LA NOTION DU BORNAGE SUR UN ESPACE TOPOLOGIQUE

Par

N. OECONOMIDIS

LA NOTION DU BORNAGE SUR UN ESPACE TOPOLOGIQUE

Par N. OECONOMIDIS

1. Bornages.

Définition 1.1 - *Soit* (X,τ) *un espace topologique; un ensemble non vide* $\mathfrak{D}$ *de parties de* X *s'appele* **bornage** *sur* (X,τ), *s'il possède les propriétés suivantes:*

(Π. 1) $(v \in \mathfrak{D}$ et $E \subseteq v) \Rightarrow (E \in \mathfrak{D})$,

(Π. 2) $(v_1 \in \mathfrak{D}$ et $v_2 \in \mathfrak{D}) \Rightarrow (v_1 \cup v_2 \in \mathfrak{D})$,

(Π. 3) $\forall x \in X, \ \exists v \in \mathfrak{D} \cap \tau, \ x \in v$.

Les propriétés (Π. 1), (Π. 2) et (Π. 3) sont dites **axiomes** des bornages.

Exemple 1.2

Soit (X,d) un espace métrique; si

$$\tau = \{\omega: \ \omega \subseteq X \ \text{et} \ \forall x \in \omega, \ \exists \varepsilon > 0, \ B(x,\varepsilon) \subseteq \omega\},$$

où $B(x,\varepsilon) = \{y: y \in X \text{ et } d(x,y) < \varepsilon\}$, il est connu que l'ensemble τ est une structure topologique sur X. Si l'on pose

$$\mathfrak{D} = \{v: \ v \subseteq X \ \text{et} \ \exists x \in X, \ \exists \rho > 0, \ v \subseteq B(x,\rho)\},$$

il est clair que l'ensemble $\mathfrak{D}$ est un bornage sur l'espace topologique (X,τ).

De la définition 1.1 résultent les conséquences presque immédiates suivantes:

1.3. $\varnothing \in \mathfrak{D}$.

1.4. *Si* $(v_i)_{i \in I}$ *est une famille de parties de* X, *alors:*

$$(I \neq \varnothing \ \text{et} \ \exists i \in I, \ v_i \in \mathfrak{D}) \Rightarrow (\bigcap_{i \in I} v_i \in \mathfrak{D}).$$

1.5. *Toute réunion finie d'ensembles de* $\mathfrak{D}$ *est un ensemble de* $\mathfrak{D}$.

D'ailleurs on voit que:

1.6. $\forall x \in X, \ \{x\} \in \mathfrak{D}$.

En effet, si $x \in X$, d'après (Π. 3), $\exists\, v \in \mathfrak{D} \cap \tau$, $x \in v$. Mais $(v \in \mathfrak{D} \cap \tau) \Rightarrow (v \in \mathfrak{D})$ et $(x \in v) \Rightarrow (\{x\} \subseteq v)$. Enfin, d'après (Π. 1), $(v \in \mathfrak{D}$ et $\{x\} \subseteq v) \Rightarrow (\{x\} \in \mathfrak{D})$.

Comme conséquence immédiate des 1.5 et 1.6 on a la proposition suivante:

1.7. *Tout sous- ensemble fini de* X *est un ensemble de* $\mathfrak{D}$.

On peut démontrer que:

1.8. *L'ensemble* $\mathbf{B} = \mathfrak{D} \cap \tau$ constitue une base de τ.

Démonstration: Il est évident que $\mathbf{B} \subseteq \tau$; donc, il faut démontrer que

(1) $\forall\, \omega \in \tau, \ \forall\, x \in \omega, \ \exists\, \beta \in \mathbf{B}, \ x \in \beta \subseteq \omega.$

Soient $\omega \in \tau$ et $x \in \omega$. Puisque $x \in \omega \subseteq X$, d'après (Π. 3),

$$\exists\, v \in \mathbf{B} = \mathfrak{D} \cap \tau, \ \ x \in v.$$

Si l'on pose $\beta = \omega \cap v$, il est clair que

$$x \in \beta \subseteq \omega;$$

d'autre part, on vérifie aisement que $\beta \in \mathbf{B}$, donc

(2) $\exists\, \beta \in \mathbf{B}, \ \ x \in \beta \subseteq \omega.$

Mais la proposition (2) est valable pour chaque $\omega \in \tau$ et pour chaque $x \in \omega$, c'est-à-dire la proposition (1) est vraie.

Enfin, de la proposition 1.8 résultent les conséquences presque immédiates suivantes:

1.9. $\cup \{v: \ v \in \mathfrak{D}\} = X$.

1.10. $\forall\, x \in X$, *l'ensemble* $\mathbf{B}_x = \mathfrak{D} \cap \tau \cap V(x)$, *où* $V(x)$ *est l'ensemble des voisinages de* x, *constitue une base de* $V(x)$.

2. Bornages propres.

On vérifie aisement que:

2.1. *Si* $\mathfrak{D}$ *est un bornage sur l'espace topologique* (X,τ) *et* 2^X *est l'ensemble de toutes les parties de* X, *alors*:

$$(X \in \mathfrak{D}) \Leftrightarrow (\mathfrak{D} = 2^X).$$

En effet, il est évident d'abord que l'ensemble 2^X est un bornage sur (X,τ).

Supposons maintenant que $X \in \mathfrak{D}$· puisque $X \in \mathfrak{D}$, d'après (Π. 1), $(E \subseteq X) \Rightarrow (E \in \mathfrak{D})$ et par suite $2^X \subseteq \mathfrak{D}$. Mais on a toujours $\mathfrak{D} \subseteq 2^X$ et par conséquence $\mathfrak{D} = 2^X$.

Inversement, si $\mathfrak{D} = 2^X$ il est clair que $X \in \mathfrak{D}$.

Définition 2.2. Soit $\mathfrak{D}$ *un bornage sur l'espace topologique* (X,τ)· *si* $X \notin \mathfrak{D}$, *on dit que* $\mathfrak{D}$ *est un* **bornage propre** *sur* (X,τ).

On peut démontrer le théorème suivant:

2.3. *Soit* (X,τ) *un espace topologique; pour qu'il existe au moins un bornage propre sur* (X,τ), *il faut et il suffit que* (X,τ) *soit un espace non compact.*

Démonstration: (i) Supposons que (X,τ) est un espace non compact; alors il existe au moins un recouvrement ouvert $(\omega_i)_{i\in I}$ de X tel qu'on ne peut pas extraire un sous - recouvrement fini.

Si Ω est l'ensemble de toutes réunions finies d'ensembles de $(\omega_i)_{i\in I}$ et

$$\mathfrak{D} = \{v: \ \exists\, \omega \in \Omega, \ \ v \subseteq \omega\},$$

on vérifie aisement que l'ensemble $\mathfrak{D}$ est un bornage sur l'espace topologique (X,τ).

D'autre part, comme de $(\omega_i)_{i\in I}$ on ne peut pas extraire un sous-recouvrement fini, il est évident que $X \notin \mathfrak{D}$, c'est-à-dire l'ensemble $\mathfrak{D}$ est un bornage propre sur (X,τ). Donc, si (X,τ) est un espace non compact, il existe au moins un bornage propre sur (X,τ).

(ii) Supposons maintenant que (X,τ) est un espace compact et considérons un bornage quelconque $\mathfrak{D}$ sur (X,τ). D'après (Π.3),

$$\forall\, x \in X, \ \exists\ v \in \mathfrak{D} \cap \tau, \ \ x \in v$$

et par suite il existe au moins un recouvrement ouvert $(v_x)_{x\in X}$ de X, tel que

$$(1) \qquad \forall\, x \in X, \ \ v_x \in \mathfrak{D}.$$

Mais, comme l'espace (X,τ) est compact, de $(v_x)_{x\in X}$ on peut extraire un sous - recouvrement fini, c'est-à-dire il existe un sous-ensemble fini $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ de X, tel qu'on ait

$$(2) \qquad X = \bigcup_{i=1}^{n} v_{x_i}$$

Des (1), (2) et 1.5 résulte que $X \in \mathfrak{D}$ et par conséquence $\mathfrak{D}$ n'est pas un bornage propre sur (X,τ).

Il est donc bien exact que le théorème 2.3 est valable.

D'après 2.1 et 2.2, si $\mathfrak{D}$ est un bornage propre sur l'espace topologique (X,τ), alors $2^X - \mathfrak{D} \neq \varnothing$; dans ce cas on pose:

2.4 $$\mathfrak{D}^c = 2^X - \mathfrak{D}.$$

Si $\mathfrak{D}$ est un bornage propre sur l'espace topologique (X,τ), on peut démontrer que:

2.5 (α) $(u \in \mathfrak{D}^c \text{ et } u \subseteq E \subseteq X) \Rightarrow (E \in \mathfrak{D}^c)$.

(β) *Si* $(u_i)_{i \in I}$ *est une famille des parties de* X, *alors*:

$(I \neq \varnothing \text{ et } \exists\ i \in I,\ u_i \in \mathfrak{D}^c) \Rightarrow (\bigcup_{i \in I} u_i \in \mathfrak{D}^c)$.

(γ) $(u_1 \cup u_2 \in \mathfrak{D}^c) \Rightarrow (u_1 \in \mathfrak{D}^c$ *ou* $u_2 \in \mathfrak{D}^c)$.

(δ) $(v \in \mathfrak{D}) \Rightarrow (C\,v = (X - v) \in \mathfrak{D}^c)$.

(ε) $\forall\, x \in X,\ \exists\, u \in \mathfrak{D}^c \cap \tau,\ x \in u$.

Démonstration: (α) Supposons au contraire que $E \notin \mathfrak{D}^c$; alors $E \in \mathfrak{D}$ et puisque $u \subseteq E$ d'aprés (Π. 1), on a $u \in \mathfrak{D}$. Mais la dernière relation n'est pas vraie, donc $E \in \mathfrak{D}^c$.

(β) Cette proposition est une conséquence immédiate de (α).

(γ) Si au contraire $u_1 \in \mathfrak{D}$ et $u_2 \in \mathfrak{D}$, d'après (Π. 2), $u_1 \cup u_2 \in \mathfrak{D}$, ce qui n'est pas vrai. Donc, $u_1 \in \mathfrak{D}^c$ ou $u_2 \in \mathfrak{D}^c$.

(δ) Supposons au contraire que $Cv \notin \mathfrak{D}^c$; alors $C\,v \in \mathfrak{D}$ et puisque $v \in \mathfrak{D}$, d'après (Π. 2), $C\,v \cup v \in \mathfrak{D}$, c'est-à-dire $X \in \mathfrak{D}$.

Mais la derniére relation n'est pas valable, car $\mathfrak{D}$ est un bornage propre sur (X,τ); donc $C\,v \in \mathfrak{D}^c$.

(ε) Si $x \in X$ il est clair que $X \in \mathfrak{D}^c \cap \tau$ et $x \in X$; par suite $\forall\, x \in X$, $\exists\, u \in \mathfrak{D}^c \cap \tau,\ x \in u$.

De la proposition 1.7 résulte la conséquence presque immédiate suivante:

2.6. *Si* $\mathfrak{D}$ *est un bornage propre sur l'espace topologique* (X,τ), *alors*:

$\forall\, u \in \mathfrak{D}^c$, u *est un ensemble infini.*

En particulier:

2.7. *S'il existe un bornagc proprc sur l'espace topologique* (X,τ), *alors l'ensemble* X *est infini.*

On vérifie facilement que:

2.8. *Si* $\mathfrak{D}$ *est un bornage propre sur l'espace topologique* (X,τ), *alors*:

$$\forall\, x \in X, \quad C\{x\} = (X - \{x\}) \in \mathfrak{D}^c.$$

En effet, d'après 1.7,

(1) $$\forall\, x \in X, \ \{x\} \in \mathfrak{D}.$$

D'autre part, d'après 2.5 (δ),

(2) $$(\{x\} \in \mathfrak{D}) \Rightarrow (C\{x\} = (X - \{x\}) \in \mathfrak{D}^c).$$

Enfin, des (1) et (2) résulte que

$$\forall\, x \in X, \quad C\{x\} \in \mathfrak{D}^c.$$

Comme conséquence immédiate de 2.8 on a la proposition suivante:

2.9. *Si* $\mathfrak{D}$ *est un bornage propre sur l'espace topologique* (X,τ), *l'ensemble* $\mathfrak{D}^c$ *est infini.*

Soit $\mathfrak{D}$ un bornage sur un espace topologique (X,τ); tout ensemble de $\mathfrak{D}$ s'appele *ensemble* $\mathfrak{D}$ *- borné* de l'espace topologique (X,τ). Si le bornage $\mathfrak{D}$ n'est pas propre, tout sous - ensemble de X est un ensemble $\mathfrak{D}$ - borné de (X,τ). Par contre, si $\mathfrak{D}$ est un bornage propre, tout ensemble de $\mathfrak{D}^c = 2^X - \mathfrak{D}$ n'est pas un ensemble $\mathfrak{D}$ - borné de l'espace topologique (X,τ).

Dans cette terminologie on a la proposition suivante:

2.10. *Si* $\mathfrak{D}$ *est un bornage sur l'espace topologique* (X,τ), *tout ensemble compact de* (X,τ) *est un ensemble* $\mathfrak{D}$ *- borné de* (X,τ).

(La démonstration de cette proposition se trouve dans la démonstration de 2.3).

3. Base d'un bornage.

Définition 3.1. *Soit* $\mathfrak{D}$ *un bornage sur un espace topologique* (X,τ); *un sous - ensemble* **B** *de* $\mathfrak{D}$ *s'appele* **base** *du bornage* $\mathfrak{D}$, *si*

$$\forall\, v \in \mathfrak{D}, \ \exists\, \beta \in \mathbf{B}, \ v \subseteq \beta.$$

Par exemple, si $\mathfrak{D}$ est le bornage de l'exemple 1.2 et $\mathbf{B} = \{\mathbf{B}(x_o,n): n \in \mathbf{N}\}$, où x_o est un point fixe de X, il est clair que B est une base du bornage $\mathfrak{D}$.

On vérifie facilement que:

3.2. *Si deux bornages* $\mathfrak{D}_1$, $\mathfrak{D}_2$ *sur un espace topologique* (X,τ) *ont une base commune* **B**, *alors* $\mathfrak{D}_1 = \mathfrak{D}_2$.

En effet, d'après 3.1,

(1) $$\mathbf{B} \subseteq \mathfrak{D}_1 \text{ et}$$

(2) $$\forall\, v \in \mathfrak{D}_2, \quad \exists\, \beta \in \mathbf{B}, \quad v \subseteq \beta.$$

Si $v \in \mathfrak{D}_2$, d'après (2), $\exists\, \beta \in \mathbf{B}$, $v \subseteq \beta$; mais, grâce à (1), $\beta \in \mathfrak{D}_1$, donc $\exists\, \beta \in \mathfrak{D}_1$, $v \subseteq \beta$ et par suite $v \in \mathfrak{D}_1$. On a déjà démontrer que $(v \in \mathfrak{D}_2) \Rightarrow (v \in \mathfrak{D}_1)$, c'est-à-dire $\mathfrak{D}_2 \subseteq \mathfrak{D}_1$.

On peut démontrer de même que $\mathfrak{D}_1 \subseteq \mathfrak{D}_2$; donc $\mathfrak{D}_1 = \mathfrak{D}_2$.

Définition 3.3. Soient $\mathfrak{D}$ *un bornage sur un espace topologique* (X,τ) et $\mathbf{B}$ *une base de* $\mathfrak{D}$.

Si les ensembles de $\mathbf{B}$ *sont ouverts, on dit que* $\mathbf{B}$ *est une base* **ouverte** *de* $\mathfrak{D}$.

De même, si les ensembles de $\mathbf{B}$ *sont fermés, on dit que* $\mathbf{B}$ *est une base* **fermée** *de* $\mathfrak{D}$.

Si $\mathfrak{D}$ est le bornage de l'exemple 1.2 et $\mathbf{B} = \{\mathbf{B}(x_0,n) \colon n \in \mathbf{N}\}$, où x_0 est un point fixe de X, il est clair que B est une base ouverte du bornage $\mathfrak{D}$. Il est évident aussi que l'ensemble $\{\overline{B(x_0,n)} : n \in N\}$ est une base fermée du bornage $\mathfrak{D}$. Donc:

3.4 *Il existent des bornages qui ont des base ouvertes ou fermées.*

Par contre, on peut vérifie que:

3. 5 *Il existent des bornages qui n'ont pas des bases ouvertes ou fermées.*

En effet, soient $X = \mathbf{N} = \{1,2,\ldots, n,\ldots\}$ et $\tau = \{\varnothing, X, \{1,\}, \{1,2,\},\ldots, \{1,2,\ldots,n\}\ldots\}$; il est clair que τ est une structure topologique sur X, c'est-à-dire la couple (X,τ) est un espace topologique.

Considérons maintenant l'ensemble

(1) $$\mathbf{H} = \{H_1, H_2, \ldots, H_n, \ldots\},$$

où

(2) $$H_1 = \{1\} \quad \text{et} \quad \forall\, m \in \mathbf{N} - \{1\}, \quad H_m = \{mn \colon n \in \mathbf{N}\},$$

l'ensemble

(3) $$\mathbf{E} = \{\, H \colon H \text{ réunion finie d'ensembles de } \mathbf{H} \,\}$$

et l'ensemble

(4) $$\mathfrak{D} = \{\, v : \exists\, H \in \mathbf{E},\ v \subseteq H \,\}.$$

Des (1), (2), (3) et (4) résulte immédiatement que l'ensemble $\mathfrak{D}$ est une bornage propre sur l'espace topologique (X,τ).

Mais ce bornage ne peut avoir aucune base ouverte.

En effet, d'après (3) et (4),

(5) $$\forall\, m \in \mathbf{N}, \quad H_m \in \mathfrak{D}.$$

D'autre part, comme

$$\tau = \{\varnothing, X, \{1\}, \{1,2\}, ..., \{1,2,..., n\}, ...\},$$

d'après (2),

(6) $$\forall\, m \in \mathbf{N} - \{1\}, \quad \forall\, \omega \in \tau - \{X\}, \quad H_m \nsubseteq \omega.$$

Enfin, grâce aux (5) et (6), le bornage $\mathfrak{D}$ ne peut avoir aucune base ouverte.

Considérons maintenant l'ensemble

(7) $$\mathfrak{D} = \{ v : \exists\, \omega \in \tau - \{X\},\ v \subseteq \omega \};$$

il est évident que $\mathfrak{D}$ est un bornage propre sur l'espace topologique (X,τ), où $X = \mathbf{N} = \{1,2,..., n, ...\}$ et

(8) $$\tau = \{\varnothing, X, \{1\}, \{1,2\}, ..., \{1,2,..., n\}, ...\}.$$

Si τ^c est l'ensemble des ensembles fermées de (X,τ), d'après (8), on a

(9) $$\tau^c = \{X, \varnothing, \{2,3,...\}, \{3,4,...\}, ..., \{n+1, n+2, ...\}, ...\}.$$

Des (7), (8) résulte que

$$\forall\, k \in \tau^c - \{\varnothing\}, \quad k \notin \mathfrak{D},$$

c'est-à-dire $\mathfrak{D} \cap \tau^c = \{\varnothing\}$ et par suite le bornage $\mathfrak{D}$ ne peut pas avoir aucune base fermée.

Enfin il est clair que:

3.6 *Si $\mathfrak{D}$ est un bornage non propre sur un espacc topologique, alors il existe au moins une base ouvertc et au moins une base fermée de $\mathfrak{D}$.*

4. Fermature, ensemble derivé, frontière, interieur, exterieur.

Soit $\mathfrak{D}$ le bornage de l'exemble 1.2; dans ce cas il est connu que

(1) $$\forall\, v \in \mathfrak{D}, \quad \overline{v} \in \mathfrak{D},$$

ou $\overline{v}$ est la fermature de l'ensemble v.

Par contre, si $X = \mathbf{N} = \{1,2, ..., n, ...\}$, $\tau = \{\varnothing, X, \{1\}, \{1,2\}, ... \{1,2, ... n\}, ...\}$ et $\mathfrak{D} = \{v\colon \exists\, \omega \in \tau - \{X\},\ v \subseteq \omega\}$, on vérific aisement que

$$\forall\, v \in \mathfrak{D} - \{\varnothing\}, \quad \overline{v} \notin \mathfrak{D},$$

c'est-à-dire, dans ce cas, la proposition (1) n'est pas valable.

Nous démontrerons maintenant la proposition suivante:

4.1. *Si* $\mathfrak{D}$ *est un bornage sur un espace topologique* (X,τ), *les deux propositions*

(α) *il existe au moins une base fermée de* $\mathfrak{D}$, *et*

(β) $$\forall\, v \in \mathfrak{D}, \quad \bar{v} \in \mathfrak{D},$$

sont équivalentes.

Démonstration: (i) Supposons que la proposition (α) est valable, c'est-à-dire qu'il existe au moins une base $\mathbf{B}$ fermée de $\mathfrak{D}$.

D'après 3.1,

(1) $$\mathbf{B} \subseteq \mathfrak{D}$$

et

(2) $$\forall\, v \in \mathfrak{D}, \quad \exists\, \beta \in \mathbf{B}, \quad v \subseteq \beta.$$

Mais $v \subseteq \beta \Rightarrow \bar{v} \subseteq \bar{\beta}$ et puisque β est un ensemble fermé, on a $\bar{v} \subseteq \beta$; donc la proposition (2) s'écrit

(3) $$\forall\, v \in \mathfrak{D}, \quad \exists\, \beta \in \mathbf{B}, \quad \bar{v} \subseteq \beta.$$

Enfin, des (1), (3) et (II.1) résulte immédiatement que

(4) $$\forall\, v \in \mathfrak{D}, \quad \bar{v} \in \mathfrak{D}.$$

(ii) Inversement, supposons que la proposition (4) est valable et posons

(5) $$\mathbf{B}_0 = \{\, \bar{v} \colon\ v \in \mathfrak{D} \,\}.$$

D'abord, grâce aux (4), (5), on a

(6) $$\mathbf{B}_0 \subseteq \mathfrak{D}.$$

D'autre part si v est un ensemble arbitraire de $\mathfrak{D}$ et $\beta = \bar{v}$ il est clair que $\beta \in \mathbf{B}_0$ et $v \subseteq \beta$; donc

(7) $$\forall\, v \in \mathfrak{D}, \quad \exists\, \beta \in B, \quad v \subseteq \beta.$$

Enfin, des (5), (6), (7), 3.1 et 3.3 résulte immédiatement que l'ensemble $\mathbf{B}_0$ est une base fermée de $\mathfrak{D}$.

De la proposition 4.1 résulte la conséquence presque immédiate suivante:

4.2 *Si* $\mathfrak{D}$ *est un bornage sur un espace topologique* (X,τ), *les propositions*:

(α) *il existe au moins une base fermée de* $\mathfrak{D}$,

(β) $\qquad \forall\, v \in \mathfrak{D}, \quad v' \in \mathfrak{D},$

où v' *est l'ensemble derivé de* v, *et*

(γ) $\qquad \forall\, v \in \mathfrak{D}, \quad \partial v \in \mathfrak{D},$

où ∂v *est la frontière de* v, *sont équivalentes.*

D'ailleurs, il est clair que:

4.3. *Si* $\mathfrak{D}$ *est un bornage sur un espace topologique* (X,τ), *alors*:

$$\forall\, v \in \mathfrak{D}, \quad \underline{v} \in \mathfrak{D},$$

où $\underline{v}$ *est l'interieur de* v.

Considérons maintenant un bornage propre $\mathfrak{D}$ sur un espace topologique (X,τ). On peut vérifier facilement la proposition suivante:

4.4. *S'il existe au moins une base fermée de* $\mathfrak{D}$, *alors*:
$\forall\, v \in \mathfrak{D}$, *ext* $(v) \in \mathfrak{D}^c$, *où ext* (v) *l'exterieur de l'ensemble* v.

En effet, comme il existe une base fermée de $\mathfrak{D}$, d'après 4.1, $\forall\, v \in \mathfrak{D}$, $\overline{v} \in \mathfrak{D}$. Mais grâce à 2.5, ($\delta$), $\overline{v} \in \mathfrak{D} \Rightarrow C\,\overline{v} \in \mathfrak{D}^c$ et puisque $C\,\overline{v} = \text{ext}\,(v)$, on prouve que ext $(v) \in \mathfrak{D}^c$; donc

$$\forall\, v \in \mathfrak{D}, \quad \text{ext}\,(v) \in \mathfrak{D}^c.$$

Les propositions

(α) il existe au moins une base fermée de $\mathfrak{D}$, et

(β) $\qquad \forall\, v \in \mathfrak{D}, \quad \text{ext}\,(v) \in \mathfrak{D}^c,$

où $\mathfrak{D}$ est un bornage propre sur un espace topologique (X,τ), ne sont pas équivalentes.

D'après 4.4, la proposition « (α) $\Rightarrow$ (β) » est vraie; par contre, la proposition « (β) $\Rightarrow$ (α) » n'est pas vraie.

Soient, en effet, $X_1 = \mathbf{N} = \{1,2,\ldots, n,\ldots\}$, $X_2 = \mathbf{R}$, où $\mathbf{R}$ est l'ensemble des nombres réels, $\tau_1 = \{\varnothing, \{1\}, \{1,2\}, \ldots, \{1,2,\ldots,n\},\ldots,\mathbf{N}\}$ et τ_2 la topologie usuelle sur l'ensemble $\mathbf{R}$.

L'ensemble

(1) $\qquad \mathbf{B}_1 = \{\{1\}, \{1,2\}, \ldots, \{1,2,\ldots,n\}, \ldots\}$

est une base de τ_1 et l'ensemble

(2) $\qquad \mathbf{B}_2 = \{\, (k,\lambda) : k \in R \quad \text{et} \quad \lambda \in R \,\},$

où $(k,\lambda) = \{\, x\colon\ x \in \mathbf{R}$ et $k < x < \lambda \,\}$, est une base de τ_2, donc, si $X =$

$X_1 \times X_2$ et (X,τ) est le produit topologique des espaces (X_1,τ_1) et (X_2,τ_2), l'ensemble

(3) $\mathbf{B} = \mathbf{B}_1 \times \mathbf{B}_2 = \{ \{1,2,\ldots,n\} \times (k,\lambda) : n \in \mathbf{N},\ k \in \mathbf{R} \ \text{ et } \ \lambda \in \mathbf{R} \}$
est une base de τ.

Considérons maintenant les ensembles

(5) $\qquad \mathfrak{D}_1 = \{ v_1 \colon \ \exists\, \beta_1 \in \mathbf{B}_1, \quad v_1 \subseteq \beta_1 \}$,

(6) $\qquad \mathfrak{D}_2 = \{ v_2 \colon \ \exists\, \beta_2 \in \mathbf{B}_2, \quad v_2 \subseteq \beta_2 \}$

et l'ensemble

(7) $\qquad \mathfrak{D} = \{ v \colon \ \exists\, v_1 \in \mathfrak{D}_1, \quad \exists\, v_2 \in \mathfrak{D}_2, \quad v \subseteq v_1 \times v_2 \}$;

on peut vérifier facilement que $\mathfrak{D}$ est un bornage propre sur l'espace topologique (X,τ).

Nous démontrerons que:

(8) $\qquad \forall\, v \in \mathfrak{D}, \quad \operatorname{ext}(v) \in \mathfrak{D}^c$.

En effet, si $v \in \mathfrak{D}$, d'après (7),

(9) $\qquad \exists\, v_1 \in \mathfrak{D}_1, \quad \exists\, v_2 \in \mathfrak{D}_2, \quad v \subseteq v_1 \times v_2$.

D'autre part, grâce au (1), (2), (5) et (6),

(10) $\qquad (v_1 \in \mathfrak{D}_1) \Rightarrow (\exists\, m \in \mathbf{N},\ v_1 \subseteq \{1,2,\ldots,m\})$, et

(11) $\qquad (v_2 \in \mathfrak{D}_2) \Rightarrow (\exists\, \xi \in \mathbf{R},\ v_2 \subseteq [-\xi, \xi])$.

Des (9), (10) et (11) résulte que

$$\exists\, m \in \mathbf{N}, \quad \exists\, \xi \in \mathbf{R}, \quad v \subseteq \{1,2,\ldots,m\} \times [-\xi,\xi],$$

donc, si $u = \{1,2,\ldots,m\} \times \{y\colon y \in \mathbf{R}, \quad y < -\xi \quad \text{et} \quad y > \xi\}$, on a

$$u \subset \complement\, v.$$

Mais, il est clair que $u \in \mathfrak{D}^c$ et $u \in \tau$, c'est-à-dire $u \in \mathfrak{D}^c \cap \tau$ et par suite

(12) $\qquad \operatorname{ext}(v) \in \mathfrak{D}^c$.

La proposition (12) étant valable pour chaque $v \in \mathfrak{D}$, on a prouvé que la proposition (8) est vraie.

Nous démontrerons maintenant que le bornage $\mathfrak{D}$ ne peut avoir aucune base fermée.

En effet, si $\quad v = \{1,2,\ldots,m\} \times (k,\lambda) \in \mathfrak{D}$ on a

$$\overline{v} = \overline{\{1,2,\ldots,m\}} \times \overline{(k,\lambda)}.$$

Mais, il est évident que

$$\{\overline{1,2,\ldots,n}\} = \mathbf{N} \in \mathfrak{D}_1^c \quad \text{et} \quad \overline{(k,\lambda)} = [k,\lambda],$$

donc $\bar{v} \notin \mathfrak{D}$ et d'après 4.1 le bornage $\mathfrak{D}$ ne peut avoir aucune base fermée.

Il est donc bien exact que les proposition (α) et (β) ne sont pas équivalentes.

Enfin, on peut vérifier que:

4.5. *Si* $\mathfrak{D}$ *est un bornage propre sur un espace topologique* (X,τ), *les deux propositions*

(α) $\forall\, v \in \mathfrak{D}, \quad \mathrm{ext}\,(v) \in \mathfrak{D}^c$ et

(β) $\forall\, v \in \mathfrak{D}, \quad \exists\, u \in \mathfrak{D}^c \cap \tau, \quad u \subseteq C\,v$

sont équivalentes.

Supposons en effet que

(1) $\forall\, v \in \mathfrak{D}, \quad \mathrm{ext}\,(v) \in \mathfrak{D}^c.$

Si l'on pose $u = \mathrm{ext}\,(v)$ il est évident que $u \in \mathfrak{D}^c \cap \tau$ et $u \subseteq C\,v$; donc

(2) $\forall\, v \in \mathfrak{D}, \quad \exists\, u \in \mathfrak{D}^c \cap \tau, \quad u \subseteq C\,v.$

Inversement, supposons que la proposition (2) est vraie.

Comme $u \subseteq C\,v \Rightarrow \underline{u} \subseteq \underline{C\,v}$ et $u \in \tau$ on a $u \subseteq \underline{C\,v}$. D'autre part, puisque $u \in \mathfrak{D}^c$ et $u \subseteq \underline{C\,v}$ d'après 2.5, (α), $\underline{C\,v} \in \mathfrak{D}^c$, c'est-à-dire $\mathrm{ext}\,(v) \in \mathfrak{D}^c$ et comme v est un ensemble quelconque de $\mathfrak{D}$, la proposition (1) est valable.

5. Suites, filtres et bases des filtres.

Définition 5.1 Soient $\mathfrak{D}$ *un bornage sur un espace topologique* (X,τ) *et* $(x_n \,/\, n \in \mathbf{N})$ *une suite des points de* X.

On dit que la suite $(x_n \,/\, n \in \mathbf{N})$ est $\mathfrak{D}$ - **bornée** *si:*

$$\exists\, v \in \mathfrak{D}, \quad \forall\, n \in \mathbf{N}, \quad x_n \in v.$$

Il est clair que:

5.2. *Si la suite* $(x_n \,/\, n \in \mathbf{N})$ *est* $\mathfrak{D}$ *- bornée, alors toute suite partielle de* $(x_n \,/\, n \in \mathbf{N})$ *est aussi* $\mathfrak{D}$ *- bornée.*

Nous démontrerons que:

5.3. *Si la suite* $(x_n \mid n \in \mathbf{N})$ *est convergente, elle est nécessairement* $\mathfrak{D}$ *- bornée.*

En effet, comme la suite $(x_n \mid n \in \mathbf{N})$ est convergente,

$$\exists\, x_0 \in X, \qquad \lim_{n \to \infty} x_n = x_0$$

et par suite

(1) $$\forall\, \beta \in \mathbf{B}_0, \quad \exists\, n_0 \in \mathbf{N}, \quad \forall\, n \geqq n_0, \quad x_n \in \beta,$$

où $\mathbf{B}_0$ est une base quelconque des voisinages de x_0.

Mais, d'après 1.10, l'evsemble $\mathfrak{D} \cap \tau \cap V(x_0)$ est une base des voisinages de x_0, donc, grâce à (1),

(2) $$(v_0 \in \mathfrak{D} \cap \tau \cap V(x_0)) \Rightarrow (\exists\, m \in \mathbf{N}, \quad \forall n \geqq m+1, \quad x_n \in v_0).$$

Maintenant, si

(3) $$v = \{x_1\} \cup \{x_2\} \cup \ldots \cup \{x_m\} \cup v_0,$$

des (2) et (3) résulte que:

(4) $$\forall\, n \in \mathbf{N}, \quad x_n \in v.$$

D'autre part, d'après (3), 1.5, 1.6 et du fait que $v_0 \in \mathfrak{D}$, on trouve que

(5) $$v \in \mathfrak{D}.$$

Enfin, des (4) et (5) résulte immédiatement que

$$\exists\, v \in \mathfrak{D}, \quad \forall\, n \in \mathbf{N}, \quad x_n \in v$$

et par conséquence la suite $(x_n \mid n \in \mathbf{N})$ est $\mathfrak{D}$ - bornée.

Il est évident que la proposition inverse de 5.3 n'est pas valable.

5.4. *Soient* $\mathfrak{D}$ *un bornage sur un espace topologique* (X,τ) *et* $(x_n \mid n \in \mathbf{N})$ *une suite des points de* X. *Si:*

(i) *le bornage* $\mathfrak{D}$ *a au-moins une base fermée, et*

(ii) *la suite* $(x_n \mid n \in \mathbf{N})$ *est* $\mathfrak{D}$ *- bornée,*

alors l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite $(x_n \mid n \in N)$ est aussi $\mathfrak{D}$ *borné.*

Soit, en effet, E l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite $(x_n \mid n \in \mathbf{N})$. Si l'on désigne par E_n l'ensemble des points x_k d'indice $k \geqq n$ on sait que

(1) $$E = \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{E}_n.$$

Mais, comme la suite $(x_n \,/\, n \in \mathbf{N})$ est $\mathfrak{D}$ - bornée,

$$\exists\, v \in \mathfrak{D}, \quad \forall\, n \in \mathbf{N}, \quad x_n \in v$$

et par suite

$$\forall\, n \in \mathbf{N}, \quad E_n \subseteq v,$$

c'est-à-dire

$$(2) \qquad \forall\, n \in \mathbf{N}, \quad E_n \in \mathfrak{D}.$$

D'autre part, puisque $\mathfrak{D}$ a au moins une base fermée, d'après 4.1,

$$(3) \qquad (E_n \in \mathfrak{D}) \Rightarrow (\overline{E}_n \in \mathfrak{D}).$$

Enfin, des (1), (2), (3) et 1.4, résulte immédiatement que $E \in \mathfrak{D}$, c'est-à-dire l'ensemble E est $\mathfrak{D}$ - bornée.

Définition 5.5. *Soient* $\mathfrak{D}$ *un bornage sur un espace topologique* (X,τ), $\mathbf{F}$ *un filtre sur* X *et* $\mathbf{B}$ *une base de filtre sur* X.

(α) *On dit que le filtre* $\mathbf{F}$ *est* **presque** $\mathfrak{D}$ - **bornée**, *si* $\mathfrak{D} \cap \mathbf{F} \neq \varnothing$.

(β) *De même, on dit que la base de filtre* $\mathbf{B}$ *est presque* $\mathfrak{D}$ - *bornée si* $\mathfrak{D} \cap \mathbf{B} \neq \varnothing$.

Il est évident que:

5.6. *Si le filtre* $\mathbf{F}$ *est presque* $\mathfrak{D}$ - *borné, toute base* $\mathbf{B}$ *du filtre* $\mathbf{F}$ *est aussi presque* $\mathfrak{D}$ - *bornée.*

Inversement, si une base de filtre $\mathbf{B}$ *est presque* $\mathfrak{D}$ - *bornée, le filtre* $\mathbf{F}$ *de base* $\mathbf{B}$ *est aussi presque* $\mathfrak{D}$ - *borné.*

On peut démontrer facilement la proposition suivante:

5.7. *Soient* $\mathfrak{D}$ *un bornage sur un espaee topologique* (X,τ) *et* $\mathbf{F}$ *un filtre sur* X. *Si:*

*(*i*) le bornage* $\mathfrak{D}$ *a au moins une base fermée, et*

*(*ii*) le filtre* $\mathbf{F}$ *est presque* $\mathfrak{D}$ - *borné,*

alors l'adhérenee du filtre $\mathbf{F}$ *est un ensemble* $\mathfrak{D}$ - *borné.*

En effet, si A est l'adhérence du filtre $\mathbf{F}$ on sait que

$$(1) \qquad A = \cap \,\{\overline{F} \colon F \in \mathbf{F}\}.$$

Mais, comme $\mathbf{F}$ est presque $\mathfrak{D}$ - borné, on a $\mathfrak{D} \cap \mathbf{F} \neq \varnothing$, c'est-àdire.

$$(2) \qquad \exists\, F \in \mathbf{F}, \quad F \in \mathfrak{D}.$$

D'autre part, puisque $\mathfrak{D}$ a au moins une base fermée, d'après 4. 1,

$$(3) \qquad (F \in \mathfrak{D}) \Rightarrow (\overline{F} \in \mathfrak{D}).$$

Enfin, des (1), (2), (3) et 1.4 résulte immédiatement que $A \in \mathfrak{D}$, c'est-à-dire l'adhérence du filtre **F** est un ensemble $\mathfrak{D}$ - borné.

Si l'on désigne par adh **F** l'adhérence du filtre **F** et par lim **F** la limite du **F**, c'est-à-dire l'ensemble des points - limites du **F**, il est connu que

$$(1) \qquad \lim \mathbf{F} \subseteq \operatorname{adh} \mathbf{F}.$$

Des (1) et 5.7 on a comme conséquence presque immédiate la proposition suivante:

5.8. *Soient* $\mathfrak{D}$ *un bornage sur un espace topologique* (X,τ) *et* **F** *un filtre sur* X. *Si*:

*(*i*) le bornage* $\mathfrak{D}$ *a au moins une base fermée, et*

*(*ii*) le filtre* **F** *est presque* $\mathfrak{D}$ *- borné,*

alors la limite lim **F** *du filtre* **F** *est un ensemble* $\mathfrak{D}$ *- borné.*

Enfin, on a la proposition suivante:

5.9. *Soient* $\mathfrak{D}$ *un bornage sur un espaee topologique* (X,τ) *et* **F** *un filtre sur* X.

Si **F** *converge vers un point* $x \in X$, *alors le filtre* **F** *est presque* $\mathfrak{D}$ *- borné.*

En effet, comme le filtre **F** converge vers $x \in X$,

$$(1) \qquad \forall\, V \in \mathcal{V}(x), \ \exists\, F \in \mathbf{F}, \ F \subseteq V,$$

où $\mathcal{V}(x)$ est l'ensemble des voisinages de x.

Mais, d'après 1.10, l'ensemble $\mathfrak{D} \cap \tau \cap \mathcal{V}(x)$ est une base des voisinages de x, donc, grâce à (1),

$$\forall v \in \mathfrak{D} \cap \tau \cap \mathcal{V}(x), \ \exists\, F \in \mathbf{F}, \ F \subseteq v$$

et comme $v \in \mathfrak{D}$ on a $F \in \mathfrak{D}$, c'est-à-dire

$$\exists\, F \in \mathbf{F}, \ F \in \mathfrak{D}$$

et par suite le filtre **F** est presque $\mathfrak{D}$ - borné.

Il est clair que les propositions 5.7, 5.8 et 5.9 sont valablees pour les bases des filtres.

6. Fonctions.

Définition 6.1. Soient (X,τ), (Y,τ^*) *deux espaces topologiques,* $\mathfrak{D}^*$ *un bornage sur* (Y,τ^*), $f : X \to Y$ *une application de* X *dans* Y *et*

$E \subseteq X$. *On dit que l'application* f *est* $\mathfrak{D}^*$ - **borné sur** E *si* $f(E) \in \mathfrak{D}^*$.

Dans le cas particulier où $f(X) \in \mathfrak{D}^*$, on dit que l'application f est $\mathfrak{D}^*$ - **bornée**.

Il est évident que:

6.2. *Si l'application* f *est* $\mathfrak{D}^*$ - *bornée sur* $E \subseteq X$, *elle est aussi* $\mathfrak{D}^*$ - *bornée sur* H, *où* H *est un sous - ensemble arbitraire de* E.

En particulier on a la proposition suivante:

6.3. *Si l'application* f *est* $\mathfrak{D}^*$ - *bornée, elle est aussi* $\mathfrak{D}^*$ - *bornée sur chaque sous - ensemble de* X.

A l'aide de 2.10 on vérifie aisement la proposition suivante:

6.5. *Si l'application* f *est continue sur* E, *où* E *est un ensemble compact de* (X,τ), *alors* f *est* $\mathfrak{D}^*$ - *bornée sur* E.

En effet, comme f est continue sur E et E est un ensemble compact de $(X\tau)$, on sait que $f(E)$ est aussi un ensemble compact de (Y,τ^*); donc, d'après 2.10, $f(E) \in \mathfrak{D}^*$ et par suite l'application f est $\mathfrak{D}^*$ - bornée sur E.

Définition 6.6. Soient (X,τ), (Y,τ^*) *deux espaces topologiques*, $\mathfrak{D}^*$ *un bornage sur* (Y,τ^*), $f : X \rightarrow Y$ *une application de* X *dans* Y *et* x_0 *un point de* X.

On dit que l'applieation f **est localement** $\mathfrak{D}^*$ - **bornée au point** x_0, *quand*:

$$\exists\ V \in V(x_0),\ f(V) \in \mathfrak{D}^*.$$

Si f est localement $\mathfrak{D}^*$ - bornée à tout point de X, on dit que f est une application **localement** $\mathfrak{D}^*$ - **bornée**.

Nous démontrerons que:

6.7. *Si l'application* f *est continue au point* $x_0 \in X$, *alors* f *est localement* $\mathfrak{D}^*$ - *bornée au point* x_0.

En effet, comme f est continue an point $x_0 \in X$,

(1) $\qquad \forall\ w \in V^*(y_0),\ \exists\ V \in V(x_0),\ f(V) \subseteq w,$

où $y_0 = f(x_0)$, $V^*(y_0)$ l'ensemble des voisinages de y_0 sur l'espace (Y,τ^*) et $V(x_0)$ l'ensemble des voisinages de x_0 sur l'espace (X,τ).

Mais, puisque $\mathfrak{D}^*$ est un bornage sur (Y,τ^*), d'après 1.10, l'ensemble $\mathfrak{D}^* \cap \tau^* \cap V^*(y_0)$ est une base des voisinages du point y_0, donc

$$\exists\ w \in V^*(y_0),\ w \in \mathfrak{D}^*.$$

Des (1) et (2) résulte presque immédiatement qu'il existe au moins une voisinage V du point x_0, telle qu'on ait $f(V) \in \mathfrak{D}^*$ et par suit l'application f est localement $\mathfrak{D}^*$ - bornée aux point x_0.

Enfin, comme conséquence immédiate des 6.6 et 6.7, on a la proposition suivante:

6.8. *Si l'application* f *est continue, elle est néccssairement localement* $\mathfrak{D}^*$ *- bornée.*

BIBLIOGRAPHIE

1. Bourbaki, N., Topologie générale, 1947.
2. Gaal S., Point set topology, 1964.
3. Nagata, J., Modern general topology, 1968.