Sci. Annals, Fac. Phys. & Mathem., Univ. Thessaloniki, **15**, 119, (1975).

APPLICATIONS δ-CONTINUES DANS LES ESPACES METRIQUES

Par
V. FRANGOU
(Institut des Scienees Mathématiques, Université de Thessaloniki)
(Introduced by Prof. N. Oeconomidis)
(Received 17.6.75)

Résumè : *On definit la notion de δ-continuité qui est une continuité approximative d'une application dans les espaces métriques. Il s'agit d'une généralitation de la notion connue de la continuité.*

On démontre qu'on peut généraliser certaines propositions qui concernent les applications continues sur les applications δ-continues. Au contraire, il existe des propositions qui ne se généralisent pas.

1. δ-Continuité en un point

Soient (X, d_1), (Y, d_2) deux espaces métriques, $f : X \to Y$ une application de X dans Y, $x_o \in X$ et $\delta > 0$.

(1.1) *Définition:* On dit que f est δ -continue au point $x_o \in X$, si et seulement si:

$$\forall \varepsilon > \delta,\ \exists \eta > 0,\ \forall x \in B(x_o,\eta),\ d_2\big(f(x_o),\ f(x)\big) < \varepsilon ,$$

où

$$B(x_o,\eta) = \{x : x \in X,\ d_1(x,x_o) < \eta\} .$$

(1.2) *Définition:* On appelle $V_\delta(y_o)$ l'ensemble des voisinages d'un point $y_o \in Y$, pour lesquelles:

$$\exists \varepsilon > \delta ,\quad B(y_o,\varepsilon) \subseteq V$$

où

$$B(y_o,\varepsilon) = \{y : y \in Y,\ d_2(y_o,y) < \varepsilon\} ,$$

c'est à dire:

$$V_\delta(y_o) = \{V : V \in V(y_o) \quad \text{et} \quad \exists \varepsilon > \delta,\ B(y_o,\varepsilon) \subseteq V\} .$$

On a les propositions:

(1.3) *Proposition*: L'application $f : X \to Y$ est δ -continue au point $x_o \in X$, si et seulement si:

$$\forall W \in V_\delta(f(x_o)),\ \exists V \in V(x_o)\ ,\quad f(V) \subseteq W\ .$$

(1.4) *Proposition*: L'application $f : X \to Y$ est δ-continue au point $x_o \in X$, si et seulement si:

$$\forall W \in V_\delta\,(f(x_o))\ ,\quad f^{-1}(W) \in V(x_o)\ .$$

Les démonstrations des (1.3) et (1.4) sont pareilles de ces que l'on fait pour les applications continues.

On va démontrer que:

(1.5) *Proposition*: L'application $f : X \to Y$ est continue au point $x_o \in X$, si et seulement si:

$$\forall \delta > 0\ ,\quad f \text{ soit } \delta\text{–continue au point } x_o\ .$$

Démonstration: Evidemment, si f est continue au point $x_o \in X$, alors elle est δ–continue en x_o pour chaque $\delta>0$.

On suppose maintenant que:

$$\forall \delta > 0,\ f \text{ est } \delta\text{–continue au point } x_o \in X\ .$$

On considère deux suites (ε_n) et (δ_n) de nombres positifs, qui convergent vers le point 0 et telles que:

$$\forall n \in N,\quad \varepsilon_n > \delta_n > 0\ .$$

Par hypothèse, $\forall n \in N$, f est δ_n–continue en $x_o \in X$.

Si f n'est pas continue en x_o, alors:

$$\exists \varepsilon_1 > 0\ ,\ \forall \eta > 0\ ,\ \exists x \in\ B(x_o,\ \eta)\ ,\quad d_2(f(x_o),\ f(x)) \geqslant \varepsilon_1.$$

Donc, si l'on prend $\delta_{n_o} < \varepsilon_1$, on a :

$$\exists \varepsilon_1 > \delta_n\ ,\ \forall \eta > 0\ ,\ \exists x \in B(x_o,\eta)\ ,\ d_2(f(x_o),\ f(x)) \geqslant \varepsilon_1.$$

Par conséquent, f n'est pas δ_{n_o} –continue en x_o, contrairement a l'hypothèse.

Alors f est continue au point $x_o \in X$. □

Au contraire, on va démontrer que:

(1.6) *Proposition*: La proposition:

$$\exists \delta > 0\ ,\ f \text{ est } \delta\text{–continue au point } x_o \in X\ ,$$

n'entraîne pas que f est continue en x_o .

Démonstration: Soit $X = R$ et $\delta > 0$.

On considère la fonction:

$$f : R \to R^+,\ \text{où}$$

$$f(x) = \begin{cases} \delta \,, & \text{si } x \neq 0 \,. \\ 0 \,, & \text{si } x = 0 \,. \end{cases}$$

Il est évident que

$$\forall \varepsilon > \delta \,,\ \exists \eta > 0 \,,\ \forall x \in B(0, \eta),\ |f(x) - f(0)| = \delta < \varepsilon \,.$$

Alors f est δ-continue au point 0, mais elle n'est pas continue en 0. □

Soient (X, d_1), (Y, d_2), (Z, d_3) trois espaces métriques, f une application de X dans Y et g une application de Y dans Z.

(1.7) *Proposition*: Si l'application f est continue au point $x_o \in X$ et g est δ–continue en $y_o = f(x_o) \in Y$, alors l'application composée $\sigma = f \circ g : X \to Z$ est δ–continue en x_o.

Démonstration: La δ–continuité de g en $y_o = f(x_o)$ entraîne:

(1) $\quad \forall \varepsilon > \delta \,,\ \exists \eta > 0 \,,\ \forall y \in B(y_o, \eta),\ d_3(g(y),\ g(y_o)) < \varepsilon \,.$

Mais, comme f est continue en x_o,

(2) $\quad \exists \eta_1 > 0 \,,\ \forall x \in B(x_o, \eta_1) \,,\ d_2(f(x_o) \,,\ f(x)) < \eta \,.$

Des (1) et (2) on prouve que

$$\forall \varepsilon > \delta \,,\ \exists \eta_1 > 0 \,,\ \forall x \in B(x_o, \eta_1),\quad d_3(g(f(x_o)),\ g(f(x))) < \varepsilon \,,$$

et par suite l'application $\sigma = f \circ g : X \to Z$ est δ–continue au point x_o. □

2. Suites δ–convergentes et applications δ–continues en un point.

Soient (X, d_1), (Y, d_2) deux espaces métriques et $f : X \to Y$ une application de X dans Y.

Une suite $(x_n)_{n \in N}$ de points d'un espace métrique X est dite δ–convergente en $x_o \in X$, où $\delta > 0$, si : [6, p. 141]

$$\forall \varepsilon > \delta \,,\ \exists n_o \in N \,,\ \forall n \geq n_o,\quad x_n \in B(x_o, \varepsilon) \,;$$ dans ce cas on note:

$$\delta\text{–}\lim x_n = x_o \quad \text{ou} \quad \delta\text{–}\lim_{n \to \infty} x_n = x_o \,.$$

(2.1) *Proposition*: Pour que l'application f soit δ–continue au point $x_o \in X$, il faut et il suffit que pour toute suite $(x_n)_{n \in N}$ de points de X convergente vers le point $x_o \in X$, la suite $(f(x_n))_{n \in N}$ soit δ–convergente au point $f(x_o) \in Y$.

Démonstration: Si l'on suppose que f est δ–continue au point $x_o \in X$, alors;

$$\forall \varepsilon > \delta\,,\ \exists \eta > 0\,,\ \forall x \in B(x_o, \eta),\quad d_2(f(x_o), f(x)) < \varepsilon\,.$$

Soit $(x_n)_{n \in N}$, une suite de X convergente au point $x_o \in X$, alors:

$$\forall \eta > 0,\quad \exists n_o \in N,\quad \forall n \geqslant n_o,\quad x_n \in B(x_o, \eta).$$

Par conséquent $f(x_n) \in B(f(x_o),\varepsilon)$, c'est à dire la suite $(f(x_n))_{n \in N}$ est δ–convergente au point $f(x_o) \in Y$.

Au contraire, on suppose que pour toute suite $(x_n)_{n \in N}$ de X convergente au point $x_o \in X$, la suite $(f(x_n))_{n \in N}$ est δ–convergente au point $f(x_o) \in Y$. Si f n'est pas δ–continue en $x_o \in X$, alors:

$$\exists \varepsilon_o > \delta\,,\quad \forall \eta > 0,\quad \exists x \in\ B(x_o, \eta)\,,\quad d_2(f(x_o), f(x)) \geqq \varepsilon_o.$$

On considère la suite des voisinages de x_o $\{B(x_o, \eta_n)\}_{n \in N}$, où (η_n) est une suite decroissante de R^+ convergente au point 0.
Soit la suite $(x_n)_{n \in N}$, où $x_n \in B(x_o,\eta_n)$ et $d_2(f(x_o), f(x_n)) \geqq \varepsilon_o$. Evidemment $(x_n)_{n \in N}$ converge en x_o, mais la suite $(f(x_n))_{n \in N}$ n'est pas δ–convergente au point $f(x_o)$, contrairement a l'hypothèse. Alors f est δ–continue en $x_o \in X$. □

3. Applications δ–continues

Soient (X, d_1), (Y, d_2) deux espaces métriques et $f : X \to Y$ une application de X dans Y.
(3.1) *Définition*: L'application f est dite δ–continue sur X, si et seulement si elle est δ-continue en tout point de X .

D'après la définition (3.1) et la proposition (1.7) on a:
(3.2) *Proposition*: Soient (X, d_1), (Y,d_2), (Z, d_3) trois espaces métriques, $f : X \to Y$ une application de X dans Y, $g : Y \to Z$ une application de Y dans Z et $fog : X \to Z$ l'application composée de f et g.

Si f est continue sur X et g est δ–continue sur Y alors fog est δ–continue sur X.

On rappelle maintenant quelques définitions qu'on va les utiliser dans la suite.

Soit A un sous-ensemble d'un espace métrique (X, d).

On designe par A'_δ l'ensemble des points de δ–accumulation de A, c'est à dire: [6, p. 146]

$$A'_\delta = \{\, x : x \in X\,,\quad \forall V \in V_\delta\,(x),\quad (V - \{x\}\,)\ \bigcap A \neq \varnothing\,\}.$$

On designe par $\bar{A}_\delta$ la δ–fermeture de A, c'est à dire l'ensemble [6, p. 154]

$$\bar{A}_\delta = A \bigcup A'_\delta .$$

De plus on a:

$$\bar{A}_\delta = \{ x : x \in X, \quad \forall V \in V_\delta (x), \quad V \bigcap A \neq \emptyset \}.$$

On dit que A est δ–fermé [6, p. 166] si

$$\bar{A}_\delta = \bar{\pi} (A,\delta) ,$$

où $\bar{\pi}(A,\delta)$ est la δ–extension de l'ensemble A, c'est à dire l'ensemble [6, p. 151]

$$\bar{\pi} \ (A,\delta) = \bigcup_{x_o \in A} \{ x : x \in X \text{ et } d(x_o, \ x) \leqq \delta \}.$$

On dit que A est δ-ouvert [6, p. 180] si

$$A \text{ est ouvert et } \operatorname{int}(A)_\delta \neq \emptyset ,$$

où $\operatorname{int}(A)_\delta$ est le δ-intérieur de A, c'est à dire l'ensemble [6, p. 169] $\operatorname{int}(A)_\delta = \{ x : x \in A \text{ et } \exists V \in V_\delta \ (x), \ V \subseteq A \}$.

On va démontrer que:

(3.3) *Proposition*: Pour que l'application $f : X \to Y$ d'un espace métrique X dans l'espace métrique Y soit δ–continue sur X, il suffit que pour tout ensemble δ–ouvert A de Y, $f^{-1}(A)$ soit un ouvert de X.

Démonstration: Soit $x_o \in X$ et $W \in V_\delta(f(x_o))$.

Alors $\exists \varepsilon > \delta$, tel que :

$$B(f(x_o), \ \varepsilon) \ , \subseteq W$$

Soit $\omega = B(f(x_o), \varepsilon)$, donc

$$f^{-1}(\omega) \subseteq f^{-1}(W) .$$

Mais, ω est un δ-ouvert de Y [6, p. 181].
Alors $f^{-1}(\omega)$ est un ouvert de X.

Par conséquent $f^{-1}(W) \in V(x_o)$, donc f est δ-continue en x_o. Et, comme x_o est quelconque, on obtient que f est δ-continue sur X. □

L'inverse de la proposition (3.3) n'est pas valable.

En effet: Soit $X = R^+$, $Y = R^+$ et $f : X \to Y$ où

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si} \quad x > 0 . \\ \delta & \text{si} \quad x = 0 . \end{cases}$$

Evidemment f est δ–continue sur X .

On considère l'ensemble

$$A = \{ y : y \in Y \quad \text{et} \quad y > \rho \}, \quad \text{où} \quad 0 < \rho < \delta .$$

Alors A est δ-ouvert, mais l'ensemble

$$f^{-1}(A) = \{ x : x \in X \text{ et } x > \rho \} \bigcup \{ 0 \} \text{ n'est pas ouvert.}$$

On a aussi la proposition:

(3.4) *Proposition*: Soient X un espace métrique et Y un espace métrique compact. Alors, pour que l'application $f : X \to Y$ soit δ–continue sur X, il suffit que pour tout ensemble δ–fermé E de Y, $f^{-1}(E)$ soit un fermé de X.

Démonstration: Soit A un δ–ouvert de Y.

On a supposé Y compact, alors Y est sequentiellement compact. Donc la proposition connue de Bolzano - Weierstrass est valable. C'est à dire tout sous-ensemble infini de Y a au moins un point d'accumulation en Y. Alors CA est δ–fermé de Y [6, p. 182].

Donc, par hypothèse f^{-1} (CA) est un fermé de X. Par conséquent l'ensemble $Cf^{-1}(CA) = f^{-1}(A)$ est un ouvert de X et d'après la proposition (3.3) f est δ-continue sur X. □

L'inverse de la proposition (3.4) n'est pas vrai.

En effet: Soit $X = [0, \alpha] \subseteq R^+$, $Y = [0, \alpha] \subseteq R^+$ et $f : X \to Y$ où

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si} \quad x > 0 \\ \delta & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$$

Alors Y est compact et f est δ–continue sur X.

Soit $A = \{ y : y \in Y \text{ et } 0 < | y - y_o | \leqslant \rho \}$, où $y_o = \delta$ et $\rho < \delta$. Evidemment A est δ-fermé, mais l'ensemble $f^{-1}(A) = \{ x : x \in X$ et $0 < | x - x_o | \leqq \rho \}$, où $x_o = \delta$, n'est pas fermé.

On va démontrer que:

(3.5) *Proposition*: Soient X, Y deux espaces métriques. L'application $f : X \to Y$ est δ–continue sur X si, et seulement si la restriction de f à tout compact de X est δ-continue.

Démonstration: Evidemment si f est δ–continne sur X sa restriction à tout compact K de X est δ-continue sur K.

On suppose maintenant que la restriction de f à tout compact de X est δ–continue. Pour tout $x_o \in X$ et toute suite $(x_n)_{n \in N}$ de X, convergente vers x_o, l'ensemble $K = \{x_o, x_1, ..., x_n, ... \}$ est compact. Donc si $g = f/K$ est la restriction de f a K, g est δ–continue sur K, et d'après la proposi-

tion (2.1) la suite $(g(x_n))_{n\in N}$ est δ–convergente vers $g(x_o)$, c'est a dire $(f(x_n))_{n\in N}$ est δ–convergente vers $f(x_o)$. Alors f est δ–continue au point $x_o \in X$.
Par conséquent elle est δ–continue sur X. □
(3.6) *Proposition:* Soient X, Y deux espaces métriques. L'application $f: X \to Y$ est δ–continue sur X si et seulement si:

(a) $\forall A \subseteq X, \quad f(\bar{A}) \subseteq \overline{[f(A)]_\delta}$

(b) $\forall B \subseteq Y, \quad \overline{f^{-1}(B)} \subseteq f^{-1}(\overline{B}_\delta)$ et

(c) $\forall B \subseteq Y, \quad f^{-1}[\mathrm{int}(B)_\delta] \subseteq \mathrm{int}\,[f^{-1}(B)]$.

Démonstration: a) Supposons f δ–continue sur X.
Soit $y_o = f(x_o) \in f(\bar{A})$, donc $x_o \in \bar{A}$.
Si l'on prend $W \in V_\delta(f(x_o))$, alors $f^{-1}(W) \in V(x_o)$.
Par conséquent $f^{-1}(W) \cap A \neq \varnothing$, donc $W \cap f(A) \neq \varnothing$, c'est à dire $f(x_o) \in \overline{[f(A)]_\delta}$.

On suppose maintenant que (a) est vraie.

Soit $x_o \in X$ et $W \in V_\delta(f(x_o))$.

On met $A = X - f^{-1}(W)$ et $V = X - \bar{A}$.

On a : $x_o \notin \bar{A}$, parce que si $x_o \in \bar{A}$, alors $f(x_o) \in \overline{[f(A)]_\delta}$, donc $W \cap f(A) \neq \varnothing$. Par conséquent $f^{-1}(W) \cap A \neq \varnothing$, qui n'est pas vrai. Donc $x_o \in V$ et $V \in V(x_o)$. Evidemment $f(V) \subseteq W$, alors f est δ–continue en x_o, et, comme x_o est quelconque, f est δ–continue sur X.

b) On suppose que f est δ–continue sur X.

Soit $x_o \in \overline{f^{-1}(B)}$ et $W \in V_\delta(f(x_o))$, alors $f^{-1}(W) \in V(x_o)$. Mais $f^{-1}(W) \cap f^{-1}(B) \neq \varnothing$, donc $W \cap B \neq \varnothing$, c'est à dire $f(x_o) \in \overline{B}_\delta$. Par conséquent $x_o \in f^{-1}(\overline{B}_\delta)$.

Inversement, on suppose que (b) est valable.
Soit $x_o \in X$ et $W \in V_\delta(f(x_o))$.

On met $B = Y - W$ et $V = X - \overline{f^{-1}(B)}$.

Alors $x_o \notin \overline{f^{-1}(B)}$, parce que si $x_o \in \overline{f^{-1}(B)}$, $f(x_o) \in \overline{B}_\delta$, donc $W \cap B \neq \varnothing$ qui n'est pas vrai.
Par conséquent $x_o \in V$, donc $V \in V(x_o)$. De plus on a:
$f(V) \subseteq W$, alors f est δ–continue en x_o, donc f est δ–continue sur X.

c) Supposons f δ–continue sur X.

Soit $x_o \in f^{-1}[\text{int}(B)_\delta]$; alors il existe $W \in V_\delta(f(x_o))$ tel que $W \subseteq B$. Mais f est δ–continue, donc il existe $V \in V(x_o)$, tel que $f(V) \subseteq W$. Alors $V \subseteq f^{-1}(B)$, c'est à dire $x_o \in \text{int}[f^{-1}(B)]$.

Inversement on suppose que (c) est vraie.

Soit $x_o \in X$ et $W \in V_\delta(f(x_o))$. Alors $x_o \in f^{-1}[\text{int}(W)_\delta]$ et, d'après (c), $x_o \in \text{int}\,[f^{-1}(W)]$. Donc, il existe $V \in V(x_o)$ tel que $V \subseteq f^{-1}(W)$, c'est à dire $f(V) \subseteq W$. Par conséquent f est δ–continue en x_o, alors elle est δ–continue sur X. □

On a aussi la proposition.

(3.7) *Proposition*: Soient X, Y deux espaces métriques et $f : X \to Y$ une injection de X dans Y. Si l'application f est δ–continue sur X, on a:

$$\forall A \subseteq X\,, \quad f(A') \subseteq [f(A)]'_\delta\,.$$

Démonstration: Supposons que f est δ–continue sur X. Soit $y_o = f(x_o) \in f(A')$ et $W \in V_\delta\,(f(x_o))$.

Alors on a: $f^{-1}(W) \in V(x_o)$ et

$$(f^{-1}(W) - \{x_o\}) \cap A \neq \varnothing\,.$$

Donc $(W - \{f(x_o)\}) \cap f(A) \neq \varnothing$, parce que f est injective. Par conséquent $f(x_o) \in [f(A)]'_\delta$. □

(3.8) *Proposition*: Soient X, Y deux espaces métriques et f une application de X dans Y.

Si l'on a:

$$\forall A \subseteq X\,,\ f(A') \subseteq [f(A)]'_\delta,$$

alors f est δ–continue sur X.

Démonstration: Supposons que

$$\forall A \subseteq X\,,\ f(A') \subseteq [f(A)]'_\delta.$$

Soit $x_o \in X$ et $W \in V_\delta\,(f(x_o))$. On met

$$A = X - f^{-1}(W) \quad \text{et} \quad V = X - \bar{A}\,,$$

Alors $x_o \notin A'$ parce que si $x_o \in A'$,

$$f(x_o) \in [f(A)]'_\delta, \ \text{donc} \quad f^{-1}(W) \cap A \neq \varnothing\,,$$

et on arrive à une condradiction.

De plus $x_o \notin A$, par conséquent $x_o \notin \bar{A}$.

Alors $x_o \in V$ et $V \in V(x_o)$.
Evidemment on a $f(V) \subseteq W$, d'où l'on obtient que f est δ–continue en x_o, donc elle est δ–continue sur X . □

Soient X, Y deux espaces métriques, E un sous-espace de X, f une application de X dans Y et f_E la restriction de f à E.

On trouve facilement que:

(3.9) *Proposition*: Si f est δ–continue au point $x_o \in E$, alors f_E est δ–continue en x_o .

De la proposition (3.9) il en résulte:

(3.10) *Proposition*: Si l'application $f : X \to Y$ est δ–continue sur X, alors l'application $f_E : E \to Y$ est δ–continue sur E .

(3.11) *Définition*: Soit X un espace métrique et $A \subseteq X$. L'ensemble A est dit δ–dense sur X si $\bar{A}_\delta = X$.

(3.12) *Définition*: L'espace métrique X est dit δ–séparable, s'il existe un ensemble $A \subseteq X$, dénombrable et δ–dense sur X .

On va démontrer que:

(3.13) *Proposition*: Si X est un espace métrique séparable et f une application δ–continue de X *sur* l'espace métrique Y, alors Y est δ–séparable.

Démonstration: X étant séparable, il existe un ensemble dénombrable A, dense sur X. Evidemment l'ensemble $f(A) \subseteq Y$ est dénombrable. Soit $y_o = f(x_o) \in Y$. Alors $x_o \in X$ et, il existe une suite $(x_n)_{n \in N}$ de A, telle que $\lim x_n = x_o$. Donc $\delta\text{–}\lim f(x_n) = f(x_o)$. Alors

$$f(x_o) \in \overline{[f(A)]_\delta}\,, \quad [6,\ p.\ 158]\,.$$

Par conséquent f(A) est δ–dense sur Y, donc Y est δ–séparable. □

4. Continuité δ–uniforme

Soient (X, d_1), (Y, d_2) deux espaces métriques et $f : X \to Y$ une application de X dans Y .

(4.1) *Définition*: On dit que f est δ–uniformement continue sur X, si:

$$\forall \varepsilon > \delta\,, \quad \exists \eta > 0\,, \quad \text{tel que:}$$
$$d_1(x,y) < \eta \Rightarrow d_2(f(x),\ f(y)) < \varepsilon\,.$$

η ne dépend que du choix de ε .

Evidemment une application δ–uniformement continue sur X est δ–coutinue snr X .

On va démontrer que:

(4.2) *Proposition*: Si f est une application δ–continue d'un espace métrique compact X dans un espace métrique Y, alors f est 2δ–uniformement continue sur X .

Démonstration: Soit $x_i \in X$, alors, d'après la δ–continuité de f on a:

$$\forall \varepsilon > \delta\ ,\ \exists \eta x_i > 0\ ,\ \ \forall x \in B(x_i, \eta x_i),\ \ d_2(f(x_i),\ f(x)) < \varepsilon\ .$$

On met $A_i = B(x_i, \eta x_i)$. La famille $(A_i)_{i \in I}$ constitue un recouvrement ouvert de X et, comme X est compact, on a:

$$\forall x \in X\ ,\quad \exists \eta > 0\ ,\quad \exists_i \in I,\ \text{tel que}\ B(x, \eta) \subseteq A_i\ .$$

Donc, on trouve finalement que:

$\forall \varepsilon > 2\delta$, $\exists \eta > 0$ tel que la relation $d_1(x,y) < \eta$ entraîne $d_2(f(x), f(y)) < \varepsilon$ c'est à dire f est 2δ–uniformement continue sur X . □

Une suite $(x_n)_{n \in N}$ d'un espace métrique X est dite δ–fondamentale, si [6, p. 144]

$$\forall \varepsilon > \delta\ ,\quad \exists n_o \in N\ ,\quad \forall p \geqslant n_o\ ,\ \forall q \geqslant n_o\ ,\quad d(x_p,x_q) < \varepsilon\ .$$

On va démontrer que:

(4.3) *Proposition*: Soient $(X,\ d_1)$, $(Y,\ d_2)$ deux espaces métriques et $f : X \to Y$ une application δ–uniformement continue de X dans Y. Si $(x_n)_{n \in N}$ est une suite de Cauchy de X, alors $(f(x_n))_{n \in N}$ est une suite δ–fondamentale de Y.

Démonstration: Soit $(x_n)_{n \in N}$, où $x_n \in X$, une suite de Cauchy. Comme f est δ–uniformement continue on a:

$$\forall \varepsilon > \delta\ ,\quad \exists \eta > 0 :\quad d_1(x,y) < \eta \Rightarrow d_2(f(x),\ f(y)) < \varepsilon\ .$$

Mais:

$$\exists n_o \in N\ ,\quad \forall m,n \geqslant n_o,\quad d_1(x_m,\ x_n) < \eta\ ,\quad \text{donc}$$

$d_2(f(x_m),\ f(x_n)) < \varepsilon$, c'est à dire $(f(x_n))_{n \in N}$ est δ–fondamentale. □

(4.4) *Proposition*: Soient $(X,\ d_1)$, (Y, d_2) deux espaces métriques, $f : A \to Y$ une application δ–uniformement continue sur A, où $A \subseteq X$ et A dense sur X .

On va démontrer que:

a) Pour chaque $x_o \in X$, il existe une suite $(\alpha_n)_{n \in N}$ de A, convergente vers x_o, telle que la suite $(f(\alpha_n))_{n \in N}$ soit δ–fondamentale.

b) Si l'on suppose que dans l'espace Y, toute suite δ–fondamentale est δ–convergente et si $y_o \in Y$ est une δ–limite de $(f(\alpha))_{n \in N}$, alors:

Pour toute suite $(x_n)_{n \in N}$ de A convergente vers x_o, la suite $(f(x_n))_{n \in N}$ est 2δ–convergente vers y_o.

Démonstration: a) $x_o \in \bar{A}$, alors la démonstration de (a) résulte de la proposition (4.3).

b) Comme $\lim \alpha_n = x_o$, $\lim x_n = x_o$ et f δ–uniformement continue sur A, alors:

$\forall \varepsilon/2 > \delta$, $\exists \eta > 0$, $\exists n_o \in N$ tel que $\forall n \geqslant n_o$, la relation $d_1(\alpha_n\, x_n) < \eta$ entraîne $d_2(f(\alpha_n), f(x_n)) < \varepsilon/2$.

Mais $(f(\alpha_n))_{n \in N}$ est δ–convergente vers y_o, donc:

$$\forall \varepsilon/2 > \delta, \quad \exists n_o' \in N, \quad \forall n \geqslant n_o', \ d_2(f(\alpha_n), y_o) < \varepsilon/2 .$$

On a aussi:

$d_2(f(x_n), y_o) \leqslant d_2(f(\alpha_n), f(x_n)) + d_2(f(\alpha_n), y_o)$, alors $(f(x_n))_{n \in N}$ est 2δ–convergente vers y_o. $\square$

BIBLIOGRAPHIE

1. J. Baum, (1964): Elements of point set topology. Prentice - Hall.
2. N. Bourbaki, (1951): Topologie Générale. Hermann, Paris.
3. E. Hewitt and K. Stromberg, (1969): Real and abstract Analysis. Springer - Verlag.
4. G. Simmons, (1963): Introduction to topology and modern Analysis. Mc Graw-Hill.
5. L. Ward, (1972): Topology. Marcel Dekker, New York.
6. V. Frangou, (1969): Γενίκευσις θεμελιωδῶν ἐννοιῶν τῆς Τοπολογίας τοῦ μετρικοῦ χώρου. Aristotelian University of Thessaloniki, Scientific Annals of the Facul-ty of Physics and Mathematics, Volume 11, Thessaloniki.

ΠΕΡΙΛΗΨΙΣ

δ-ΣΥΝΕΧΕΙΣ ΑΠΕΙΚΟΝΙΣΕΙΣ ΕΙΣ ΜΕΤΡΙΚΟΥΣ ΧΩΡΟΥΣ

Ὑπὸ

Β. ΦΡΑΓΚΟΥ

(Ἐκ τοῦ Μαθηματικοῦ Σπουδαστηρίου τοῦ Πανεπιστημίου Θεσσαλονίκης)

Ὁρίζεται ἡ ἔννοια τῆς δ-συνεχείας ἡ ὁποία εἶναι μία κατὰ προσέγγισιν συνέχεια ἀπεικονίσεως εἰς μετρικοὺς χώρους καὶ ἀποτελεῖ γενίκευσιν τῆς γνωστῆς ἐννοίας τῆς συνεχείας.

Ἀποδεικνύεται ὅτι ὡρισμέναι προτάσεις αἱ ὁποῖαι ἀναφέρονται εἰς τὰς συνεχεῖς ἀπεικονίσεις γενικεύονται καὶ διὰ τὰς δ-συνεχεῖς ἀπεικονίσεις, ἐνῶ ἀντιθέτως ὑπάρχουν προτάσεις αἱ ὁποῖαι δὲν γενικεύονται.