\chi_n)\ \delta - \text{θεμελιώδης ἀκολουθία}\big) \Rightarrow \big(d(A) \leqq \delta\big),$
ἔνθα A τὸ σύνολον τῶν ὁριακῶν σημείων τῆς ἀκολουθίας (χ_n) καὶ $d(A)$ ἡ διάμετρος τοῦ A, ἤτοι:

$$d(A) = \sup\{|\chi_1\chi_2| : \chi_1 \in A,\ \chi_2 \in A\}.$$

Ἀπόδειξις:

Ἐὰν χ_1, χ_2 εἶναι δύο τυχόντα σημεῖα τοῦ A, ἐξ ὁρισμοῦ

$$\exists\ (\chi_{\lambda_n}) \widetilde{\subset} (\chi_n),\ \lim \chi_{\lambda_n} = \chi_1 \quad \text{καὶ}$$

$$\exists\ (\chi_{\mu_n}) \widetilde{\subset} (\chi_n),\ \lim \chi_{\mu_n} = \chi_2,$$

ὁπότε:

(1) $\forall K > 0, \exists N_1 = N_1(K) \in \Phi, \forall n \geqq N_1, (|\chi_{\lambda_n}\chi_1| < K)\ (|\chi_{\mu_n}\chi_2| < K).$

Ἐπειδὴ δὲ ἡ (χ_n) εἶναι δ - θεμελιώδης ἀκολουθία, συμφώνως πρὸς τὴν (2.1), ἔχομεν:

(2) $\forall K > 0,\ \exists N_2 = N_2(K) \in \Phi,\ \forall p \geqq N_2,\ \forall q \geqq N_2,\ |\chi_p\chi_q| < \delta + K.$

Ἐπίσης ἐκ τῶν σχέσεων:

$$(\chi_{\lambda_n}) \widetilde{\subset} (\chi_n),\ (\chi_{\mu_n}) \widetilde{\subset} (\chi_n)$$

προκύπτει ὅτι:

$$\exists N_3 = N_3(N_2),\ \forall n \geqq N_3,\ (\lambda_n \geqq N_2).\ (\mu_n \geqq N_2),$$

ὁπότε, λόγῳ τῆς (2),

(3) $\forall K > 0,\ \exists N_3 = N_3(K),\ \forall n \geqq N_3,\ |\chi_{\lambda_n}\chi_{\mu_n}| < \delta + K.$

Ἐὰν δὲ $N = \max\{N_1, N_2, N_3\}$, ἐκ τῶν σχέσεων (1), (3) προκύπτει:

$$\forall K > 0,\ \forall n \geqq N,\ |\chi_1\chi_2| \leqq |\chi_1\chi_{\lambda_n}| + |\chi_{\lambda_n}\chi_{\mu_n}| + |\chi_{\mu_n}\chi_2| <$$
$$< K + K + \delta + K = \delta + 3K,$$

ἤτοι:

$$\forall K > 0,\ \forall(\chi_1,\chi_2) \in \Lambda^2,\ |\chi_1\chi_2| < \delta + 3K,$$

ἑπομένως:

$$d(A) \leqq \delta. \qquad \square$$

3. Ἔννοια τοῦ δ—ὁριακοῦ σημείου. Σύνολα δ—ὁριακῶν σημείων.

Ἔστω X τυχὼν μετρικὸς χῶρος, $\delta > 0$ καὶ A τυχὸν ὑποσύνολον τοῦ X.

(3.1) Ὁρισμός: Τὸ σημεῖον $\chi_0 \in X$ καλεῖται *δ — ὁριακὸν σημεῖον τοῦ A*, ἐάν:

$$\forall \varepsilon > \delta,\ \pi_1(\chi_0,\varepsilon) \cap A \neq \varnothing.$$

(3.2) Ὁρισμός: Τὸ σύνολον τῶν δ — ὁριακῶν σημείων τοῦ Λ καλεῖται *δ — παράγωγον σύνολον τοῦ A* καὶ συμβολίζεται διὰ τοῦ Λ'_δ, ἤτοι:

$$A'_\delta = \{\chi: (\chi \in X)\ (\forall \varepsilon > \delta,\ \pi_1(\chi,\varepsilon) \cap A \neq \varnothing)\}.$$

Εἰς τὴν περίπτωσιν καθ' ἣν $\delta = 0$, τότε ἐκ τῶν ὁρισμῶν (3.1) καὶ (3.2) προκύπτουν ἀντιστοίχως οἱ γνωστοὶ ὁρισμοὶ τῆς ἐννοίας τοῦ ὁριακοῦ σημείου τοῦ Λ καὶ τοῦ παραγώγου συνόλου A' τοῦ Λ.

Θὰ δείξωμεν ὅτι:

(3.3) $\quad (\chi \in \Lambda') \Leftrightarrow (\forall \delta > 0,\ \chi \in A_\delta').$

Ἀπόδειξις:

(α) $\quad (\chi \in A') \Rightarrow (\forall \varepsilon > 0,\ \pi_1(\chi,\varepsilon) \cap \Lambda \neq \varnothing) \Rightarrow$
$\Rightarrow (\forall \delta > 0,\ \forall \varepsilon > \delta,\ \pi_1(\chi,\varepsilon) \cap A \neq \varnothing) \Rightarrow (\forall \delta > 0,\ \chi \in A_\delta').$

(β) Ἔστω $\chi \in X$ καὶ ἐπὶ πλέον:

(1) $$\forall \delta > 0,\ \chi \in A_\delta'.$$

Θεωροῦμεν μίαν ἀκολουθίαν θετικῶν ἀριθμῶν (ε_n) τοιαύτην, ὥστε:

(2) $$\lim_{n \to \infty} \varepsilon_n = 0,$$

καὶ μίαν ἀκολουθίαν (δ_n) τοιαύτην, ὥστε:

(3) $$\forall n \in \Phi,\ \varepsilon_n > \delta_n > 0.$$

'Αλλὰ λόγῳ τῆς (1),

$$\forall n \in \Phi,\ \chi \in A'_{\delta_n},$$

ἐπομένως:

(4) $\qquad \forall n \in \Phi,\ \forall \varepsilon > \delta_n,\ \pi_1(\chi,\varepsilon) \cap A \neq \varnothing.$

῎Ηδη ἐκ τῶν (2), (3) καὶ (4) καθίσταται φανερὸν ὅτι:

$$\forall \varepsilon > 0,\ \pi_1(\chi,\varepsilon) \cap A \neq \varnothing$$

καὶ ὡς ἐκ τούτου $\chi \in A'$. $\square$

'Αντιθέτως, διαπιστοῦται εὐκόλως ὅτι:

(3.4) $\qquad (\exists \delta > 0,\ \chi \in A_\delta') \not\Rightarrow (\chi \in A').$

Πράγματι:

῎Εστω $X = \mathbf{R}_1$ καὶ $A = (-\infty, -\delta] \cup [\delta, +\infty)$.

Εἶναι φανερόν, ὅτι ἐὰν $\chi_0 = 0$, τότε $\chi_0 \in A_\delta'$, ἐνῷ $\chi_0 \notin A'$. $\square$

Θὰ δείξωμεν, ὅτι:

(3.5) $\qquad (A \subseteq X,\ \delta' < \delta) \Rightarrow (A'_{\delta'} \subseteq A_\delta').$

'Απόδειξις:

$$(\chi \in A'_{\delta'}) \Rightarrow (\forall \varepsilon > \delta',\ \pi_1(\chi,\varepsilon) \cap A \neq \varnothing) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (\forall \varepsilon > \delta > \delta',\ \pi_1(\chi,\varepsilon) \cap A \neq \varnothing) \Rightarrow (\chi \in A_\delta').$$

'Επειδὴ δὲ τὸ χ ἐλήφθη τυχὸν σημεῖον τοῦ $A'_{\delta'}$, ἔπεται ὅτι:

$$A'_{\delta'} \subseteq A_\delta'. \qquad \square$$

Εἰς τὴν εἰδικὴν περίπτωσιν, καθ' ἣν $\delta' = 0$, ἔχομεν τὴν ἀκόλουθον πρότασιν:

(3.6) $\qquad \forall \delta > 0, \quad A' \subseteq A_\delta'.$

῾Ως γνωστόν, ἐὰν $A \subseteq X$ καὶ $\chi_0 \in A'$, τότε $\forall \varepsilon > 0$ τὸ σύνολον $\pi_1(\chi_0,\varepsilon) \cap A$ εἶναι ἄπειρον,

ἤτοι:

$$((\chi_0 \in A')\ (\varepsilon > 0)) \Rightarrow (\pi_1(\chi_0,\varepsilon) \cap A \text{ ἄπειρον σύνολον}).$$

'Αντιθέτως εἶναι εὔκολον νὰ διαπιστωθῇ ὅτι:

(3.7) $\quad ((\chi_0 \in A_\delta')\ (\varepsilon > \delta)) \not\Rightarrow (\pi_1(\chi_0,\varepsilon) \cap A \text{ ἄπειρον σύνολον}).$

Πράγματι:

῎Εστω $X = \mathbf{R}_1$, $\chi_0 = 0$ καὶ $A = (-\infty, -2\delta) \cup (2\delta, +\infty) \cup \{\chi_1\}$, ἔνθα $|\chi_0\chi_1| < \delta$.

Προφανῶς:

$$\forall \varepsilon > \delta, \quad \pi_1\,(\chi_0,\varepsilon) \cap A \neq \varnothing,$$

ἤτοι $\chi_0 \in A_\delta'$.

Ἐν τούτοις εἶναι φανερὸν ὅτι:

$$\exists \varepsilon_1 > \delta, \quad \pi_1\,(\chi_0,\varepsilon_1) \cap A = \{\chi_1\}. \qquad \square$$

Θὰ δείξωμεν ὅτι:

(3.8) $$(\chi_0 \in A_\delta') \Rightarrow (\rho(\chi_0,A) \leq \delta),$$

ἔνθα $\rho(\chi_0,A) = \inf\{|\chi\chi_0| : \chi \in A\}$.

Ἀπόδειξις:

Ἔστω $\chi_0 \in A_\delta'$ καὶ ὅτι $\rho(\chi_0,A) > \delta$. Θέτομεν $\rho(\chi_0,A) = \delta + K$, ἔνθα $K > 0$, ἤτοι:

$$\inf\{|\chi\chi_0| : \chi \in A\} = \delta + K.$$

Ἐὰν $0 < K_1 < K$ καὶ $\varepsilon_1 = \delta + K_1$, εἶναι φανερὸν ὅτι:

$$\pi_1\,(\chi_0,\varepsilon_1) \cap A = \varnothing$$

διότι ἐὰν $\pi_1(\chi_0,\varepsilon_1) \cap A \neq \varnothing$, τότε προφανῶς

$$\rho(\chi_0,A) \leqq \varepsilon_1 = \delta + K_1 < \delta + K,$$

πρᾶγμα ἄτοπον.

Ὥστε, ἐὰν ὑποτεθῇ ὅτι $\rho(\chi_0,A) > \delta$, τότε

$$\exists\, \varepsilon_1 > \delta,\ \pi_1\,(\chi_0,\varepsilon_1) \cap A = \varnothing.$$

Τοῦτο ὅμως εἶναι ἄτοπον, διότι ὑπετέθη ὅτι $\chi_0 \in A_\delta'$.

Ἄρα $\rho(\chi_0,A) \leqq \delta$. $\square$

Ἐπίσης θὰ δείξωμεν ὅτι:

(3.9) $$(\rho(\chi_0,A) \leqq \delta) \Rightarrow (\chi \in \bar{A} \ \text{ἢ}\ \chi \in A_\delta').$$

Ἀπόδειξις:

Ἔστω ὅτι $\rho(\chi_0,A) \leq \delta$, ὁπότε ἢ

(1) $$\rho(\chi_0,A) = 0, \quad \text{ἢ}$$

(2) $$0 < \rho(\chi_0,A) \leqq \delta.$$

Ἐκ τῆς (1) συνάγεται ὅτι $\chi_0 \in \bar{A}$.

Ἐκ τῆς (2) ἐπίσης προκύπτει, ὅτι:

(3) $$\forall\, \varepsilon > \delta, \quad \pi_1\,(\chi_0,\varepsilon) \cap A \neq \varnothing.$$

Διότι, ἐάν:

$$\exists\, \varepsilon_1 > \delta, \quad \pi_1\,(\chi_0,\varepsilon_1) \cap \Lambda = \varnothing,$$

τότε:

$$\forall\, \chi \in \Lambda, \ |\chi\chi_0| \geqq \varepsilon_1.$$

Ἑπομένως $\rho(\chi_0,\Lambda) \geqq \varepsilon_1 > \delta$, πρᾶγμα ἄτοπον.

Ἄρα ἡ (3) εἶναι ἀληθὴς καὶ ὡς ἐκ τούτου $\chi_0 \in \Lambda_\delta'$.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω προκύπτει τελικῶς ὅτι:

$$(\rho(\chi_0,\Lambda) \leqq \delta) \Rightarrow (\chi_0 \in \bar{\Lambda} \ \text{ἢ} \ \chi_0 \in \Lambda_\delta'). \qquad \square$$

Ἤδη θὰ δείξωμεν ὅτι:

(3.10) $(\chi_0 \in \Lambda'_\delta) \Leftrightarrow (\exists\,(\chi_n),\ \forall n \in \Phi,\ \chi_n \in \Lambda,\ \chi_n \neq \chi_0,\ \delta\text{—}\lim\chi_n = \chi_0)$.

Ἀπόδειξις:

(α) Συμφώνως πρὸς τὸν ὁρισμὸν (3.2),

(1) $\qquad (\chi_0 \in \Lambda_\delta') \Rightarrow (\forall\varepsilon > \delta,\ \pi_1(\chi_0,\varepsilon) \cap \Lambda \neq \varnothing)$.

Ἀλλά, ὡς γνωστόν, ὑπάρχει μία τοὐλάχιστον ἀκολουθία (δ_n) θετικῶν ἀριθμῶν τοιαύτη, ὥστε:

(2) $\qquad \forall n \in \Phi, \quad \delta_n > \delta_{n+1} > \delta$

καὶ

(3) $\qquad \lim\limits_{n \to \infty}\delta_n = \delta.$

Ἐκ τῶν (1) καὶ (2) προκύπτει προφανῶς, ὅτι:

$$\forall n \in \Phi, \quad \pi_1(\chi_0,\delta_n) \cap \Lambda \neq \varnothing.$$

Σχηματίζομεν ἤδη τὴν ἀκολουθίαν (χ_n), ἔνθα:

(4) $\qquad \forall n \in \Phi,\ \chi_n \in \pi_1\,(\chi_0,\delta_n) \cap \Lambda.$

Εἶναι φανερὸν ὅτι:

(5) $\qquad \forall n \in \Phi,\ (\chi_n \in \Lambda)\ \ (\chi_n \neq \chi_0).$

Θὰ δείξωμεν ἐπὶ πλέον ὅτι:

(6) $\qquad \delta - \lim\chi_n = \chi_0.$

Πράγματι ἐκ τῶν (2) καὶ (3) συνάγομεν ὅτι:

(7) $\qquad \forall\varepsilon > \delta,\ \exists N = N(\varepsilon) \in \Phi,\ \ \forall n \geqq N,\ \ \delta_n < \varepsilon.$

Ἤδη ἐκ τῶν (4) καὶ (7) προκύπτει ὅτι:

$$\forall\varepsilon > \delta,\ \exists N = N(\varepsilon) \in \Phi, \quad \forall n \geqq N, \quad \chi_n \in \pi(\chi_0,\varepsilon)$$

καὶ ὡς ἐκ τούτου ἡ (6) εἶναι ἀληθής.

Ἐκ τῶν (5) καὶ (6) συνάγομεν τελικῶς ὅτι:

$$(8) \qquad (\chi_0 \in A_\delta') \Rightarrow (\exists (\chi_n), \quad \forall n \in \Phi, \quad \chi_n \in A, \quad \chi_n \neq \chi_0, \\ \delta - \lim \chi_n = \chi_0).$$

(β) Εἶναι φανερὸν ὅτι:

$$(\exists (\chi_n), \ \forall n \in \Phi, \ \chi_n \in A, \ \chi_n \neq \chi_0, \ \delta - \lim \chi_n = \chi_0) \Rightarrow \\ \Rightarrow (\forall \varepsilon > \delta, \ \exists N = N(\varepsilon) \in \Phi, \ \forall n \geqq N, \ \chi_n \in \pi_1(\chi_0, \varepsilon)).$$

Ἑπομένως:

$$\forall \varepsilon > \delta, \ \pi_1(\chi_0, \varepsilon) \cap A \neq \varnothing,$$

δηλαδὴ $\chi_0 \in A_\delta'$ καὶ ὡς ἐκ τούτου:

$$(9) \ (\exists (\chi_n), \ \forall n \in \Phi, \ \chi_n \in A, \ \chi_n \neq \chi_0, \ \delta - \lim \chi_n = \chi_0) \Rightarrow (\chi_0 \in A_\delta').$$

Ἐκ τῶν (8) καὶ (9) προκύπτει, ὅτι ἡ τεθεῖσα πρότασις εἶναι ἀληθής. □

Τέλος θὰ δείξωμεν ὅτι:

$$(3.11) \qquad (A \subseteq B) \Rightarrow (\forall \delta > 0, \ A_\delta' \subseteq B_\delta').$$

Ἀπόδειξις:

$$(\chi \in A_\delta') \Rightarrow (\forall \varepsilon > \delta, \ \pi_1(\chi, \varepsilon) \cap A \neq \varnothing)$$

καί, ἐπειδὴ $A \subseteq B$, κατὰ μείζονα λόγον

$$\forall \varepsilon > \delta, \ \pi_1(\chi, \varepsilon) \cap B \neq \varnothing.$$

Ἑπομένως $\chi \in B_\delta'$ καὶ ὡς ἐκ τούτου

$$\forall \delta > 0, \ A_\delta' \subseteq B_\delta'. \qquad \square$$

(3.12) Ὁρισμός: Τὸ σημεῖον $\chi_0 \in A$ καλεῖται *δ — μεμονωμένον σημεῖον τοῦ A*, ἐάν:

$$\exists \varepsilon > \delta, \qquad \pi_1(\chi_0, \varepsilon) \cap A = \varnothing.$$

Ὥστε:

Ἐὰν $\delta > 0$ καὶ $\chi_0 \in A$, τότε ἐξ ὁρισμοῦ:

$$(\chi_0 \ \delta - \text{μεμονωμένον σημεῖον τοῦ } A) \Leftrightarrow (\exists \varepsilon > \delta, \ \pi_1(\chi_0, \varepsilon) \cap A = \varnothing).$$

Διαπιστοῦται εὐκόλως ὅτι:

$$(3.13) \quad (\exists \ \delta, \ \chi_0 \ \delta - \text{μεμονωμένον σημεῖον τοῦ } A) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (\chi_0 \text{ μεμονωμένον σημεῖον τοῦ } A).$$

'Απόδειξις:

(α) $(\exists\, \delta,\ \chi_0\ \delta$ — μεμονωμένον σημεῖον τοῦ Α$) \Rightarrow$

$\Rightarrow (\exists \varepsilon_1 > \delta,\ \pi_1 (\chi_0,\varepsilon_1) \cap A = \varnothing) \Rightarrow$

$\Rightarrow (\exists \varepsilon_1 > 0,\ \pi_1 (\chi_0,\varepsilon_1) \cap A = \varnothing) \Rightarrow$ (χ_0 μεμονωμένον σημεῖον τοῦ Α).

(β) 'Αντιστρόφως:

(χ_0 μεμονωμένον σημεῖον τοῦ Α$) \Rightarrow$

$\Rightarrow (\exists \varepsilon_1 > 0,\ \pi_1 (\chi_0,\varepsilon_1) \cap A = \varnothing) \Rightarrow$

$\Rightarrow (\exists \delta,\ \chi_0\ \delta$ — μεμονωμένον σημεῖον τοῦ Α),

ἔνθα $\varepsilon_1 > \delta > 0$.

'Εκ τῶν (α) καὶ (β) συνάγεται, ὅτι ἡ τεθεῖσα πρότασις εἶναι ἀληθής. □

'Επίσης εἶναι φανερὸν ὅτι:

(3.14) (χ_0 μεμονωμένον σημεῖον τοῦ Α$) \not\Rightarrow$

$\not\Rightarrow (\forall \delta > 0,\ \chi_0\ \delta$ — μεμονωμένον σημεῖον τοῦ Α).

Πράγματι:

Ἔστω $X = \mathbf{R}_1$, $\chi_0 = 0$ καὶ $A = (-\infty, -\delta] \cup [\delta, +\infty) \cup \{\chi_0\}$.

Προφανῶς τὸ σημεῖον χ_0 εἶναι μεμονωμένον σημεῖον τοῦ Α, ἐνῷ δὲν εἶναι δ — μεμονωμένον σημεῖον αὐτοῦ. □

4. 'Επέκτασις συνόλου.

(4.1) Ὁρισμός: 'Εὰν $\varnothing \subset A \subseteq X$, τὸ σύνολον

$$\bigcup_{\chi_0 \varepsilon A} \overline{\pi}(\chi_0,\varepsilon),$$

ἔνθα $\overline{\pi}(\chi_0,\varepsilon) = \{\chi\colon (\chi \in X)\ (|\chi\chi_0| \leqq \varepsilon)\}$ καὶ $\varepsilon > 0$, καλεῖται *ε — ἐπέκτασις τοῦ A* καὶ παρίσταται διὰ τοῦ $\overline{\pi}(A,\varepsilon)$, ἤτοι:

$$\overline{\pi}(A,\varepsilon) = \bigcup_{\chi_0 \varepsilon A} \{\chi\colon (\chi \in X)\ (|\chi\chi_0| \leqq \varepsilon)\}.$$

'Επίσης τὸ σύνολον:

$$\bigcup_{\chi_0 \varepsilon A} \overline{\pi}_1(\chi_0,\varepsilon),$$

ἔνθα $\overline{\pi}_1(\chi_0,\varepsilon) = \{\chi\colon (\chi \in X)\ (0 < |\chi\chi_0| \leqq \varepsilon)\}$, καλεῖται *περιωρισμένη ε — ἐπέκτασις* τοῦ Α καὶ παρίσταται διὰ τοῦ $\overline{\pi}_1(A,\varepsilon)$, ἤτοι:

$$\{\overline{\pi}_1(A,\varepsilon) = \bigcup_{\chi_0 \varepsilon A} \{\chi\colon (\chi \in X)\ (0 < |\chi\chi_0| \leqq \varepsilon)\}.$$

Διαπιστοῦται εὐκόλως ὅτι:

(4.2) Δὲν εἶναι ἐν γένει ἀληθὲς ὅτι:

$$\overline{\pi}_1(A,\varepsilon) = \overline{\pi}(A,\varepsilon) - A.$$

Πράγματι:

Ἔστω $X = \mathbf{R}_2 = \mathbf{R}_1 \times \mathbf{R}_1$ καὶ $A = \{\chi\colon (\chi \in X)\ (|\chi\chi_0| \leqq \rho)\} \subseteq X$.

Εἶναι φανερὸν ὅτι:

$\forall \varepsilon > 0,\ \overline{\pi}_1(A,\varepsilon) = \overline{\pi}(A,\varepsilon) = \{\chi\colon (\chi \in X)\ (|\chi\chi_0| \leqq \rho + \varepsilon)\}$.

Ἑπομένως:

$$\overline{\pi}_1(A,\varepsilon) \neq \overline{\pi}(A,\varepsilon) - A.$$

Ἀντιθέτως:

Ἔστω $X = \mathbf{R}_2$. Καλύπτομεν τὸ ἐπίπεδον μὲ ἓν δίκτυον τετραγώνων πλευρᾶς $\alpha > \varepsilon$, ἔνθα $\varepsilon > 0$, καὶ θεωροῦμεν τὸ σύνολον A, τοῦ ὁποίου τὰ σημεῖα εἶναι αἱ κορυφαὶ τῶν κατασκευασθέντων τετραγώνων.

Προφανῶς ἔχομεν:

$$\forall \chi_0 \in A, \quad \overline{\pi}_1(\chi_0,\varepsilon) = \overline{\pi}(\chi_0,\varepsilon) - \{\chi_0\}$$

καὶ

(1) $$\overline{\pi}_1(A,\varepsilon) = \overline{\pi}(A,\varepsilon) - A.$$

Ὥστε ἡ (1) δύναται νὰ εἶναι ἀληθὴς ἢ καὶ νὰ μὴν εἶναι. □

Εἶναι φανερὸν ὅτι:

(4.3) $$(A \subseteq B) \Rightarrow \big(\overline{\pi}(A,\varepsilon) \subseteq \overline{\pi}(B,\varepsilon)\big).$$

Θὰ δείξωμεν ὅτι:

(4.4) Εἶναι δυνατόν:

$$A \supset B \text{ καὶ } \overline{\pi}(A,\varepsilon) = \overline{\pi}(B,\varepsilon).$$

Πράγματι:

Ἔστω $X = \mathbf{R}_2$, $A = \{\chi\colon (\chi \in X)\ (|\chi\chi_0| \leqq \rho)\}$ καὶ

$B = \{\chi\colon (\chi \in X)\ (0 < |\chi\chi_0| \leqq \rho)\}$, ὁπότε $A = B \cup \{\chi_0\}$, ἤτοι $A \supset B$.

Εἶναι φανερὸν ὅτι:

$$\overline{\pi}(A,\varepsilon) = \overline{\pi}(B,\varepsilon) = \{\chi\colon (\chi \in X)\ (|\chi\chi_0| \leqq \rho + \varepsilon)\}. \quad \square$$

Ἐπίσης θὰ δείξωμεν ὅτι:

(4.5) Εἶναι δυνατὸν νὰ ἔχωμεν:

$$A \cap B = \varnothing \text{ καὶ } \overline{\pi}(A,\varepsilon) = \overline{\pi}(B,\varepsilon).$$

Ἀπόδειξις:

Καλύπτομεν τὸ ἐπίπεδον μὲ ἓν δίκτυον τετραγώνων πλευρᾶς $\alpha < \varepsilon$ καὶ θεωροῦμεν τὸ σύνολον A, τοῦ ὁποίου τὰ σημεῖα εἶναι αἱ κορυφαὶ τῶν κατασκευασθέντων τετραγώνων. Ἐπίσης θεωροῦμεν τὸ σύνολον B, τοῦ ὁποίου τὰ σημεῖα εἶναι τὰ μέσα τῶν πλευρῶν τῶν ἀνωτέρω τετραγώνων.

Προφανῶς εἶναι:

$$A \cap B = \varnothing \text{ καὶ } \overline{\pi}(A,\varepsilon) = \overline{\pi}(B,\varepsilon) = \mathbf{R}_2. \qquad \square$$

Θὰ δείξωμεν ἤδη ὅτι:

(4.6) (α) $(\chi \in \overline{\pi}(A,\varepsilon)) \Rightarrow (\rho(\chi,A) \leqq \varepsilon)$.

(β) $(\rho(\chi,A) < \varepsilon) \Rightarrow (\chi \in \overline{\pi}(A,\varepsilon))$.

(γ) $(\rho(\chi,A) = \varepsilon) \not\Rightarrow (\chi \in \overline{\pi}(A,\varepsilon))$.

Ἀπόδειξις:

(α) Συμφώνως πρὸς τὸν ὁρισμὸν (4.1), ἔχομεν:

$$\overline{\pi}(A,\varepsilon) = \bigcup_{\chi_0 \in A} \overline{\pi}(\chi_0,\varepsilon),$$

καὶ συνεπῶς:

$$(\chi \in \overline{\pi}(A,\varepsilon)) \Rightarrow (\exists\, \chi_0 \in A,\ \chi \in \overline{\pi}(\chi_0,\varepsilon)) \Rightarrow (\exists \chi_0 \in A,\ |\chi\chi_0| \leqq \varepsilon) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (\rho(\chi_0,A) \leqq \varepsilon).$$

Ἑπομένως ἡ (α) εἶναι ἀληθής.

(β) Ἐξ ὁρισμοῦ ἔχομεν $\rho(\chi,A) = \inf\{|\chi\chi_1| : \chi_1 \in A\}$.

Ἑπομένως:

$$(\forall\, \chi_1 \in A,\ |\chi\chi_1| > \varepsilon) \Rightarrow (\rho(\chi,A) \geqq \varepsilon).$$

Ἄμεσος συνέπεια τούτου εἶναι προφανῶς ὅτι:

$$(\rho(\chi,A) < \varepsilon) \Rightarrow (\exists\, \chi_0 \in A,\ |\chi\chi_0| \leqq \varepsilon) \Rightarrow (\exists\, \chi_0 \in A,\ \chi \in \overline{\pi}\ (\chi_0,\varepsilon)).$$

Ἑπομένως $\chi \in \overline{\pi}(A,\varepsilon)$ καὶ ὡς ἐκ τούτου ἡ (β) εἶναι ἀληθής.

(γ) Ἔστω $A = \{\chi\colon (\chi \in X)\ (|\chi\chi_0| < \rho)\}$, ἔνθα $X = \mathbf{R}_2$.

Εἶναι φανερὸν ὅτι:

$$\pi(A,\varepsilon) = \{\chi\colon (\chi \in X)\ (|\chi\chi_0| < \rho + \varepsilon)\}.$$

Ἀλλά:

$$(\chi_1 \in \{\chi\colon (\chi \in X)\ (|\chi\chi_0| = \rho + \varepsilon)\}) \Rightarrow (\rho(\chi_1,A) = \varepsilon)$$

καὶ ἐν τούτοις $\chi_1 \notin \overline{\pi}(A,\varepsilon)$.

Ἄμεσος συνέπεια τούτου εἶναι προφανῶς ἡ ἰσχὺς τῆς (γ). □

Θὰ δείξωμεν ἐπίσης ὅτι:

(4.7) $\forall A \subseteq X,\ \forall\delta > 0,\ \overline{\pi}_1(A,\delta) \subseteq A_\delta'.$

Ἀπόδειξις:

$$(\chi \in \overline{\pi}_1(A,\delta)) \Rightarrow (\exists\ \chi_0 \in A,\ \chi \in \overline{\pi}_1(\chi_0,\delta)) \Rightarrow (\exists \chi_0 \in A,\ \chi \neq \chi_0,\ |\chi\chi_0| \leqq \delta).$$

Ἐπομένως:

$$\forall\varepsilon > \delta,\ \pi_1(\chi,\varepsilon) \cap A \neq \varnothing$$

καὶ ὡς ἐκ τούτου $\chi \in A_\delta'$. □

Ἀντιθέτως, διαπιστοῦται εὐκόλως ὅτι:

(4.8) $(\chi \in A_\delta') \not\Rightarrow (\chi \in \overline{\pi}_1(A,\delta))$.

Πράγματι:

Ἔστω $A = \{\chi\colon (\chi \in X)\ (|\chi\chi_0| < \rho)\}$, ἔνθα $X = \mathbf{R}_2$.

Προφανῶς ἔχομεν:

$$\overline{\pi}_1(A,\delta) = \{\chi\colon (\chi \in X)\ (|\chi\chi_0| < \rho + \delta)\}.$$

Ἀλλά, ἐὰν ληφθῇ

$$\chi_1 \in \{\chi\colon (\chi \in X)\ (|\chi\chi_0| = \rho + \delta)\},$$

θὰ εἶναι:

$$\forall\varepsilon > \delta,\ \pi_1(\chi_1,\varepsilon) \cap A \neq \varnothing.$$

Ἐπομένως:

$$\chi_1 \in A_\delta',\ \text{ἐνῷ}\ \chi_1 \notin \overline{\pi}_1(A,\delta).$$

Ὡς ἐκ τούτου ἡ τεθεῖσα πρότασις εἶναι ἀληθής. □

5. Ἔννοια τοῦ δ—περιβλήματος συνόλου. Ἰδιότητες.

Ἔστω A τυχὸν ὑποσύνολον μετρικοῦ χώρου X καὶ $\delta > 0$.

(5.1) Ὁρισμός: Τὸ σύνολον $A \cup A_\delta'$ καλεῖται *δ — περίβλημα τοῦ συνόλου A* καὶ παρίσταται διὰ τοῦ συμβολισμοῦ $\bar{A}_\delta'$, ἤτοι:

$$\bar{A}_\delta = A \cup A_\delta'.$$

Συμφώνως πρὸς τὴν πρότασιν (3.6)

$$\forall A \subseteq X,\ \forall\delta > 0,\ A' \subseteq A_\delta'\cdot$$

ἄμεσος συνέπεια τούτου καὶ τοῦ προηγουμένου ὁρισμοῦ (5.1) εἶναι προφανῶς ὅτι:

(5.2) $$\forall\, A \subseteq X,\ \forall\delta > 0,\ \bar{A} \subseteq \bar{A}_\delta.$$

Εἶναι φανερὸν ἐπίσης, ὅτι διὰ $\delta = 0$, εἶναι $\bar{A} = \bar{A}_\delta$, δηλαδὴ ὁ ὁρισμὸς (5.1), εἰς τὴν εἰδικὴν περίπτωσιν καθ' ἣν $\delta = 0$, ἀνάγεται εἰς τὸν γνωστὸν ὁρισμὸν τῆς ἐννοίας τοῦ περιβλήματος $\bar{A}$ τοῦ συνόλου A.

Θὰ δείξωμεν ὅτι:

(5.3) $$\forall\, A \subseteq X,\ \forall\, \delta > 0,\ \overline{\pi}(A,\delta) \subseteq \bar{A}_\delta.$$

Ἀπόδειξις:

Ἔστω $\chi_0 \in \overline{\pi}(A,\delta)$. Ἐὰν $\chi_0 \in A$, τότε κατὰ τὸν ὁρισμὸν (5.1) τὸ $\chi_0 \in \bar{A}_\delta$.

Ἂς ὑποθέσωμεν ἤδη, ὅτι:

(1) $$(\chi_0 \in \overline{\pi}(A,\delta))\ (\chi_0 \notin A).$$

Ἄμεσος συνέπεια τῆς ὑποθέσεως (1) καὶ τοῦ ὁρισμοῦ (4.1) εἶναι προφανῶς ὅτι:

(2) $$\exists \chi_1 \in A,\ \chi_0 \in \overline{\pi}(\chi_1,\delta).$$

Ἀλλὰ ἐκ τῶν (1) καὶ (2) προκύπτει ὅτι:

$$\forall\varepsilon > \delta,\ \pi_1(\chi_0,\varepsilon) \cap A \neq \varnothing.$$

Ἑπομένως $\chi_0 \in A_\delta'$ καὶ κατὰ μείζονα λόγον $\chi_0 \in \bar{A}_\delta$. □

Ἐκ τῶν (5.1), (5.3) καὶ τοῦ γεγονότος ὅτι:

$$\forall\, A \subseteq X,\ \forall\delta > 0,\ A \subseteq \overline{\pi}(A,\delta),$$

συνάγομεν ὅτι:

(5.4) $$\forall\, A \subseteq X,\ \forall\, \delta > 0,\ \bar{A}_\delta = \overline{\pi}(A,\delta) \cup A_\delta'.$$

Θὰ δείξωμεν ἤδη, ὅτι:

(5.5) $$(\chi \in \bar{A}_\delta) \Leftrightarrow (\forall\varepsilon > \delta,\ \pi(\chi,\varepsilon) \cap A \neq \varnothing),$$

ἤτοι:

$$\bar{A}_\delta = \{\chi\colon (\chi \in X)\ (\forall\varepsilon > \delta,\ \pi(\chi,\varepsilon) \cap A \neq \varnothing)\}.$$

Ἀπόδειξις:

(α) Ἔστω $\chi \in X$ καὶ ἔστω ὅτι

(1) $$\forall\varepsilon > \delta,\ \pi(\chi,\varepsilon) \cap A \neq \varnothing.$$

Ἐὰν $\chi \notin A$, τότε ἐκ τῆς (1) προκύπτει:

(2) $$\forall\varepsilon > \delta,\ \pi_1(\chi,\varepsilon) \cap A \neq \varnothing.$$

"Αρα $\chi \in A'_\delta$, ὁπότε $\chi \in \bar{A}_\delta = A \cup A_\delta'$.

'Εὰν $\chi \in A$, τότε προφανῶς $\chi \in \bar{A}_\delta$.

'Εκ τῶν ἀνωτέρω συνάγεται ὅτι:

(3) $$(\forall \varepsilon > \delta,\ \pi(\chi,\varepsilon) \cap A \neq \varnothing) \Rightarrow (\chi \in \bar{A}_\delta).$$

(β) "Εστω $\chi \in \bar{A}_\delta$, ὁπότε $\chi \in A$ ἢ $\chi \in A_\delta'$.

'Εὰν $\chi \in A$, προφανῶς ἰσχύει ἡ (1).

'Εὰν $\chi \in A_\delta'$, τότε ἰσχύει ἡ (2), ἑπομένως ἰσχύει καὶ ἡ (1).

Κατὰ συνέπειαν:

(4) $$(\chi \in \bar{A}_\delta) \Rightarrow (\forall \varepsilon > \delta,\ \pi(\chi,\varepsilon) \cap A \neq \varnothing).$$

'Εκ τῶν (3) καὶ (4) προκύπτει, ὅτι ἡ τεθεῖσα πρότασις εἶναι ἀληθής. □

'Αποδεικνύεται εὐκόλως ὅτι:

(5.6) $$(A \subseteq B) \Rightarrow (\forall \delta > 0,\quad \bar{A}_\delta \subseteq \bar{B}_\delta).$$

'Απόδειξις:

$$(\chi \in \bar{A}_\delta) \Rightarrow (\forall \varepsilon > \delta,\ \pi(\chi,\varepsilon) \cap A \neq \varnothing).$$

Καί, ἐπειδὴ $A \subseteq B$ κατὰ μείζονα λόγον

$$\forall\ \varepsilon > \delta,\ \pi(\chi,\varepsilon) \cap B \neq \varnothing.$$

"Αρα $\chi \in \bar{B}_\delta$ καὶ ὡς ἐκ τούτου

$$\forall \delta > 0,\ \bar{A}_\delta \subseteq \bar{B}_\delta. \quad \square$$

Κατόπιν τούτων θὰ δείξωμεν ὅτι:

(5.7) 'Εὰν $(A_i)_{i\varepsilon I}$ εἶναι μία οἰκογένεια ὑποσυνόλων τοῦ X, τότε ἰσχύουν αἱ σχέσεις:

(α) $$\bigcup_{i\varepsilon I} (\bar{A}_i)_\delta \subseteq \overline{(\bigcup_{i\varepsilon I} A_i)}_\delta$$

καὶ

(β) $$\overline{(\bigcap_{i\varepsilon I} A_i)}_\delta \subseteq \bigcap_{i\varepsilon I} (\bar{A}_i)_\delta.$$

'Απόδειξις:

(α) Εἶναι φανερὸν ὅτι:

$$\forall i \in I,\ A_i \subseteq \bigcup_{i\varepsilon I} A_i,$$

ὁπότε, λόγῳ τῆς προηγουμένης προτάσεως (5.6), ἔχομεν:

$$\forall i \in I,\ (\bar{A}_i)_\delta \subseteq \overline{(\bigcup_{i\varepsilon I} A_i)}_\delta$$

καὶ ὡς ἐκ τούτου:

$$\bigcup_{i\in I} (\overline{A_i})_\delta \subseteq (\overline{\bigcup_{i\in I} A_i})_\delta.$$

Ὁμοίως ἀποδεικνύεται καὶ ἡ (β). $\square$

Εἰς τὴν εἰδικὴν περίπτωσιν, καθ' ἣν τὸ σύνολον δεικτῶν I τῆς οἰκογενείας $(A_i)_{i\in I}$ εἶναι πεπερασμένον, θὰ δείξωμεν ὅτι:

(5.8) Ἐὰν $A_K \subseteq X$ διὰ $\kappa = 1,2,\dots n$,

τότε:

$$(\overline{\bigcup_{K=1}^{n} A_K})_\delta = \bigcup_{K=1}^{n} (\overline{A_K})_\delta.$$

Ἀπόδειξις:

Ἔστω $\chi \in (\overline{\bigcup_{K=1}^{n} A_K})_\delta$, ὁπότε, συμφώνως πρὸς τὴν πρότασιν (5.5),

(1) $$\forall \varepsilon > \delta,\ \pi(\chi,\varepsilon) \cap \left(\bigcup_{K=1}^{n} A_K\right) \neq \varnothing.$$

Ἐκ τῆς (1) καὶ τοῦ γεγονότος, ὅτι τὰ σύνολα A_K εἶναι πεπερασμένου πλήθους, προκύπτει ὅτι:

(2) $$\forall \varepsilon > \delta,\ \exists \kappa \in \Phi_n = \{1,2,\dots,n\},\ \pi(\chi,\varepsilon) \cap A_K \neq \varnothing.$$

Ἄμεσος συνέπεια τῆς (2) εἶναι προφανῶς ὅτι:

$$\exists \kappa \in \Phi_n,\ \chi \in (\overline{A_K})_\delta,$$

ἑπομένως:

$$\chi \in \bigcup_{K=1}^{n} (\overline{A_K})_\delta.$$

Ὥστε:

$$\left(\chi \in (\overline{\bigcup_{K=1}^{n} A_K})_\delta\right) \Rightarrow \left(\chi \in \bigcup_{K=1}^{n} (\overline{A_K})_\delta\right)$$

καὶ ὡς ἐκ τούτου:

(3) $$(\overline{\bigcup_{K=1}^{n} A_K})_\delta \subseteq \bigcup_{K=1}^{n} (\overline{A_K})_\delta.$$

Ἀφ' ἑτέρου, συμφώνως πρὸς τὴν προηγουμένην πρότασιν (5.7), εἶναι:

(4) $$\bigcup_{K=1}^{n} (\overline{A_K})_\delta \subseteq (\overline{\bigcup_{K=1}^{n} A_K})_\delta.$$

Ἤδη ἐκ τῶν (3) καὶ (4) προκύπτει τελικῶς ὅτι:

$$\overline{\left(\bigcup_{K=1}^{n} A_K\right)}_\delta = \bigcup_{K=1}^{n} (\overline{A_K})_\delta. \quad \square$$

Εὐκόλως διαπιστοῦται ὅτι:

(5.9) $(\chi \in \bar{A}_\delta) \Leftrightarrow (\exists\ (\chi_n),\ \forall n \in \Phi,\ \chi_n \in A,\ \delta - \lim\chi_n = \chi)$.

Ἀπόδειξις:

(1) $(\chi \in \bar{A}_\delta) \Leftrightarrow (\chi \in A \quad \text{ἤ} \quad \chi \in A_\delta')$.

Ἀλλά:

(2) $(\chi \in A) \Leftrightarrow (\exists(\chi_n),\ \forall n \in \Phi,\ \chi_n \in A,\ \chi_n = \chi,\ \delta\text{—}\lim\chi_n = \chi)$.

Ἐπίσης, συμφώνως πρὸς τὴν πρότασιν (3.10),

(3) $(\chi \in A'_\delta) \Leftrightarrow (\exists\ (\chi_n),\ \forall n \in \Phi,\ \chi_n \in A,\ \chi_n \neq \chi,\ \delta\text{—}\lim\chi_n = \chi)$.

Ἐκ τῶν (1), (2) καὶ (3) προκύπτει ὅτι ἡ τεθεῖσα πρότασις εἶναι ἀληθής. $\square$
Θὰ δείξωμεν ἐπίσης ὅτι:

(5.10) $(\chi \in \bar{A}_\delta) \Leftrightarrow (\rho(\chi,A) \leqq \delta)$.

Ἀπόδειξις:

(α) $(\chi \in \bar{A}_\delta) \Rightarrow (\chi \in A \quad \text{ἤ} \quad \chi \in A_\delta')$.

Ἀλλά:

$$(\chi \in A) \Rightarrow (\rho(\chi,A) = 0)$$

καί, λόγῳ τῆς προτάσεως (3.8),

$$(\chi \in A_\delta') \Rightarrow (\rho(\chi,A) \leqq \delta).$$

Ἑπομένως:

(1) $(\chi \in \bar{A}_\delta) \Rightarrow (\rho\ (\chi,A) \leqq \delta)$.

Ἀντιστρόφως, λαμβάνοντες ὑπ' ὄψιν τὴν πρότασιν (3.9), διαπιστοῦμεν ὅτι:

(2) $(\rho(\chi,A) \leqq \delta) \Rightarrow (\chi \in A_\delta' \ \text{ἤ}\ \chi \in \bar{A}) \Rightarrow (\chi \in \bar{A}_\delta)$.

Ἐκ τῶν (1) καὶ (2) προκύπτει, ὅτι ἡ τεθεῖσα πρότασις εἶναι ἀληθής. $\square$
Ὡς γνωστόν, ὅταν τὸ A εἶναι πεπερασμένον ὑποσύνολον τοῦ X, τότε $\bar{A} = A$.
Ἀντιθέτως διαπιστοῦται εὐκόλως, ὅτι:

(5.11) $(A\ \text{πεπερασμένον}) \not\Rightarrow (\exists\ \delta > 0,\ \bar{A}_\delta = A)$.

Πράγματι:

Ἔστω $X = \mathbf{R}_1$ καὶ $A = \{\chi_1, \chi_2, \cdots, \chi_n\}$.

Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν εἶναι φανερὸν ὅτι:

$$(1) \qquad \forall \delta > 0, \ \overline{\pi}(A,\delta) = \bigcup_{K=1}^{n} \overline{\pi}(\chi_K,\delta) \supset A.$$

Ἀλλά, ὡς γνωστὸν (ἴδε πρότασιν (5.3)),

$$(2) \qquad \overline{\pi}\,(A,\delta) \subseteq \bar{A}_\delta.$$

Ἐκ τῶν (1) καὶ (2) προκύπτει ὅτι $\forall \delta > 0, \ \bar{A}_\delta \supset A$,

καὶ ὡς ἐκ τούτου: $\nexists\, \delta > 0, \quad \bar{A}_\delta = A.$ □

Ὡς γνωστόν, δοθέντος συνόλου $A \subseteq X$, ὁρίζεται ἡ ἔννοια τοῦ παραγώγου συνόλου δευτέρας τάξεως A'' καὶ γενικώτερον ἡ ἔννοια τοῦ παραγώγου συνόλου n τάξεως $A^{(n)}$ τοῦ A.

Γενίκευσιν τοῦ ὁρισμοῦ τούτου ἀποτελεῖ ὁ ἀκόλουθος ὁρισμός:

(5.12) Ὁρισμός: Καλεῖται *δ—παράγωγον σύνολον δευτέρας τάξεως τοῦ A* τὸ σύνολον:

$$A_\delta'' = (A_\delta')_\delta'.$$

Κατόπιν τούτου θὰ δείξωμεν ὅτι:

$$(5.13) \qquad \forall A \subseteq X, \quad \forall \delta > 0 \quad A_\delta'' \subseteq A_{2\delta}'.$$

Ἀπόδειξις:

$$(\chi \in A''_\delta) \Rightarrow (\forall \tfrac{\varepsilon}{2} > \delta, \ \pi_1(\chi, \tfrac{\varepsilon}{2}) \cap A_\delta' \neq \varnothing).$$

Ἔστω $\chi_1 \in \pi_1(\chi, \frac{\varepsilon}{2}) \cap A_\delta'$, ὁπότε:

$$(1) \qquad |\chi_1\chi| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Ἀλλὰ ἐφ' ὅσον $\chi_1 \in A_\delta'$,

$$\forall \tfrac{\varepsilon}{2} > \delta, \ \pi_1(\chi_1, \tfrac{\varepsilon}{2}) \cap A \neq \varnothing.$$

Συνεπῶς, ἐὰν ληφθῇ $\chi_2 \in \pi_1(\chi_1, \frac{\varepsilon}{2}) \cap A$, θὰ εἶναι:

$$(2) \qquad |\chi_2\chi_1| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Ἐκ τῶν (1) καὶ (2) προκύπτει

$$|\chi_2\chi| \leqq |\chi_1\chi| + |\chi_1\chi_2| < \varepsilon.$$

῎Αρα

$$\forall\ \frac{\varepsilon}{2} > \delta,\ \chi_2 \in \pi_1\ (\chi,\varepsilon),$$

ἤτοι:

$$\forall\ \varepsilon > 2\delta,\ \pi_1(\chi,\varepsilon) \cap A \neq \varnothing$$

καὶ ὡς ἐκ τούτου $\chi \in A_{2\delta}{}'$.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω προκύπτει προφανῶς, ὅτι:

$$A_\delta{}'' \subseteq A_{2\delta}{}'. \qquad \square$$

Ἐπίσης διαπιστοῦται εὐκόλως, ὅτι:

(5.14) $\quad (A \subseteq B) \Rightarrow (\forall \delta > 0,\ A_\delta{}'' \subseteq B_\delta{}'').$

Ἀπόδειξις:

Συμφώνως πρὸς τὴν πρότασιν (3.11),

(1) $\quad (A \subseteq B) \Rightarrow (\forall \delta > 0,\ A_\delta{}' \subseteq B_\delta{}').$

Διὰ τὸν αὐτὸν λόγον

(2) $\quad (A_\delta{}' \subseteq B_\delta{}') \Rightarrow (\forall \delta > 0,\ A_\delta{}'' \subseteq B_\delta{}'').$

Ἐκ τῶν (1) καὶ (2) προκύπτει ὅτι:

$$(A \subseteq B) \Rightarrow (\forall \delta > 0,\ A_\delta{}'' \subseteq B_\delta{}''). \qquad \square$$

Εἰς τὴν εἰδικὴν περίπτωσιν, καθ' ἣν $\delta = 0$, αἱ προτάσεις (5.13) καὶ (5.14) λαμβάνουν τὴν γνωστὴν μορφήν:

$$\forall\ A \subseteq X,\ A'' \subseteq A'$$

καὶ

$$(A \subseteq B) \Rightarrow (A'' \subseteq B''),$$

ἀντιστοίχως.

Ἡ ἔννοια τοῦ δ—παραγώγου συνόλου ν τάξεως ὁρίζεται ἀναγωγικῶς ὡς ἀκολούθως:

(5.15) Ὁρισμός: Καλεῖται *δ–παράγωγον σύνολον ν—τάξεως τοῦ A* τὸ σύνολον:

$$A_\delta{}^{(\nu)} = (A_\delta{}^{(\nu-1)})_\delta{}'.$$

Κατόπιν τούτου ἡ πρότασις (5.14) γενικεύεται εὐκόλως ὡς ἑξῆς:

(5.16) $\quad (A \subseteq B) \Rightarrow (\forall \delta > 0,\ \forall \nu \in \Phi,\ A_\delta{}^{(\nu)} \subseteq B_\delta{}^{(\nu)}).$

Ὡς γνωστόν, $\forall\ A \subseteq X$ ὁρίζεται ἡ ἔννοια τοῦ περιβλήματος δευτέρας τάξεως $\bar{\bar{A}}$ τοῦ συνόλου A, ὡς τὸ περίβλημα τοῦ συνόλου $\bar{A}$ καὶ μάλιστα εἶναι

$$\forall A \subseteq X,\ \bar{\bar{A}} = \bar{A}.$$

Γενίκευσιν τοῦ ὁρισμοῦ τούτου ἀποτελεῖ ὁ ἀκόλουθος ὁρισμός:

(5.17) Ὁρισμός: Καλεῖται *δ-περίβλημα δευτέρας τάξεως τοῦ A* τὸ σύνολον:

$$\bar{\bar{A}}_\delta = \overline{(\bar{A}_\delta)}_\delta.$$

Κατόπιν τούτου διαπιστοῦται εὐκόλως ὅτι:

(5.18) $$(A \subseteq B) \Rightarrow (\forall \delta > 0,\ \bar{\bar{A}}_\delta \subseteq \bar{\bar{B}}_\delta).$$

Ἀπόδειξις:

Συμφώνως πρὸς τὴν πρότασιν (5.6),

$$(A \subseteq B) \Rightarrow (\forall \delta > 0,\ \bar{A}_\delta \subseteq \bar{B}_\delta).$$

Διὰ τὸν αὐτὸν λόγον,

$$(\bar{A}_\delta \subseteq \bar{B}_\delta) \Rightarrow (\forall \delta > 0,\ \bar{\bar{A}}_\delta \subseteq \bar{\bar{B}}_\delta),$$

ὁπότε τελικῶς ἔχομεν:

$$(A \subseteq B) \Rightarrow (\forall \delta > 0,\ \bar{\bar{A}}_\delta \subseteq \bar{\bar{B}}_\delta). \quad \square$$

Ἐξ ὁρισμοῦ εἶναι:

$$\forall A \subseteq X,\ \forall \delta > 0,\ \bar{\bar{A}}_\delta = \overline{(\bar{A}_\delta)}_\delta = \bar{A}_\delta \cup (\bar{A}_\delta)'_\delta.$$

Ἑπομένως εἶναι φανερὸν ὅτι:

(5.19) $$\forall A \subseteq X,\ \forall \delta > 0,\ \bar{A}_\delta \subseteq \bar{\bar{A}}_\delta. \quad \square$$

Διὰ $\delta = 0$ ἔχομεν ὡς γνωστόν, $\bar{A} = \bar{\bar{A}}$. Εἰς τὴν περίπτωσιν, καθ' ἥν, $\delta > 0$, διαπιστοῦται ὅτι:

(5.20) Εἶναι δυνατὸν νὰ ἔχωμεν:

$$\bar{A}_\delta \subset \bar{\bar{A}}_\delta.$$

Πράγματι:

Ἔστω $X = \mathbf{R}_2$ καὶ $A = \{\chi : (\chi \in X)\ (|\chi\chi_0| < \rho)\}$.

Εἶναι φανερὸν ὅτι:

$$\bar{A}_\delta = \{\chi : (\chi \in X)\ (|\chi\chi_0| \leqq \rho + \delta)\},$$

καί:

$$\bar{\bar{A}}_\delta = \{\chi : (\chi \in X)\ (|\chi\chi_0| \leqq \rho + 2\delta)\}.$$

Ἑπομένως:

$$\bar{A}_\delta \subset \overline{\overline{A}}_\delta. \quad \square$$

Θὰ δείξωμεν ἤδη, ὅτι:

(5.21) $\qquad \forall\, A \subseteq X,\ \forall \delta > 0,\ \overline{\pi}(A',\delta) \subseteq A'_\delta.$

Ἀπόδειξις:

Συμφώνως πρὸς τὸν ὁρισμὸν (4.1),

$$\big(\chi \in \overline{\pi}(A',\delta)\big) \Rightarrow \big(\exists \chi' \in A',\ \chi \in \overline{\pi}(\chi',\delta)\big),$$

ἤτοι:

(1) $\qquad \big(\chi \in \overline{\pi}(A',\delta)\big) \Rightarrow \big(\exists \chi' \in A',\ |\chi\chi'| \leqq \delta\big).$

Ἐπίσης, ἐφ' ὅσον $\chi' \in A'$,

(2) $\qquad \forall\, K > 0,\ \exists \chi'' \in A,\ \chi'' \neq \chi',\ |\chi'\chi''| < K.$

Ἀλλὰ

$$|\chi\chi''| \leqq |\chi\chi'| + |\chi'\chi''|,$$

ὁπότε, λόγῳ τῶν (1) καὶ (2), θὰ εἶναι:

(3) $\qquad |\chi\chi''| < \delta + K.$

Ἤδη ἐκ τῶν (1), (2) καὶ (3) προκύπτει προφανῶς ὅτι:

$$\big(\chi \in \overline{\pi}(A',\delta)\big) \Rightarrow \big(\forall\, K > 0,\ \exists\, \chi'' \in A,\ \chi'' \neq \chi,\ |\chi\chi''| < \delta + K\big),$$

ἢ θέτοντες $K + \delta = \varepsilon$,

$$\big(\chi \in \overline{\pi}(A',\delta)\big) \Rightarrow \big(\forall\, \varepsilon > \delta,\ \ \exists\, \chi'' \in A,\ \ \chi'' \in \pi_1(\chi,\varepsilon)\big) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \big(\forall\, \varepsilon > \delta,\ \ \pi_1(\chi,\varepsilon) \cap A \neq \varnothing\big) \Rightarrow (\chi \in A_\delta{}'),$$

καὶ ὡς ἐκ τούτου:

$$\overline{\pi}(A',\delta) \subseteq A_\delta{}'. \quad \square$$

Ἀντιθέτως, διαπιστοῦται εὐκόλως ὅτι:

(5.22) Δὲν εἶναι ἀληθὲς ὅτι:

$$\forall\, A \subseteq X,\ \forall\, \delta > 0,\ A_\delta{}' \subseteq \overline{\pi}(A',\delta).$$

Πράγματι:

Ἔστω $X = \mathbf{R}_2$ καὶ $A = \{\chi\colon (\chi \in X)\ (\rho < |\chi\chi_0| < \rho')\} \cup \{\chi_0\} \cup \{\chi_1\}$, ἔνθα:

(1) $\qquad \rho > 3\delta$ καὶ $0 < |\chi_0\chi_1| \leqq \delta.$

῎Εχομεν:

$$A' = \{\chi\colon (\chi \in X)\ (\rho \leqq |\chi\chi_0| \leqq \rho')\}$$

καὶ

$$\overline{\pi}(A',\delta) = \{\chi\colon (\chi \in X)\ (\rho - \delta \leqq |\chi\chi_0| \leqq \rho' + \delta)\}.$$

Λόγῳ τῶν σχέσεων (1) εἶναι φανερὸν ὅτι:

$$\chi_1 \in A_\delta{}', \text{ ἐνῷ } \chi_1 \notin \overline{\pi}(A',\delta)$$

καὶ ὡς ἐκ τούτου δὲν εἶναι ἀληθὲς ὅτι:

$$A_\delta{}' \subseteq \overline{\pi}(A',\delta). \quad \square$$

Μία ἀνάλογος πρότασις πρὸς τὴν (5.21) εἶναι ἡ ἀκόλουθος:

(5.23) $\qquad \forall\, \Lambda \subseteq X,\ \forall\delta > 0,\ \overline{\pi}(\bar{A},\delta) \subseteq \bar{A}_\delta.$

Αὕτη ἀποδεικνύεται ὡς καὶ ἡ (5.21). $\square$

Ὁ μετρικὸς χῶρος X θὰ καλῆται χῶρος Bolzano - Weierstrass (συντόμως: χῶρος B - W), ἐὰν εἰς αὐτὸν ἰσχύῃ ἡ γνωστὴ πρότασις τῶν Bolzano - Weierstrass, ἤτοι ἐάν:

$$(A \subseteq X,\ A \text{ ἄπειρον},\ A \text{ περατωμένον}) \Rightarrow (A' \neq \varnothing).$$

Κατόπιν τούτου θὰ δείξωμεν, ὅτι:

(5.24) Ἐὰν ὁ χῶρος X εἶναι χῶρος B - W, τότε:

$$\forall A \subseteq X,\ \forall\, \delta > 0,\ \bar{A}_\delta = \overline{\pi}(\bar{A},\delta).$$

Ἀπόδειξις:

῎Εστω $\chi \in \bar{A}_\delta$, ἐπομένως $\chi \in \Lambda$ ἢ $\chi \in A_\delta{}'$.

῎Εστω $\chi \in A_\delta{}'$, ὁπότε:

(1) $\qquad \forall\varepsilon > \delta,\ \pi_1(\chi,\varepsilon) \cap A \neq \varnothing.$

Ἐκ τῆς (1) προκύπτει, ὅτι εἶναι δυνατὸν νὰ ἔχωμεν:

ἢ

(2) $\qquad \overline{\pi}_1(\chi,\delta) \cap \Lambda \neq \varnothing,$

ἢ

(3) $\qquad \overline{\pi}_1(\chi,\delta) \cap A = \varnothing,$ ἐνῷ $\forall\varepsilon > \delta,\ \pi_1(\chi,\varepsilon) \cap \Lambda \neq \varnothing.$

Ἐὰν ἰσχύῃ ἡ (2), τότε:

$$\exists\, \chi_0 \in A,\ |\chi\chi_0| \leqq \delta$$

καὶ ὡς ἐκ τούτου $\chi \in \overline{\pi}\ (\Lambda,\delta) \subseteq \overline{\pi}(\bar{\Lambda},\delta)$,

ἤτοι $$\chi \in \overline{\pi}(\bar{\Lambda},\delta).$$

Ἔστω ὅτι ἰσχύει ἡ (3). Θεωροῦμεν τὴν ἀκολουθίαν (ε_n), ἔνθα $\varepsilon_n = \delta + \frac{1}{n}$.

Λόγῳ τῆς (3)

$$\forall n \in \Phi,\ A_n = \pi_1(\chi,\varepsilon_n) \cap A \neq \varnothing,$$

ἕκαστον δὲ τῶν συνόλων A_n περιέχει ἀπείρου πλήθους σημεῖα τοῦ A.

Ἄμεσος συνέπεια τούτου εἶναι προφανῶς ὅτι ὑπάρχει μία ἀκολουθία διακεκριμένων σημείων (χ_n) τοιαύτη, ὥστε:

$$\forall n \in \Phi,\ \chi_n \in A_n = \pi_1\ (\chi,\varepsilon_n) \cap A.$$

Ἐὰν $B = \langle\chi_n\rangle$ εἶναι τὸ σύνολον τῶν σημείων τῆς (χ_n), εἶναι φανερὸν ὅτι τὸ B περιέχει ἀπείρου πλήθους σημεῖα τοῦ A καὶ εἶναι περατωμένον.

Ἑπομένως, ἐφ' ὅσον ὁ X ὑπετέθη χῶρος B - W, θὰ εἶναι κατ' ἀνάγκην $B' \neq \varnothing$.

Ἐὰν $\chi_0 \in B'$, εἶναι φανερὸν ὅτι $\chi_0 \in A'$. Ἐπίσης, ἐφ' ὅσον $\chi_0 \in B'$, θὰ ὑπάρχῃ μία ὑπακολουθία (χ_n') τῆς (χ_n) συγκλίνουσα εἰς τὸ σημεῖον $\chi_0 \in A'$.

Ἀλλὰ διὰ τὴν ἀκολουθίαν (χ_n) ἔχομεν:

$$\forall n \in \Phi,\ \delta < |\chi_n\chi| < \delta + \frac{1}{n},$$

ὁπότε κατὰ μείζονα λόγον:

$$\forall n \in \Phi,\ \delta < |\chi_n'\chi| < \delta + \frac{1}{n},$$

καὶ ἐπειδὴ $\lim\chi_n' = \chi_0$, θὰ εἶναι $|\chi_0\chi| = \delta$,

ἤτοι $$\chi \in \overline{\pi}(\chi_0,\delta).$$

Ἐπίσης $\chi_0 \in A' \subseteq \bar{A}$, ἑπομένως:

$$\chi \in \overline{\pi}(\bar{A},\delta).$$

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω προκύπτει ὅτι:

$$(\chi \in \bar{A}_\delta) \Rightarrow (\chi \in \overline{\pi}\ (\bar{A},\delta)).$$

Ἄρα:

(4) $$\bar{A}_\delta \subseteq \overline{\pi}(\bar{A},\delta).$$

Ἀφ' ἑτέρου, συμφώνως πρὸς τὴν προηγουμένην πρότασιν (5.23), ἔχομεν:

(5) $$\bar{A}_\delta \supseteq \overline{\pi}(\bar{A},\delta).$$

Ἤδη ἐκ τῶν (4) καὶ (5) προκύπτει τελικῶς, ὅτι:

$$\bar{A}_\delta = \bar{\pi}(\bar{A}, \delta). \quad \square$$

6. δ—κλειστὰ σύνολα.

Ὡς γνωστὸν (ἴδε πρότασιν (5.3)),

$$\forall A \subseteq X, \ \forall \delta > 0, \ \bar{\pi}(A,\delta) \subseteq \bar{A}_\delta.$$

Ἐπίσης δὲν εἶναι ἀληθὲς ὅτι:

$$\forall A \subseteq X, \ \forall \delta > 0, \ \bar{\pi}(A,\delta) = \bar{A}_\delta.$$

Πράγματι:

Ἔστω $X = \mathbf{R}_2$ καὶ $A = \{\chi\colon (\chi \in X) \ (|\chi\chi_0| < \rho)\}$.

Προφανῶς ἔχομεν:

$$\bar{\pi}(A,\delta) = \{\chi\colon (\chi \in X) \ (|\chi\chi_0| < \rho + \delta)\}.$$

Ἐὰν ληφθῇ $\chi_1 \in \{\chi\colon (\chi \in X) \ (|\chi\chi_0| = \rho + \delta)\}$, εἶναι φανερὸν ὅτι:

$$\forall \varepsilon > \delta, \quad \pi_1(\chi_1,\varepsilon) \cap A \neq \varnothing,$$

καὶ ὡς ἐκ τούτου:

$$\chi_1 \in A_\delta' \subseteq \bar{A}_\delta.$$

Ὥστε $\chi_1 \in \bar{A}_\delta$, ἐνῷ $\chi_1 \notin \bar{\pi}(A,\delta)$. Ἄρα δὲν εἶναι ἐν γένει:

$$\bar{A}_\delta = \bar{\pi}(A,\delta).$$

Ἀντιθέτως εἶναι εὔκολον νὰ διαπιστωθῇ ὅτι:

$$\exists A \subseteq X, \ \forall \delta > 0, \ \bar{A}_\delta = \bar{\pi}(A,\delta).$$

Πράγματι:

Ἔστω $X = \mathbf{R}_2$ καὶ $A = \{\chi\colon (\chi \in X) \ (|\chi\chi_0| \leqq \rho)\}$,
ὁπότε:

$$(1) \qquad \forall \delta > 0, \ \bar{\pi}(A,\delta) = \{\chi\colon (\chi \in X) \ (|\chi\chi_0| \leqq \rho + \delta)\}.$$

Ἀφ' ἑτέρου εἶναι φανερὸν ὅτι:

$$(2) \qquad \bar{A}_\delta = \{\chi\colon (\chi \in X) \ (|\chi\chi_0| \leqq \rho + \delta)\}.$$

Ἐκ τῶν (1) καὶ (2) προκύπτει ὅτι:

$$\bar{A}_\delta = \bar{\pi}(A,\delta). \quad \square$$

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συνάγομεν ὅτι:

Εἰς τὴν πρότασιν (5.3), καθ' ἣν

$$\forall A \subseteq X,\ \forall \delta > 0,\ \overline{\pi}(A,\delta) \subseteq \bar{A}_\delta,$$

ἡ ἰσότης $\bar{A}_\delta = \overline{\pi}(A,\delta)$ ἄλλοτε μὲν δύναται νὰ ἰσχύῃ καὶ ἄλλοτε ὄχι.

Κατόπιν τούτου δίδομεν τὸν ἀκόλουθον ὁρισμόν:

(6.1) Ὁρισμός: Ἐὰν $A \subseteq X$ καὶ $\delta > 0$, τὸ A καλεῖται δ — *κλειστὸν σύνολον* ἐὰν $\bar{A}_\delta = \overline{\pi}(A,\delta)$, ἤτοι:

$$(A\ \delta\text{—κλειστὸν}) \Leftrightarrow (\bar{A}_\delta = \overline{\pi}(A,\delta)).$$

Ἐκ τοῦ ὁρισμοῦ (6.1) καὶ τῆς προτάσεως (5.3) προκύπτει ἀμέσως ὅτι:

(6.2) $$(A\ \delta\text{—κλειστὸν}) \Leftrightarrow (\bar{A}_\delta \subseteq \overline{\pi}(A,\delta)).$$

Ἐπίσης ἄμεσος συνέπεια τοῦ ὁρισμοῦ (6.1) καὶ τῆς προτάσεως (5.4) εἶναι προφανῶς ὅτι:

(6.3) $$(A\ \delta\text{—κλειστὸν}) \Leftrightarrow (A_\delta{}' \subseteq \overline{\pi}(A,\delta)).$$

Ἐὰν $A = \varnothing$, τότε $\bar{A}_\delta = \varnothing$ καὶ $\overline{\pi}(A,\delta) = \varnothing$, οἱουδήποτε ὄντος τοῦ θετικοῦ ἀριθμοῦ δ. Ἄμεσος συνέπεια τούτου εἶναι ὅτι:

$$(A = \varnothing) \Rightarrow (\forall \delta > 0,\ \bar{A}_\delta = \overline{\pi}(A,\delta)).$$

Ἑπομένως:

(6.4) $\forall \delta > 0$, τὸ κενὸν σύνολον $\varnothing$ εἶναι δ—κλειστόν.

Ἐπίσης διαπιστοῦται εὐκόλως ὅτι:

(6.5) $(A \subseteq X,\ A$ πεπερασμένον$) \Rightarrow (\forall \delta > 0,\ A\ \delta$—κλειστόν$)$.

Πράγματι:

Ἔστω ὅτι $A = \{\chi_1, \chi_2, \ldots, \chi_n\}$. Εἶναι φανερὸν ὅτι:

$$\forall \delta > 0,\ \bar{A}_\delta = \overline{\pi}(A,\delta) = \bigcup_{i=1}^{n} \overline{\pi}(\chi_i,\delta),$$

καὶ ὡς ἐκ τούτου $\forall \delta > 0$ τὸ A εἶναι δ—κλειστόν. □

Διαπιστοῦται ἐπίσης ὅτι:

(6.6) $(\forall \delta > 0,\ A\ \delta$—κλειστὸν$) \not\Rightarrow (A$ κλειστόν$)$.

Πράγματι:

Ἔστω τὸ σύνολον $A = \{\chi\colon (\chi \in X)\ (0 < |\chi\chi_0| \leqq \rho)\}$, ἔνθα $X = \mathbf{R}_2$.

Εἶναι φανερὸν ὅτι:

$$\forall \delta > 0,\ \overline{\pi}(A,\delta) = \{\chi\colon (\chi \in X)\ (0 \leqq |\chi\chi_0| \leqq \rho + \delta)\} = \bar{A}_\delta.$$

Ἑπομένως:

$$\forall \delta > 0,\ A\ \delta\text{—κλειστόν}.$$

Ἐν τούτοις τὸ A δὲν εἶναι κλειστὸν σύνολον, διότι $\chi_0 \in A'$, ἐνῷ $\chi_0 \notin A$. □

Ἀντιθέτως:

(6.7) Ἐὰν ὁ χῶρος X εἶναι χῶρος B - W, τότε:

$$(A \subseteq X,\ A\ \text{κλειστὸν}) \Rightarrow (\forall \delta > 0,\ A\ \delta\text{—κλειστόν}).$$

Ἀπόδειξις:

Ἐφ' ὅσον ὁ χῶρος X ὑπετέθη χῶρος B - W, συμφώνως πρὸς τὴν πρότασιν (5.24),

(1) $$\forall \delta > 0,\ \bar{A}_\delta = \overline{\pi}(\bar{A},\delta).$$

Ἀλλὰ τὸ A εἶναι κλειστόν, ὁπότε:

$$\bar{A} = A.$$

Ἑπομένως ἡ (1) λαμβάνει τὴν μορφήν:

$$\forall \delta > 0,\ \bar{A}_\delta = \overline{\pi}(A,\delta)$$

καὶ ὡς ἐκ τούτου:

$$\forall \delta > 0,\ A\ \delta\text{—κλειστόν}.$$ □

Θὰ δείξωμεν ὅτι:

(6.8) Ἐὰν $(A_i)_{i\varepsilon I}$ εἶναι τυχοῦσα οἰκογένεια ὑποσυνόλων τοῦ X, τότε:

$$\overline{\pi}(\bigcup_{i\varepsilon I} A_i,\delta) = \bigcup_{i\varepsilon I} \overline{\pi}(A_i,\delta).$$

Ἀπόδειξις:

Ἐκ τῆς σχέσεως $A_i \subseteq \bigcup_{i\varepsilon I} A_i$ προκύπτει:

$$\overline{\pi}(A_i,\delta) \subseteq \overline{\pi}(\bigcup_{i\varepsilon I} A_i,\delta).$$

Ἑπομένως:

(1) $$\bigcup_{i\varepsilon I} \overline{\pi}(A_i,\delta) \subseteq \overline{\pi}(\bigcup_{i\varepsilon I} A_i,\delta).$$

Ἔστω $\chi \in \overline{\pi}(\bigcup_{i\varepsilon I} A_i,\delta)$, ὁπότε:

$$\exists\ \chi_0 \in \bigcup_{i\varepsilon I} A_i,\ |\chi\chi_0| \leqq \delta.$$

Ἀλλά:

$$(\chi_0 \in \bigcup_{i \in I} A_i) \Rightarrow (\exists\, i \in I,\ \chi_0 \in A_i).$$

Ἄρα $\chi \in \overline{\pi}\,(A_i,\delta)$, διότι $|\chi\chi_0| \leq \delta$.

Ἑπομένως $\chi \in \bigcup_{i \in I} \overline{\pi}\,(A_i,\delta)$.

Κατὰ συνέπειαν:

$$\Big(\chi \in \overline{\pi}\,(\bigcup_{i \in I} A_i, \delta)\Big) \Rightarrow \Big(\chi \in \bigcup_{i \in I} \overline{\pi}(A_i, \delta)\Big),$$

ἤτοι:

$$(2) \qquad \overline{\pi}(\bigcup_{i \in I} A_i, \delta) \subseteq \bigcup_{i \in I} \overline{\pi}(A_i, \delta).$$

Ἐκ τῶν (1) καὶ (2) προκύπτει, ὅτι ἡ τεθεῖσα πρότασις εἶναι ἀληθής. □

Κατόπιν τούτου θὰ δείξωμεν ὅτι:

(6.9) Ἐὰν $A_1, A_2, \ldots, A_n$ εἶναι n δ–κλειστὰ ὑποσύνολα τοῦ X, τότε καὶ ἡ ἕνωσις αὐτῶν $\bigcup_{K=1}^{n} A_K$ εἶναι δ—κλειστὸν σύνολον.

Ἀπόδειξις:

Ἐφ' ὅσον τὰ $A_1, A_2, \ldots, A_n$ ὑποτίθενται δ–κλειστὰ σύνολα, θὰ ἔχωμεν:

$$(\overline{A_K})_\delta = \overline{\pi}(A_K,\delta) \ \text{διὰ}\ K = 1,2,\ldots,n.$$

Ἑπομένως:

$$(1) \qquad \bigcup_{K=1}^{n} (\overline{A_K})_\delta = \bigcup_{K=1}^{n} \overline{\pi}(A_K,\delta).$$

Ἀλλά, συμφώνως πρὸς τὴν πρότασιν (5.8), εἶναι:

$$(2) \qquad (\overline{\bigcup_{K=1}^{n} A_K})_\delta = \bigcup_{K=1}^{n} (\overline{A_K})_\delta.$$

Ἐπίσης, συμφώνως πρὸς τὴν προηγουμένην πρότασιν (6.8), ἔχομεν:

$$(3) \qquad \bigcup_{K=1}^{n} \overline{\pi}(A_K,\delta) = \overline{\pi}(\bigcup_{K=1}^{n} A_K,\delta).$$

Ἐκ τῶν (1), (2) καὶ (3) προκύπτει:

$$(\overline{\bigcup_{K=1}^{n} A_K})_\delta = \overline{\pi}(\bigcup_{K=1}^{n} A_K,\delta),$$

καὶ ὡς ἐκ τούτου τὸ $\bigcup_{K=1}^{n} A_K$ εἶναι δ—κλειστὸν σύνολον. □

Εἰς τὴν περίπτωσιν καθ' ἣν τὸ σύνολον δεικτῶν I, τῆς οἰκογενείας $(A_i)_{i\varepsilon I}$, εἶναι ἄπειρον, τότε δὲν εἶναι ἐν γένει ἀληθὲς ὅτι:

(6.10) $(\forall i \in I,\ A_i\ \delta\text{—κλειστὸν}) \Rightarrow (\bigcup_{i\varepsilon I} A_i\ \delta\text{—κλειστόν})$.

Πράγματι:

Ἔστω $X = \mathbf{R}_2$· $\forall n \in \Phi$ θέτομεν:

$$A_n = \{\chi\colon (\chi \in X)\ (0 < |\chi\chi_n| \leq \frac{1}{2^{n+1}})\},\ \text{ἔνθα}\ \chi_n = \frac{1}{2^{n-1}},\ (\chi_n \in \mathbf{R}_1).$$

Τὰ σύνολα $A_1, A_2, \ldots, A_n$ εἶναι δ -κλειστά.

Ἀλλὰ εἶναι φανερόν, ὅτι διὰ τὸ σημεῖον $\chi_0 = -\delta$, $(\chi_0 \in \mathbf{R}_1)$, ἔχομεν:

$$\forall \varepsilon > \delta,\ \pi_1(\chi_0,\varepsilon)\ \cap\ (\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) \neq \varnothing.$$

Ἄρα $\chi_0 \in (\overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n})_\delta$ καὶ ἐπειδὴ $\chi_0 \notin \overline{\pi}\,(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n, \delta)$, ἡ ἕνωσις $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ δὲν δύναται νὰ εἶναι δ—κλειστὸν σύνολον. □

7. Ἔννοια τοῦ δ–ἐσωτερικοῦ σημείου καὶ τοῦ δ—ἀνοικτοῦ πυρῆνος δοθέντος συνόλου.

Ἔστω X τυχὼν μετρικὸς χῶρος, $\delta > 0$ καὶ A τυχὸν ὑποσύνολον τοῦ X.

(7.1) Ὁρισμός: Τὸ σημεῖον $\chi \in A$ καλεῖται *δ–ἐσωτερικὸν σημεῖον τοῦ A*, ἐάν:

$$\exists\ \varepsilon > \delta,\quad \pi\,(\chi,\varepsilon) \subseteq A.$$

(7.2) Ὁρισμός: Τὸ σύνολον τῶν δ -ἐσωτερικῶν σημείων τοῦ A καλεῖται *δ—ἐσωτερικὸν* τοῦ A ἢ *δ—ἀνοικτὸς πυρὴν* τοῦ A καὶ παρίσταται διὰ τοῦ συμβολισμοῦ $\operatorname{int}(A)_\delta$, ἤτοι:

$$\operatorname{int}(A)_\delta = \{\chi\colon (\chi \in A)\ (\exists\ \varepsilon > \delta,\ \pi(\chi,\varepsilon) \subseteq A)\}.$$

Εἶναι εὔκολον νὰ διαπιστωθῇ ὅτι:

(7.3) $\forall\ A \subseteq X,\ \forall \delta > 0,\ \operatorname{int}(A)_\delta \subseteq \operatorname{int}(A) \subseteq A$.

Ἀπόδειξις:

Ἐξ ὁρισμοῦ:

$$(\chi \in \operatorname{int}(A)_\delta) \Rightarrow (\exists \varepsilon > \delta,\ \pi(\chi,\varepsilon) \subseteq A) \Rightarrow (\exists \varepsilon > 0,\ \pi(\chi,\varepsilon) \subseteq A) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (\chi \in \operatorname{int}(A)).$$

Ἑπομένως:

$$\operatorname{int}(A)_\delta \subseteq \operatorname{int}(A) \subseteq A. \quad \square$$

᾿Αντιθέτως:

(7.4) $\quad (A \subseteq X,\ \delta > 0) \not\Rightarrow (\operatorname{int}(A) \subseteq \operatorname{int}(A)_\delta)$.

Πράγματι:

῎Εστω $X = \mathbf{R}_2$ καὶ $A = \{\chi\colon (\chi \in X)\ (|\chi\chi_0| < \rho)\}$, ἔνθα $\rho > \delta$.

᾿Εὰν λάβωμεν $\chi_1 \in A$ τοιοῦτον, ὥστε:

$$\rho - \delta < |\chi_1\chi_0| < \rho,$$

προφανῶς $\chi_1 \in \operatorname{int}(A)$, ἐνῷ $\chi_1 \notin \operatorname{int}(A)_\delta$.

῾Επομένως εἰς τὴν προκειμένην περίπτωσιν δὲν εἶναι $\operatorname{int}(A) \subseteq \operatorname{int}(A)_\delta$, ἀλλὰ $\operatorname{int}(A)_\delta \subset \operatorname{int}(A)$. □

᾿Επίσης εἶναι φανερὸν ὅτι:

(7.5) $\quad \forall A \subseteq X,\ \forall \delta > 0,\ \operatorname{int}(A)_\delta \subseteq A_\delta'$. □

Τέλος θὰ δείξωμεν ὅτι:

(7.6) $\quad (A \subseteq X,\ \delta > \delta') \Rightarrow (\operatorname{int}(A)_\delta \subseteq \operatorname{int}(A)_{\delta'})$.

᾿Απόδειξις:

$$(\chi \in \operatorname{int}(A)_\delta) \Rightarrow (\exists \varepsilon > \delta,\ \pi(\chi,\varepsilon) \subseteq A) \Rightarrow (\exists \varepsilon > \delta',\ \pi(\chi,\varepsilon) \subseteq A) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (\chi \in \operatorname{int}(A)_{\delta'}),$$

ἤτοι:

$$\operatorname{int}(A)_\delta \subseteq \operatorname{int}(A)_{\delta'}. \quad \square$$

Εἰς τὴν εἰδικὴν περίπτωσιν, καθ' ἣν $\delta' = 0$, προκύπτει ὅτι $\operatorname{int}(A)_\delta \subseteq \operatorname{int}(A)$, ἤτοι ἡ πρότασις (7.3).

᾿Εὰν $A \subseteq X$, διὰ τοῦ CA παριστῶμεν τὸ συμπλήρωμα τοῦ A ὡς πρὸς X, δηλαδὴ τὴν διαφορὰν $X - A$.

Κατόπιν τούτου θὰ δείξωμεν ὅτι:

(7.7) $\quad \forall A \subseteq X,\ \forall\delta > 0,\ \operatorname{int}(A)_\delta \subseteq C\,\overline{\pi}(CA, \delta) \subseteq A$.

᾿Απόδειξις:

῎Εστω $\chi_0 \in \operatorname{int}(A)_\delta$, ὁπότε, συμφώνως πρὸς τὸν ὁρισμὸν (7.2),

(1) $\quad \exists \varepsilon > \delta,\ \pi(\chi_0,\varepsilon) \subseteq A$.

Λόγῳ τῆς (1) ἔχομεν:

$$\pi(\chi_0,\varepsilon) \cap CA = \varnothing.$$

Ἑπομένως $\forall \chi \in CA$, $|\chi\chi_0| > \delta$, καὶ ὡς ἐκ τούτου $\chi_0 \notin \overline{\pi}(CA,\delta)$, ἤτοι $\chi_0 \in C\,\overline{\pi}(CA,\delta)$.

Ὥστε:

$$(\chi_0 \in \operatorname{int}(A)_\delta) \Rightarrow (\chi_0 \in C\,\overline{\pi}(CA,\delta)),$$

δηλαδή:

$$(2) \qquad \operatorname{int}(A)_\delta \subseteq C\,\overline{\pi}(CA,\delta).$$

Ἀλλὰ εἶναι φανερὸν ὅτι:

$$\overline{\pi}(CA,\delta) \supseteq CA,$$

καὶ ὡς ἐκ τούτου:

$$(3) \qquad C\,\overline{\pi}(CA,\delta) \subseteq A.$$

Ἐκ τῶν (2) καὶ (3) προκύπτει τελικῶς ὅτι:

$$\operatorname{int}(A)_\delta \subseteq C\,\overline{\pi}(CA,\delta) \subseteq A. \qquad \square$$

Ἐπίσης διαπιστοῦται εὐκόλως ὅτι:

(7.8) Δὲν εἶναι ἀληθὲς ὅτι:

$$\forall\, A \subseteq X,\ \forall \delta > 0,\ \operatorname{int}(A)_\delta = C\,\overline{\pi}(CA,\delta).$$

Πράγματι:

Ἔστω $X = \mathbf{R}_2$ καὶ $A = \{\chi\colon (\chi \in X)\ (|\chi\chi_0| \leqq \rho)\}$, ἔνθα $\rho > \delta$, ὁπότε $CA = \{\chi\colon (\chi \in X)\ (|\chi\chi_0| > \rho)\}$ ἡ $\overline{\pi}(CA,\delta) =$ $\{\chi\colon (\chi \in X)\ (|\chi\chi_0| > \rho - \delta)\}$ καὶ $C\,\overline{\pi}(CA,\delta) = \{\chi\colon (\chi \in X)\ (|\chi\chi_0| \leqq \rho - \delta)\}$.

Προφανῶς ἐὰν ληφθῇ $\chi_1 \in \{\chi\colon (\chi \in X)\ (|\chi\chi_0| = \rho - \delta)\}$, τότε $\chi_1 \in C\,\overline{\pi}(CA,\delta)$, ἐνῷ $\chi_1 \notin \operatorname{int}(A)_\delta$.

Ἄρα:

$$\operatorname{int}(A)_\delta \subset C\,\overline{\pi}(CA,\delta). \qquad \square$$

Ἄμεσος συνέπεια τῆς (7.7) εἶναι προφανῶς ὅτι:

$$(7.9) \qquad (C\,\overline{\pi}(CA,\delta) = \varnothing) \Rightarrow (\operatorname{int}(A)_\delta = \varnothing).$$

Ἀντιθέτως:

$$(7.10) \qquad (\operatorname{int}(A)_\delta = \varnothing) \not\Rightarrow (C\,\overline{\pi}(CA,\delta) = \varnothing).$$

Πράγματι:

Ἔστω $X = \mathbf{R}_2$ καὶ $A = \{\chi\colon (\chi \in X)\ (|\chi\chi_0| \leqq \delta)\}$.

Προφανῶς $\operatorname{int}(A)_\delta = \varnothing$, ἐνῷ $C\,\overline{\pi}(CA,\delta) \neq \varnothing$,

διότι, ὡς εὐκόλως διαπιστοῦται,

$$C\,\overline{\pi}(CA,\delta) = \{\chi_0\}. \qquad \square$$

Θὰ δείξωμεν ὅτι:

(7.11) $\quad (A \subseteq B) \Rightarrow \left(\forall\, \delta > 0,\ \operatorname{int}(A)_\delta \subseteq \operatorname{int}(B)_\delta\right).$

Ἀπόδειξις:

$$(\chi \in \operatorname{int}(A)_\delta) \Rightarrow (\exists \varepsilon > \delta,\ \pi(\chi,\varepsilon) \subseteq A)$$

καί, ἐπειδὴ $A \subseteq B$, κατὰ μείζονα λόγον

$$\pi(\chi,\varepsilon) \subseteq B.$$

Ἑπομένως $\chi \in \operatorname{int}(B)_\delta$ καὶ ὡς ἐκ τούτου

$$\operatorname{int}(A)_\delta \subseteq \operatorname{int}(B)_\delta. \qquad \square$$

Κατόπιν τούτου θὰ δείξωμεν ὅτι:

(7.12) Ἐὰν $(A_i)_{i\varepsilon I}$ εἶναι μία οἰκογένεια ὑποσυνόλων τοῦ X, τότε ἰσχύουν αἱ σχέσεις:

$$(\alpha) \qquad \bigcup_{i\varepsilon I} \operatorname{int}(A_i)_\delta \subseteq \operatorname{int}\Big(\bigcup_{i\varepsilon I} A_i\Big)_\delta$$

καὶ

$$(\beta) \qquad \operatorname{int}\Big(\bigcap_{i\varepsilon I} A_i\Big)_\delta \subseteq \bigcap_{i\varepsilon I} \operatorname{int}(A_i)_\delta.$$

Ἀπόδειξις:

(α) Ἔχομεν:

$$\forall\, i \in I,\ A_i \subseteq \bigcup_{i\varepsilon I} A_i.$$

Ἑπομένως, συμφώνως πρὸς τὴν προηγουμένην πρότασιν (7.11),

$$\forall\, i \in I,\ \operatorname{int}(A_i)_\delta \subseteq \operatorname{int}\Big(\bigcup_{i\varepsilon I} A_i\Big)_\delta$$

καὶ ὡς ἐκ τούτου:

$$\bigcup_{i\varepsilon I} \operatorname{int}(A_i)_\delta \subseteq \operatorname{int}\Big(\bigcup_{i\varepsilon I} A_i\Big)_\delta.$$

(Ὁμοίως ἀποδεικνύεται καὶ ἡ (β)). $\square$

Εἰς τὴν εἰδικὴν περίπτωσιν, καθ' ἣν τὸ σύνολον δεικτῶν I τῆς οἰκογενείας $(A_i)_{i\varepsilon I}$ εἶναι πεπερασμένον, θὰ δείξωμεν ὅτι:

(7.13) 'Εὰν $A_K \subseteq X$ διὰ $\kappa = 1,2,...,n$, τότε:

$$\operatorname{int}\Big(\bigcap_{K=1}^{n} A_K\Big)_\delta = \bigcap_{K=1}^{n} \operatorname{int}(A_K)_\delta .$$

'Απόδειξις:

Συμφώνως πρὸς τὴν προηγουμένην πρότασιν (7.12), ἔχομεν:

$$\operatorname{int}\Big(\bigcap_{K=1}^{n} A_K\Big)_\delta \subseteq \bigcap_{K=1}^{n} \operatorname{int}(A_K)_\delta .$$

Ἑπομένως ἀρκεῖ νὰ δείξωμεν ὅτι:

(1) $$\bigcap_{K=1}^{n} \operatorname{int}(A_K)_\delta \subseteq \operatorname{int}\Big(\bigcap_{K=1}^{n} A_K\Big)_\delta .$$

Ἔστω $\chi \in \bigcap_{K=1}^{n} \operatorname{int}(A_K)_\delta$, ὁπότε

(2) $$\forall\ \kappa \in \Phi_n = \{1,2,...,n\},\ \chi \in \operatorname{int}(A_K)_\delta .$$

'Εκ τῆς (2) καὶ τοῦ ὁρισμοῦ (7.2) προκύπτει ὅτι:

(3) $$\forall\ \kappa \in \Phi_n,\quad \exists \varepsilon_K > \delta,\quad \pi(\chi,\varepsilon_K) \subseteq A_K .$$

Ἑπομένως, ἐὰν $\varepsilon = \min\{\varepsilon_1,\varepsilon_2,...,\varepsilon_n\}$, τότε:

(4) $$\forall\ \kappa \in \Phi_n,\quad \pi(\chi,\varepsilon) \subseteq \pi(\chi,\varepsilon_K).$$

'Εκ τῶν (3) καὶ (4) προκύπτει ὅτι:

$$\forall\ \kappa \in \Phi_n,\quad \pi(\chi,\varepsilon) \subseteq A_K .$$

Ἄρα $\pi(\chi,\varepsilon) \subseteq \bigcap_{K=1}^{n} A_K$, ὁπότε, συμφώνως πρὸς τὸν ὁρισμὸν (7.2), $\chi \in \operatorname{int}\Big(\bigcap_{K=1}^{n} A_K\Big)_\delta$ καὶ ὡς ἐκ τούτου ἡ (1) εἶναι ἀληθής. $\square$

Θὰ δείξωμεν τέλος ὅτι:

(7.14) $\forall\ A \subseteq X,\quad \forall\ \delta > 0$ εἶναι:

(α) $\operatorname{int}(A)_\delta = C\,(\overline{CA})_\delta$, (β) $\bar{A}_\delta = C\,[\operatorname{int}(CA)_\delta]$.

'Απόδειξις:

(α) 'Εὰν $\chi \in \operatorname{int}(A)_\delta$, τότε

$$\exists\ \varepsilon > \delta,\ \pi(\chi,\varepsilon) \subseteq A$$

καὶ συνεπῶς:

(1) $$\exists\ \varepsilon > \delta,\ \pi(\chi,\varepsilon) \cap CA = \varnothing .$$

Ἄμεσος συνέπεια τῆς (1) εἶναι προφανῶς ὅτι $\chi \notin (\bar{C}A)_\delta$.

Ἄρα:

$$(\chi \in \mathrm{int}(A)_\delta) \Rightarrow (\chi \in C\ \overline{(CA)}_\delta)$$

καὶ ὡς ἐκ τούτου:

$$(2) \qquad \mathrm{int}(A)_\delta \subseteq C\overline{(CA)}_\delta.$$

Ἔστω ἤδη $\chi \in C\overline{(CA)}_\delta$, ὁπότε $\chi \notin (\bar{C}A)_\delta$,

ἐπομένως

$$\exists\ \varepsilon > \delta, \quad \pi(\chi,\varepsilon) \cap CA = \varnothing,$$

δηλαδὴ $\exists\ \varepsilon > \delta$, $\pi(\chi,\varepsilon) \subseteq A$ καὶ ὡς ἐκ τούτου $\chi \in \mathrm{int}(A)_\delta$.

Ὥστε:

$$(\chi \in C\overline{(CA)}_\delta) \Rightarrow (\chi \in \mathrm{int}(A)_\delta).$$

Ἑπομένως:

$$(3) \qquad C(CA)_\delta \subseteq \mathrm{int}(A)_\delta.$$

Ἐκ τῶν (2) καὶ (3) προκύπτει, ὅτι ἡ (α) εἶναι ἀληθής.

(β) Ἐὰν εἰς τὴν (α) θέσωμεν ὅπου A τὸ CA, προκύπτει:

$$\mathrm{int}(CA)_\delta = C\overline{(C(CA))}_\delta, \text{ ἢ } \mathrm{int}(CA)_\delta = C\bar{A}_\delta,$$

ἤτοι:

$$\bar{A}_\delta = C[\mathrm{int}(CA)_\delta]. \quad \square$$

Ὡς γνωστόν, $\forall\ A \subseteq X$ ὁρίζεται ἡ ἔννοια τοῦ ἀνοικτοῦ πυρῆνος δευτέρας τάξεως $\mathrm{int}[\mathrm{int}(A)]$ τοῦ συνόλου A καὶ ἐπὶ πλέον εἶναι:

$$\forall\ A \subseteq X, \ \mathrm{int}[\mathrm{int}(A)] = \mathrm{int}(A).$$

Γενίκευσιν τοῦ ὁρισμοῦ τούτου ἀποτελεῖ ὁ ἀκόλουθος ὁρισμός:

(7.15) Ὁρισμός: Καλεῖται *δ—ἐσωτερικὸν ἢ δ—ἀνοικτὸς πυρὴν δευτέρας τάξεως τοῦ A*, τὸ σύνολον

$$\mathrm{int}[\mathrm{int}(A)_\delta]_\delta.$$

Κατόπιν τούτου προκύπτει εὐκόλως ὅτι:

$$(7.16) \qquad \forall\ A \subseteq X,\ \forall\ \delta > 0,\ \mathrm{int}[\mathrm{int}(A)_\delta]_\delta \subseteq \mathrm{int}(A)_\delta.$$

Ἀπόδειξις:

Συμφώνως πρὸς τὴν πρότασιν (7.3), ἔχομεν:

$$\forall\ A \subseteq X,\ \forall\ \delta > 0,\ \mathrm{int}(A)_\delta \subseteq A.$$

Ἑπομένως

$$\operatorname{int}[\operatorname{int}(A)_\delta]_\delta \subseteq \operatorname{int}(A)_\delta. \quad \square$$

Ἀντιθέτως:

(7.17) Δὲν εἶναι ἀληθὲς ὅτι:

$$\forall A \subseteq X,\ \forall \delta > 0,\ \operatorname{int}[\operatorname{int}(A)_\delta]_\delta = \operatorname{int}(A)_\delta.$$

Πράγματι:

Ἔστω $X = \mathbf{R}_2$ καὶ $A = \{\chi\colon (\chi \in X)\ (|\chi\chi_0| \leqq \rho)\}$, ἔνθα $\delta < \rho < 2\delta$, ὁπότε $\operatorname{int}(A)_\delta = \{\chi\colon (\chi \in A)\ (|\chi\chi_0| < \rho - \delta)\} \neq \varnothing$ καὶ $\operatorname{int}[\operatorname{int}(A)_\delta]_\delta = \varnothing$,

ἤτοι: $$\operatorname{int}[\operatorname{int}(A)_\delta]_\delta \subset \operatorname{int}(A)_\delta. \quad \square$$

Θὰ δείξωμεν ἤδη ὅτι:

(7.18) $(A \subseteq B) \Rightarrow (\forall \delta > 0,\ \operatorname{int}[\operatorname{int}(A)_\delta]_\delta \subseteq \operatorname{int}[\operatorname{int}(B)_\delta]_\delta)$.

Ἀπόδειξις:

Συμφώνως πρὸς τὴν πρότασιν (7.11),

$$(A \subseteq B) \Rightarrow (\forall \delta > 0,\ \operatorname{int}(A)_\delta \subseteq \operatorname{int}(B)_\delta).$$

Διὰ τὸν αὐτὸν λόγον

$$(\operatorname{int}(A)_\delta \subseteq \operatorname{int}(B)_\delta) \Rightarrow (\forall \delta > 0,\ \operatorname{int}[\operatorname{int}(A)_\delta]_\delta \subseteq \operatorname{int}[\operatorname{int}(B)_\delta]_\delta).$$

Ἄρα:

$$(A \subseteq B) \Rightarrow (\forall \delta > 0,\ \operatorname{int}[\operatorname{int}(A)_\delta]_\delta \subseteq \operatorname{int}[\operatorname{int}(B)_\delta]_\delta). \quad \square$$

8. Ἔννοια τοῦ δ-ἐξωτερικοῦ καὶ τοῦ δ-συνοριακοῦ σημείου.

(8.1) Ὁρισμός: Τὸ σημεῖον $\chi_0 \in X$ καλεῖται *δ—ἐξωτερικὸν σημεῖον τοῦ A*, ἐάν:

$$\exists\, \varepsilon > \delta,\ \pi(\chi,\varepsilon) \cap A = \varnothing.$$

(8.2) Ὁρισμός: Καλεῖται *δ—ἐξωτερικὸν τοῦ A*, τὸ σύνολον τῶν δ—ἐξωτερικῶν σημείων τοῦ A καὶ παρίσταται διὰ τοῦ συμβολισμοῦ $\operatorname{ext}(A)_\delta$, ἤτοι:

$$\operatorname{ext}(A)_\delta = \{\chi\colon (\chi \in X)\ (\exists\, \varepsilon > \delta,\ \pi(\chi,\varepsilon) \cap A = \varnothing)\}.$$

Εἶναι φανερὸν ὅτι:

(8.3) $$\forall A \subseteq X,\ \forall \delta > 0,\ \operatorname{ext}(A)_\delta \subseteq CA.$$

Θὰ δείξωμεν ὅτι:

(8.4) $\forall\, A \subseteq X,\ \forall\, \delta > 0,\ \operatorname{ext}(A)_\delta = \operatorname{int}(CA)_\delta.$

'Απόδειξις:

Συμφώνως πρὸς τὸν ὁρισμὸν (8.1),

$$\big(\chi \in \operatorname{ext}(A)_\delta\big) \Rightarrow \big(\exists\, \varepsilon > \delta,\ \pi(\chi,\varepsilon) \cap A = \varnothing\big).$$

'Αλλὰ $\big(\pi(\chi,\varepsilon) \cap A = \varnothing\big) \Rightarrow \big(\pi(\chi,\varepsilon) \subseteq CA\big).$

῎Αρα:

(1) $\big(\chi \in \operatorname{ext}(A)_\delta\big) \Rightarrow \big(\exists\, \varepsilon > \delta,\ \pi(\chi,\varepsilon) \subseteq CA\big).$

'Εκ τῆς (1) καὶ τοῦ ὁρισμοῦ (7.2) συνάγομεν ὅτι:

$$\big(\chi \in \operatorname{ext}(A)_\delta\big) \Rightarrow \big(\chi \in \operatorname{int}(CA)_\delta\big).$$

῾Επομένως:

(2) $\operatorname{ext}(A)_\delta \subseteq \operatorname{int}(CA)_\delta.$

῾Ομοίως διαπιστοῦται ὅτι:

(3) $\operatorname{int}(CA)_\delta \subseteq \operatorname{ext}(A)_\delta.$

'Εκ τῶν (2) καὶ (3) προκύπτει ὅτι ἡ τεθεῖσα πρότασις εἶναι ἀληθής. □

῎Αμεσος συνέπεια τῆς προτάσεως (8.4) καὶ τῆς προτάσεως (7.14), εἶναι:

(8.5) $\forall\, A \subseteq X,\ \forall\, \delta > 0,\ \operatorname{ext}(A)_\delta = C(\bar{A})_\delta.$

'Απόδειξις:

Λόγῳ τῶν (8.4) καὶ (7.14) ἔχομεν ἀντιστοίχως:

(1) $\operatorname{ext}(A)_\delta = \operatorname{int}(CA)_\delta$ καὶ

(2) $\bar{A}_\delta = C[\operatorname{int}(CA)_\delta].$

῾Η (2) ὅμως γίνεται:

$$C(\bar{A}_\delta) = \operatorname{int}(CA)_\delta,$$

ὁπότε ἐξ αὐτῆς καὶ τῆς (1) προκύπτει ὅτι:

$$\operatorname{ext}(A)_\delta = C(\bar{A}_\delta). \quad \square$$

Κατόπιν τούτων θὰ δείξωμεν ὅτι:

(8.6) $\forall\, A \subseteq X,\ \forall\, \delta > 0,\ \big(\chi \in \operatorname{ext}(A)_\delta\big) \Leftrightarrow \big(\rho(\chi,A) > \delta\big).$

'Απόδειξις:

Συμφώνως πρὸς τὴν πρότασιν (5.10),

$$\big(\chi \in \bar{A}_\delta\big) \Leftrightarrow \big(\rho(\chi,A) \leqq \delta\big).$$

Ἑπομένως

(1) $(\chi \in C(\bar{A}_\delta)) \Leftrightarrow (\rho(\chi,A) > \delta)$.

Ἀφ' ἑτέρου, συμφώνως πρὸς τὴν προηγουμένην πρότασιν (8.5), ἔχομεν:

(2) $(\chi \in \mathrm{ext}(A)_\delta) \Leftrightarrow (\chi \in C(\bar{A}_\delta))$.

Ἤδη ἐκ τῶν (1) καὶ (2) προκύπτει προφανῶς ὅτι:

$$(\chi \in \mathrm{ext}(A_\delta)) \Leftrightarrow (\rho(\chi,A) > \delta). \quad \square$$

Ἐπίσης διαπιστοῦται εὐκόλως ὅτι:

(8.7) $(A \subseteq X,\ \delta > \delta') \Rightarrow (\mathrm{ext}(A)_\delta \subseteq \mathrm{ext}(A)_{\delta'})$.

Ἀπόδειξις:

$$(\chi \in \mathrm{ext}(A)_\delta) \Rightarrow (\exists\, \varepsilon > \delta,\ \pi(\chi,\varepsilon) \cap A = \varnothing) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (\exists\, \varepsilon > \delta',\ \pi(\chi,\varepsilon) \cap A = \varnothing) \Rightarrow (\chi \in \mathrm{ext}(A)_{\delta'}),$$

ἤτοι:

$$\mathrm{ext}(A)_\delta \subseteq \mathrm{ext}(A)_{\delta'}. \quad \square$$

Εἰς τὴν εἰδικὴν περίπτωσιν, καθ' ἣν $\delta' = 0$, ἔχομεν τὴν ἀκόλουθον πρότασιν:

(8.8) $(A \subseteq X,\ \delta > 0) \Rightarrow (\mathrm{ext}(A)_\delta \subseteq \mathrm{ext}(A))$. $\square$

(8.9) Ὁρισμός: Τὸ σημεῖον $\chi_0 \in X$ καλεῖται *δ--συνοριακὸν σημεῖον τοῦ A*, ἐάν:

$$\forall\, \varepsilon > \delta,\ \pi(\chi,\varepsilon) \cap A \neq \varnothing \text{ καὶ } \pi(\chi,\varepsilon) \cap CA \neq \varnothing.$$

(8.10) Ὁρισμός: Καλεῖται *δ—σύνορον τοῦ A* τὸ σύνολον τῶν δ -- συνοριακῶν σημείων τοῦ A καὶ παρίσταται διὰ τοῦ $\partial(A)_\delta$, ἤτοι:

$$\partial(A)_\delta = \{\chi : (\chi \in X)\ (\forall\, \varepsilon > \delta,\ \pi(\chi,\varepsilon) \cap A \neq \varnothing \text{ καὶ } \pi(\chi,\varepsilon) \cap CA \neq \varnothing)\}.$$

Ἄμεσος συνέπεια τοῦ ὁρισμοῦ (8.10) εἶναι προφανῶς ὅτι:

(8.11) $\forall\, A \subseteq X,\ \forall\, \delta > 0,\ \partial(A)_\delta = \bar{A}_\delta \cap (\overline{CA})_\delta$.

Κατόπιν τούτου θὰ δείξωμεν ὅτι:

(8.12) $\forall\, A \subseteq X,\ \forall\, \delta > 0,\ \partial(A)_\delta = \bar{A}_\delta - \mathrm{int}(A)_\delta$.

Ἀπόδειξις:

Συμφώνως πρὸς τὴν προηγουμένην πρότασιν (8.11) εἶναι:

$$\partial(A)_\delta = \bar{A}_\delta \cap (\overline{CA})_\delta,$$

ἤτοι:

(1) $$\partial(A)_\delta = \bar{A}_\delta - C\,\overline{(CA)}_\delta.$$

Ἀφ' ἑτέρου συμφώνως πρὸς τὴν πρότασιν (7.14), ἔχομεν:

(2) $$\mathrm{int}(A)_\delta = C\,\overline{(CA)}_\delta.$$

Ἤδη, ἐκ τῶν (1) καὶ (2) προκύπτει τελικῶς, ὅτι:

$$\partial(A)_\delta = \bar{A}_\delta - \mathrm{int}(A)_\delta. \quad \square$$

Ἄμεσος συνέπεια τῆς προτάσεως (8.11) εἶναι ἡ ἀκόλουθος πρότασις:

(8.13) $$\forall\, A \subseteq X,\ \forall\, \delta > 0,\ \partial\,(A)_\delta = \partial\,(CA)_\delta.$$

Ἀπόδειξις:

Συμφώνως πρὸς τὴν πρότασιν (8.11) ἔχομεν:

$$\partial\,(A)_\delta = \bar{A}_\delta \cap \overline{(CA)}_\delta$$

καὶ $$\partial\,(CA)_\delta = \overline{(CA)}_\delta \cap \overline{(C(CA))}_\delta.$$

Ἀλλὰ $$\overline{(C(CA))}_\delta = \bar{A}_\delta.$$

Ἄρα:

$$\partial\,(A)_\delta = \partial\,(CA)_\delta. \quad \square$$

Θὰ δείξωμεν ἤδη ὅτι:

(8.14) $$\forall\, A \subseteq X,\ \forall\, \delta > 0,\ \text{εἶναι:}$$

(α) $\partial\,(A)_\delta \cap \mathrm{int}(A)_\delta = \varnothing$, (β) $\partial\,(A)_\delta \cap \mathrm{ext}(A)_\delta = \varnothing$,

(γ) $\mathrm{int}(A)_\delta \cap \mathrm{ext}(A)_\delta = \varnothing$ καὶ (δ) $\mathrm{int}(A)_\delta \cup \partial(A)_\delta \cup \mathrm{ext}(A)_\delta = X$.

Ἀπόδειξις:

(α) Συμφώνως πρὸς τὴν πρότασιν (8.12) εἶναι:

$$\partial\,(A)_\delta = \bar{A}_\delta - \mathrm{int}(A)_\delta.$$

Ἑπομένως

$$\partial\,(A)_\delta \cap \mathrm{int}(A)_\delta = \varnothing.$$

(β) Συμφώνως πρὸς τὴν πρότασιν (8.11) εἶναι:

$$\partial\,(A)_\delta = \bar{A}_\delta \cap \overline{(CA)}_\delta.$$

Ἄρα:

(1) $$\partial\,(A)_\delta \subseteq \bar{A}_\delta.$$

'Αλλὰ λόγῳ τῆς (8.5),

(2) $$\operatorname{ext}(A)_\delta = C\bar{A}_\delta.$$

'Εκ τῶν (1) καὶ (2) προκύπτει ἀμέσως ὅτι:

$$\partial (A)_\delta \cap \operatorname{ext}(A)_\delta = \varnothing.$$

(γ) Λόγῳ τῆς (2) ἔχομεν:

(3) $$\operatorname{int}(A)_\delta \cap \operatorname{ext}(A)_\delta = \operatorname{int}(A)_\delta \cap C\bar{A}_\delta.$$

'Αλλὰ συμφώνως πρὸς τὴν πρότασιν (7.3), εἶναι:

(4) $$\operatorname{int}(A)_\delta \subseteq A.$$

'Επίσης, λόγω τῆς (5.1),

$$A \subseteq \bar{A}_\delta.$$

ἤτοι:

(5) $$C\bar{A}_\delta \subseteq CA.$$

Ἤδη ἐκ τῶν (3), (4) καὶ (5) προκύπτει ὅτι:

$$\operatorname{int}(A)_\delta \cap \operatorname{ext}(A)_\delta = \varnothing$$

(δ) Εἶναι $A \cup C\,A = X$, ὁπότε:

(6) $$\overline{(A \cup CA)}_\delta = \bar{X}_\delta.$$

Εἶναι φανερὸν ὅμως, ὅτι $\bar{X}_\delta = X$, ὁπότε ἡ (6) γίνεται:

$$\overline{(A \cup CA)}_\delta = X,$$

ἤ, λόγῳ τῆς (5.8),

(7) $$\bar{A}_\delta \cup \overline{(CA)}_\delta = X.$$

'Αλλὰ ἐκ τῆς (8.12) συνάγομεν ὅτι:

$$\bar{A}_\delta = \operatorname{int}(A)_\delta \cup \partial(A)_\delta \quad \text{καὶ} \quad \overline{(CA)}_\delta = \operatorname{int}(CA)_\delta \cup \partial(CA)_\delta,$$

ὁπότε ἡ (7) γίνεται:

$$\operatorname{int}(A)_\delta \cup \partial(A)_\delta \cup \operatorname{int}(CA)_\delta \cup \partial(CA)_\delta = X,$$

ἤ, λόγῳ τῆς (8.13),

(8) $$\operatorname{int}(A)_\delta \cup \partial(A)_\delta \cup \operatorname{int}(CA)_\delta = X.$$

Τέλος, ἐκ τῆς (8) καὶ τῆς (8.4), προκύπτει τελικῶς ὅτι:

$$\mathrm{int}(A)_\delta \cup \partial(A)_\delta \cup \mathrm{ext}(A)_\delta = X. \quad \square$$

Ἐπίσης διαπιστοῦται εὐκόλως ὅτι:

(8.15) $\quad (A \subseteq X,\ \delta > \delta') \Rightarrow (\partial\,(A)_\delta \supseteq \partial(A)_{\delta'}).$

Ἀπόδειξις:

$$(\chi \in \partial\,(A)_{\delta'}) \Rightarrow (\forall \varepsilon > \delta',\ \pi(\chi,\varepsilon) \cap A \neq \varnothing \text{ καὶ } \pi(\chi,\varepsilon) \cap CA \neq \varnothing) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (\forall \varepsilon > \delta,\ \pi(\chi,\varepsilon) \cap A \neq \varnothing \text{ καὶ } \pi(\chi,\varepsilon) \cap CA \neq \varnothing) \Rightarrow (\chi \in \partial(A)_\delta),$$

ἤτοι:

$$\partial\,(A)_\delta \supseteq \partial\,(A)_{\delta'}. \quad \square$$

Εἰς τὴν εἰδικὴν περίπτωσιν, καθ' ἣν $\delta' = 0$, ἔχομεν τὴν ἀκόλουθον πρότασιν:

(8.16) $\quad (A \subseteq X,\ \delta > 0) \Rightarrow (\partial\,(A)_\delta \supseteq \partial\,(A)).$

Τέλος, θὰ δείξωμεν ὅτι:

(8.17) $\quad \forall\, A \subseteq X,\ \forall \delta > 0,\ (\partial(A)_\delta = \varnothing) \Leftrightarrow (\bar{A}_\delta = \mathrm{int}(A)_\delta).$

Ἀπόδειξις:

Συμφώνως πρὸς τὴν πρότασιν (8.12), ἔχομεν:

$$\partial(A)_\delta = \bar{A}_\delta - \mathrm{int}(A)_\delta.$$

Ἄρα $\qquad (\partial(A)_\delta = \varnothing) \Rightarrow (\bar{A}_\delta \subseteq \mathrm{int}(A)_\delta)$

καί, ἐπειδὴ $\mathrm{int}(A)_\delta \subseteq \bar{A}_\delta$, προκύπτει ὅτι:

$$\bar{A}_\delta = \mathrm{int}(A)_\delta.$$

Ἀντιστρόφως:

$$(\bar{A}_\delta = \mathrm{int}(A)_\delta) \Rightarrow (\bar{A}_\delta - \mathrm{int}(A)_\delta = \varnothing) \Rightarrow (\partial(A)_\delta = \varnothing).$$

Κατὰ συνέπειαν

$$\forall\, A \subseteq X, \quad \forall \delta > 0, \quad (\partial(A)_\delta = \varnothing) \Leftrightarrow (\bar{A}_\delta = \mathrm{int}(A)_\delta). \quad \square$$

9. δ— ἀνοικτὰ σύνολα.

Ἔστω $A \subseteq X$ καὶ $\delta > 0$.

(9.1) Ὁρισμός: Τὸ A θὰ καλῆται *δ—ἀνοικτὸν* σύνολον, ἐάν:

(i) εἶναι ἀνοικτόν· ἤτοι, ἐὰν $\mathrm{int}(A) = A$, καὶ

(ii) $\mathrm{int}(A)_\delta \neq \varnothing$.

Εἶναι φανερὸν ὅτι:

(9.2) Ἐὰν $\chi \in X$ κα' $\varepsilon > 0$, τότε:

(i) ἐὰν $\varepsilon > \delta$, ἡ $\pi(\chi,\varepsilon)$ εἶναι δ—ἀνοικτὸν σύνολον καὶ

(ii) ἐὰν $\varepsilon \leqq \delta$, ἡ $\pi(\chi,\varepsilon)$ δὲν εἶναι δ—ἀνοικτὸν σύνολον.

Εἰς τὴν περίπτωσιν καθ' ἣν ὁ χῶρος X εἶναι χῶρος B - W, θὰ δείξωμεν ὅτι:

(9.3) $\forall A \subseteq X,\ \forall \delta > 0,\ (A\ \delta\text{—ἀνοικτὸν}) \Rightarrow (\mathrm{int}(A)_\delta = C\,\overline{\pi}(CA,\delta))$.

Ἀπόδειξις:

Ἔστω ὅτι τὸ A εἶναι δ—ἀνοικτὸν σύνολον, ὁπότε, συμφώνως πρὸς τὸν ὁρισμὸν (9.1),

(1) τὸ A εἶναι ἀνοικτόν, καὶ

(2) $$\mathrm{int}(A)_\delta \neq \varnothing.$$

Ὡς γνωστὸν (ἴδε πρότασιν (7.7)),

(3) $$\forall A \subseteq X,\ \forall \delta > 0,\ \mathrm{int}(A)_\delta \subseteq C\,\overline{\pi}(CA,\delta).$$

Ἐπομένως, διὰ νὰ δειχθῇ ἡ τεθεῖσα πρότασις, ἀρκεῖ νὰ δειχθῇ ὅτι:

(4) $$C\,\overline{\pi}(CA,\delta) \subseteq \mathrm{int}(A)_\delta.$$

Κατ' ἀρχὴν ἐκ τῶν (2) καὶ (3) παρατηροῦμεν, ὅτι θὰ εἶναι κατ' ἀνάγκην

$$C\,\overline{\pi}(CA,\delta) \neq \varnothing.$$

Κατόπιν τῆς παρατηρήσεως ταύτης ἄς θεωρήσωμεν τυχὸν σημεῖον $\chi \in C\,\overline{\pi}(CA,\delta)$.

Ἐφ' ὅσον τὸ $\chi \in C\,\overline{\pi}(CA,\delta)$, τὸ $\chi \notin \overline{\pi}(CA,\delta)$ καὶ ὡς ἐκ τούτου

(5) $$\rho(\chi, CA) \geqq \delta.$$

Διότι ἐὰν $\rho(\chi,CA) < \delta$, συμφώνως πρὸς τὴν πρότασιν (4.6, β), τὸ $\chi \in \overline{\pi}(CA,\delta)$.

Ἄς ὑποθέσωμεν ἤδη ὅτι:

(6) $$\rho(\chi, CA) = \delta.$$

Λόγῳ τῆς (1) τὸ CA εἶναι κλειστὸν σύνολον, ἐπομένως ἐφ' ὅσον ἰσχύει ἡ (6) καὶ ὁ X εἶναι χῶρος B - W,

$$\exists \chi_1 \in CA,\ |\chi_1\chi| = \delta,$$

ἤτοι:

$$\exists \chi_1 \in CA, \ \chi \in \overline{\pi} \ (\chi_1, \delta),$$

πρᾶγμα ἄτοπον, διότι τὸ $\chi \notin \overline{\pi} \ (CA, \delta) = \bigcup_{\chi_0 \in CA} \overline{\pi} \ (\chi_0, \delta)$.

Ὥστε ἡ (6) δὲν εἶναι ἀληθής· καί, ἐφ' ὅσον εἶναι ἀληθὴς ἡ (5), θὰ εἶναι κατ' ἀνάγκην

(7) $$\rho(\chi, CA) > \delta.$$

Ἄμεσος συνέπεια τῆς (7) εἶναι προφανῶς ὅτι:

$$\exists \varepsilon > \delta, \ \pi(\chi, \varepsilon) \cap CA = \varnothing,$$

ἤτοι:

$$\exists \varepsilon > \delta, \ \pi(\chi, \varepsilon) \subseteq A.$$

Ἐπομένως $\chi \in \mathrm{int}(A)_\delta$ καί, ἐπειδὴ τὸ χ ἐθεωρήθη τυχὸν σημεῖον τοῦ $C \, \overline{\pi} \ (CA, \delta)$, ἡ (4) εἶναι ἀληθής. □

Τὸ ἀντίστροφον τῆς προτάσεως αὐτῆς δὲν ἰσχύει, δηλαδή:

(9.4) Ἐὰν ὁ χῶρος X εἶναι χῶρος B-W, δὲν εἶναι ἀληθὲς ὅτι:

$\forall A \subseteq X, \ \forall \delta > 0, \ (\mathrm{int}(A)_\delta = C \, \overline{\pi} \ (CA, \delta)) \Rightarrow$ (A δ—ἀνοικτόν).

Πράγματι:

Ἔστω $X = \mathbf{R}_1$ καὶ $A = \{\chi : (\chi \in X) \ (|\chi\chi_0| > \rho)\} \cup \{\chi_0\}$.

Εἶναι φανερὸν ὅτι:

$$C \, \overline{\pi} \ (CA, \delta) = \{\chi : (\chi \in X) \ (|\chi\chi_0| > \rho + \delta)\} = \mathrm{int}(A)_\delta,$$

ἐνῷ τὸ A δὲν εἶναι δ—ἀνοικτόν, διότι τὸ χ_0 εἶναι μεμονωμένον σημεῖον αὐτοῦ. □

Θὰ δείξωμεν ὅτι:

(9.5) Ἐὰν ὁ χῶρος X εἶναι χῶρος B-W, τότε:

$\forall A \subseteq X, \ \forall \delta > 0,$ (A δ—ἀνοικτὸν) $\Rightarrow$ (CA δ—κλειστόν).

Ἀπόδειξις:

Συμφώνως πρὸς τὴν πρότασιν (9.3),

(A δ—ἀνοικτὸν) $\Rightarrow (\mathrm{int}(A)_\delta = C \, \overline{\pi} \ (CA, \delta))$,

ἤτοι:

(1) (A δ—ἀνοικτὸν) $\Rightarrow (C[\mathrm{int}(A)_\delta] = \overline{\pi} \ (CA, \delta))$.

Ἀλλά, συμφώνως πρὸς τὴν πρότασιν (7.14),

$$\forall A \subseteq X, \ \forall \delta > 0, \ \mathrm{int}(A)_\delta = C(\overline{CA})_\delta,$$

ἤτοι:

(2) $\forall A \subseteq X, \forall \delta > 0, \ C[\mathrm{int}(A)_\delta] = \overline{(CA)}_\delta$.

Ἤδη ἐκ τῶν (1) καὶ (2) συνάγομεν ὅτι:

$$\overline{(CA)}_\delta = \overline{\pi}\,(CA, \delta),$$

καὶ ὡς ἐκ τούτου τὸ CA εἶναι δ—κλειστὸν σύνολον. □

Τὸ ἀντίστροφον τῆς προτάσεως ταύτης δὲν εἶναι ἀληθές, δηλαδή:

(9.6) Δὲν εἶναι ἐν γένει ἀληθὲς ὅτι:

$\forall A \subseteq X, \forall \delta > 0,$ (A δ—κλειστὸν) ⇒ (CA δ—ἀνοικτόν).

Πράγματι:

Ἔστω $X = \mathbf{R}_1$, $\chi_0 \in \mathbf{R}_1$ καὶ $A = \mathbf{R}_1 - \pi(\chi_0, \delta)$.

Προφανῶς τὸ A εἶναι δ—κλειστόν, ἐνῷ τὸ $CA = \pi(\chi_0, \delta)$ δὲν εἶναι δ—ἀνοικτὸν (ἴδε πρότ. (9.2)). □

Θὰ δείξωμεν ἤδη τὴν ἀκόλουθον πρότασιν:

(9.7) Ἔστω $(A_i)_{i \in I}$ μία οἰκογένεια ὑποσυνόλων τοῦ X καὶ $\delta > 0$. Ἐὰν

(i) $\forall i \in I$, A_i ἀνοικτὸν καὶ

(ii) $\exists i \in I$, A_i δ—ἀνοικτόν,

τότε τὸ σύνολον $A = \bigcup_{i \in I} A_i$ εἶναι δ—ἀνοικτόν.

Ἀπόδειξις:

Λόγῳ τῆς ὑποθέσεως (i),

(1) τὸ A εἶναι ἀνοικτὸν σύνολον.

Ἀφ' ἑτέρου λόγῳ τῆς ὑποθέσεως (ii),

(2) $\exists\, i \in I, \ \mathrm{int}(A_i)_\delta \neq \varnothing$.

Ἀλλά, ἐκ τῆς προτάσεως (7.12,α), ἔχομεν:

(3) $\mathrm{int}(A)_\delta \supseteq \bigcup_{i \in I} \mathrm{int}(A_i)_\delta$.

Ἤδη ἐκ τῶν (2) καὶ (3) συνάγομεν ὅτι:

$$\mathrm{int}(A)_\delta \neq \varnothing,$$

ὁπότε, λαμβανομένης ὑπ' ὄψιν τῆς (1), προκύπτει τελικῶς, ὅτι τὸ A εἶναι δ—ἀνοικτὸν σύνολον. □

Ἄμεσος συνέπεια τῆς προτάσεως ταύτης εἶναι προφανῶς ἡ ἀκόλουθος πρότασις:

(9.8) $(\forall i \in I,\ A_i\ \delta\text{—ἀνοικτὸν}) \Rightarrow (\bigcup_{i\in I} A_i\ \delta\text{—ἀνοικτόν})$.

Ἐπίσης διαπιστοῦται εὐκόλως, ὅτι:

(9.9) Ἐὰν $A_1, A_2, \ldots, A_n$ εἶναι n δ—ἀνοικτὰ ὑποσύνολα τοῦ X καὶ ἐὰν $\mathrm{int}(\bigcap_{K=1}^{n} A_K)_\delta \neq \varnothing$, τότε ἡ τομὴ αὐτῶν $\bigcap_{K=1}^{n} A_K$ εἶναι δ—ἀνοικτὸν σύνολον.

Ἀπόδειξις:

Ἐφ' ὅσον τὰ $A_1, A_2, \ldots, A_n$ ὑποτίθενται δ—ἀνοικτά, συμφώνως πρὸς τὸν ὁρισμὸν (9.1), θὰ εἶναι ἀνοικτά. Ἑπομένως καὶ ἡ τομή των $\bigcap_{K=1}^{n} A_K$ εἶναι ἐπίσης ἀνοικτὸν σύνολον.

Ἑπομένως τὸ $\bigcap_{K=1}^{n} A_K$ εἶναι δ—ἀνοικτόν, διότι ὑπετέθη ὅτι $\mathrm{int}(\bigcap_{K=1}^{n} A_K)_\delta \neq \varnothing$.

Τέλος θὰ δείξωμεν ὅτι:

(9.10) Ἐὰν τὸ σύνολον δεικτῶν I τῆς οἰκογενείας $(A_i)_{i\in I}$ εἶναι ἄπειρον, τότε δὲν εἶναι ἐν γένει ἀληθὲς ὅτι:

$$(\forall\, i \in I,\ A_i\ \delta\text{—ἀνοικτόν},\ \mathrm{int}(\bigcap_{i\in I} A_i)_\delta \neq \varnothing) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (\bigcap_{i\in I} A_i\ \delta\text{—ἀνοικτόν}).$$

Πράγματι:

Ἔστωσαν τὰ σύνολα:

$$\forall\, n \in \Phi,\ A_n = \pi(\chi_0, \varepsilon_n),\ \text{ἔνθα}\ X = \mathbf{R}_2$$

καὶ (ε_n) εἶναι μία φθίνουσα ἀκολουθία θετικῶν ἀριθμῶν τοιαύτη, ὥστε:

$$\lim_{n\to\infty} \varepsilon_n = 2\delta.$$

Συμφώνως πρὸς τὴν πρότασιν (9.2), τὰ σύνολα (A_n) εἶναι δ—ἀνοικτά, διότι:

$$\forall\, n \in \Phi,\ \varepsilon_n > 2\,\delta.$$

Ἐπίσης εἶναι φανερὸν ὅτι:

(1) $$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \overline{\pi}\ (\chi_0, 2\delta),$$

ἐπομένως
$$\operatorname{int}\Big(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\Big)_\delta = \pi(\chi_0,\delta) \neq \varnothing .$$

Ἐν τούτοις τὸ σύνολον $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ δὲν εἶναι δ—ἀνοικτόν, διότι, λόγῳ τῆς (1), δὲν εἶναι ἀνοικτὸν σύνολον. $\square$

III. ΣΥΓΚΡΙΣΕΙΣ - ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

1. Γενίκευσις θεμελιωδῶν ἐννοιῶν.

Εἰς τὴν § 9 τοῦ I μέρους ἐλέχθη, ὅτι οἱ εἰσαγόμενοι νέοι ὁρισμοὶ θὰ πρέπη νὰ εἶναι γενικεύσεις ἀντιστοίχων γνωστῶν ὁρισμῶν, ἵνα ἐξ αὐτῶν προκύπτουν, ὡς εἰδικαὶ περιπτώσεις, οἱ ὁρισμοὶ γνωστῶν θεμελιωδῶν ἐννοιῶν τῆς συνήθους τοπολογίας τοῦ μετρικοῦ χώρου.

Εἰς τὸ II μέρος ἐδόθησαν οἱ ὁρισμοὶ τῶν ἐννοιῶν: «δ—συγκλίνουσα ἀκολουθία» [II, (1.1)], «δ—θεμελιώδης ἀκολουθία» [II, (2.1)], «δ—ὁριακὸν σημεῖον» [II, (3.1)], «δ—παράγωγον σύνολον» [II, (3.2)], «δ—μεμονωμένον σημεῖον» [II, (3.12)], «δ—περίβλημα» [II, (5.1)], «δ—παράγωγον σύνολον δευτέρας τάξεως» [II, (5.12)], «δ—παράγωγον σύνολον ν—τάξεως» [II, (5.15)], «δ—περίβλημα δευτέρας τάξεως» [II, (5.17)], «δ—ἐσωτερικὸν σημεῖον» [II, (7.1)], «δ—ἀνοικτὸς πυρὴν» [II, (7.2)], «δ—ἀνοικτὸς πυρὴν δευτέρας τάξεως» [II, (7.15)], «δ—ἐξωτερικὸν σημεῖον» [II, (8.1)], «δ—ἐξωτερικὸν συνόλου» [II, (8.2)], «δ—συνοριακὸν σημεῖον» [II, (8.9)] καὶ «δ—σύνορον» [II, (8.10)].

Ὡς ἐξετέθη εἰς τὰς οἰκείας παραγράφους τοῦ II μέρους, οἱ νέοι αὐτοὶ ὁρισμοὶ διὰ $\delta = 0$ ἀνάγονται ἀντιστοίχως εἰς τοὺς ἐκτεθέντας εἰς τὸ I μέρος ὁρισμοὺς τῶν γνωστῶν ἐννοιῶν: «συγκλίνουσα ἀκολουθία», «θεμελιώδης ἀκολουθία», «ὁριακὸν σημεῖον», «παράγωγον σύνολον,» «μεμονωμένον σημεῖον», «περίβλημα», «παράγωγον σύνολον δευτέρας τάξεως», «παράγωγον σύνολον ν τάξεως», «περίβλημα δευτέρας τάξεως», «ἐσωτερικὸν σημεῖον», «ἀνοικτὸς πυρήν», «ἀνοικτὸς πυρὴν δευτέρας τάξεως», «ἐξωτερικὸν σημεῖον», «ἐξωτερικὸν συνόλου», «συνοριακὸν σημεῖον» καὶ «σύνορον».

Ὥστε οἱ ἀνωτέρω ἀναφερθέντες νέοι ὁρισμοὶ ἀποτελοῦν γενικεύσεις τῶν ἀντιστοίχως ἐκτεθέντων γνωστῶν ὁρισμῶν ὑπὸ τὴν ἔννοιαν, ὅτι ἕκαστος ἐκ τῶν τελευταίων προκύπτει ὡς εἰδικὴ περίπτωσις (διὰ $\delta = 0$) τοῦ ἀντιστοίχου νέου τοιούτου.

Εἰς τὴν § 4 τοῦ II μέρους ἐδόθη ὁ ὁρισμὸς τῆς ἐννοίας τῆς ε—ἐπεκτάσεως $\overline{\pi}\,(A,\varepsilon)$ συνόλου $A \in 2^X$ ὡς ἀκολούθως:

$$\overline{\pi}\,(A,\varepsilon) = \bigcup_{\chi \varepsilon A} \overline{\pi}\,(\chi,\varepsilon),$$

ἔνθα:

$$\forall \chi \in X,\ \overline{\pi}\,(\chi, \varepsilon) = \{z\colon (z \in X)\ (|z\chi| \leqq \varepsilon)\}.$$

Ἐὰν ληφθῇ ὑπ' ὄψιν ἡ πρότασις (α) τῆς § 1 τοῦ I μέρους, καθίσταται φανερὸν ὅτι:

$$\forall \chi \in X,\ (\varepsilon = 0) \Rightarrow (\overline{\pi}\,(\chi,\varepsilon) = \{\chi\}),$$

καὶ ὡς ἐκ τούτου

$$\forall A \in 2^X,\ (\varepsilon = 0) \Rightarrow (\overline{\pi}\,(A,\varepsilon) = A).$$

Κατόπιν τούτου προκύπτει εὐκόλως, ὅτι ἡ ἔννοια τοῦ «δ—κλειστοῦ συνόλου» [II, (6.1)] εἶναι γενίκευσις τῆς γνωστῆς ἐννοίας τοῦ «κλειστοῦ συνόλου» [I, § 6], δεδομένου ὅτι ὁ ὁρισμὸς τῆς δευτέρας προκύπτει ἐκ τοῦ ὁρισμοῦ τῆς πρώτης διὰ $\delta = 0$.

Ἡ μόνη ἐξαίρεσις παρουσιάζεται εἰς τὴν ἔννοιαν τοῦ «δ—ἀνοικτοῦ συνόλου [II, (9.1)]. Διὰ $\delta = 0$, ὁ ὁρισμὸς οὗτος λαμβάνει τὴν μορφήν: «Τὸ A θὰ καλῆται ἀνοικτὸν σύνολον, ἐάν:

$$\text{(i) } \operatorname{int}(A) = A \quad \text{καὶ} \quad \text{(ii) } \operatorname{int}(A) \neq \varnothing\text{».}$$

Ὁ οὕτω προκύπτων ὁρισμὸς δὲν συμπίπτει προφανῶς μὲ τὸν γνωστὸν ὁρισμὸν τῆς ἐννοίας τοῦ «ἀνοικτοῦ συνόλου» [I, § 6] καὶ τοῦτο, διότι εἰς τὸν τελευταῖον δὲν εἶναι κατ' ἀνάγκην $\operatorname{int}(A) \neq \varnothing$.

2. Ἡ ἰσχὺς τῶν θεμελιωδῶν προτάσεων. Συμπεράσματα.

Εἰς τὸ I μέρος ἐξετέθησαν αἱ βασικώτεραι ἐκ τῶν γνωστῶν προτάσεων τῆς τοπολογίας τοῦ μετρικοῦ χώρου.

Παρατηροῦμεν, ὅτι πολλαὶ ἐκ τῶν προτάσεων αὐτῶν «ἐξακολουθοῦν νὰ ἰσχύουν» καὶ μετὰ τὴν εἰσαγωγὴν τῶν νέων θεμελιωδῶν ἐννοιῶν. Δηλαδὴ πολλαὶ ἐκ τῶν προτάσεων αὐτῶν προκύπτουν ὡς εἰδικαὶ περιπτώσεις (διὰ $\delta = 0$) ἀναλόγων προτάσεων, αἱ ὁποῖαι ἀφοροῦν εἰς ἰδιότητας τῶν νέων γενικευμένων θεμελιωδῶν ἐννοιῶν.

Ἀναφέρομεν χαρακτηριστικῶς τὰς προτάσεις IV καὶ V τῆς § 5 τοῦ I μέρους, αἱ ὁποῖαι προκύπτουν διὰ $\delta = 0$ ἐκ τῶν προτάσεων (5.7), (5.8), (7.12) καὶ (7.13) τοῦ II μέρους.

Ἀντιθέτως ὑπάρχουν θεμελιώδεις προτάσεις τῆς τοπολογίας τοῦ μετρικοῦ χώρου, αἱ ὁποῖαι δὲν ἰσχύουν διὰ τὰς γενικευμένας θεμελιώδεις ἐννοίας.

Π.χ. ἡ πρότασις I τῆς § 4 τοῦ I μέρους δὲν ἰσχύει εἰς τὴν περίπτωσιν τῆς δ—συγκλίσεως (ἴδε II, (1.3)).

Ἄμεσος συνέπεια τούτου εἶναι προφανῶς τὸ ἀκόλουθον συμπέρασμα:

(A) Ὁ μετρικὸς χῶρος X δὲν δύναται νὰ καταστῇ χῶρος L^* τῇ βοηθείᾳ τῆς δ—συγκλίσεως. Ἐπίσης ἡ πρότασις V,β τῆς § 6 τοῦ I μέρους δὲν ἰσχύει διὰ τὰ δ—ἀνοικτὰ σύνολα (ἴδε: II, (9.9)).

Ἄμεσος συνέπεια τούτου καὶ τοῦ ὁρισμοῦ τῆς ἐννοίας τοῦ τοπολογικοῦ χώρου (ἴδε: I, § 7) εἶναι τὸ ἀκόλουθον συμπέρασμα:

(Β) Ἐὰν $\mathfrak{D}_\delta$ εἶναι τὸ σύνολον τῶν δ—ἀνοικτῶν ὑποσυνόλων τοῦ X, ἡ δυὰς (X, $\mathfrak{D}_\delta$) δὲν εἶναι τοπολογικὸς χῶρος.

Ἂς θεωρήσωμεν ἤδη τὴν συνάρτησιν:

$$u\colon 2^X \to 2^X,$$

καθ' ἥν:

$$\forall A \in 2^X,\ u(A) = \bar{A}_\delta,$$

ἔνθα $\delta > 0$ καὶ $\bar{A}_\delta$ τὸ δ—περίβλημα τοῦ συνόλου A. Ἐκ τῶν ὁρισμῶν (3.2) καὶ (5.1) τοῦ II μέρους καθίσταται φανερὸν ὅτι:

(α) $u(\varnothing) = \varnothing$ καὶ

(β) $\forall A \in 2^X,\ A \subseteq u(A).$

Ἀφ' ἑτέρου ἐκ τῆς προτάσεως (5.8) τοῦ II μέρους συνάγομεν ὅτι:

(γ) $\forall A \in 2^X,\ \forall B \in 2^X,\ u(A \cup B) = u(A) \cup u(B).$

Ἤδη ἐκ τῶν (α), (β), (γ) καὶ τοῦ ὁρισμοῦ τῆς ἐννοίας τοῦ C—χώρου (ἴδε: I, § 8) προκύπτει τὸ ἀκόλουθον συμπέρασμα:

(Γ) Ἐὰν ἡ συνάρτησις

$$u\colon 2^X \to 2^X$$

εἶναι τοιαύτη, ὥστε

$$\forall A \in 2^X,\ u(A) = \bar{A}_\delta,$$

ἔνθα $\delta > 0$ καὶ $\bar{A}_\delta$ τὸ δ—περίβλημα τοῦ συνόλου A, τότε ἡ δυὰς (X, u) εἶναι C—χῶρος.

Τέλος ἐκ τῆς προτάσεως (5.20) τοῦ II μέρους προκύπτει, ὅτι δὲν εἶναι ἐν γένει ἀληθὲς ὅτι

$$\forall A \in 2^X,\ u(u(A)) = u(A).$$

Ἑπομένως (ἴδε: I, § 8) ἡ δυὰς (X, u) *δὲν εἶναι τοπολογικὸς C—χῶρος.*

Ὥστε:

Αἱ νέαι εἰσαγόμεναι γενικευμέναι ἔννοιαι δὲν προσφέρονται διὰ τὴν δημιουργίαν ἑνὸς συνήθους τοπολογικοῦ χώρου (ἢ ἑνὸς τοπολογικοῦ C—χώρου), ἀλλ' ἑνὸς πλέον γενικευμένου χώρου, τοῦ C—χώρου.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

1. N. Burbaki: III Topologie Generale, Paris 1951.
2. G. Choquet: Cours d'Analyse, II Topologie, Paris 1964
3. E. Čech: Topological spaces, London 1966.
4. J. Dieudonné: Foundations of Modern Analysis, London 1960.
5. S. Gaal: Point set Topology, London 1964.
6. F. Hausdorf: Mengenlehre, Berlin 1927.
7. C. Kuratowski: Topologie, I, Warszawa 1952.
8. B. Mendelson: Introduction to Topology, London 1962.
9. T. Moore: Elementary General Topology, 1964 by prentice-hall, Inc. Englewood Cliffs, N.J.
10. M. Newman: Topology of plane sets, Cambridge 1961.

ΠΙΝΑΞ ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΩΝ