ΧΡΗΣΙΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΠΡΟΤΥΠΩΝ ΕΙΣ ΤΗΝ ΛΥΣΙΝ ΥΔΡΟΛΟΓΙΚΩΝ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΩΝ

ΥΠΟ

ΖΑΦΕΙΡΙΟΥ Γ. ΠΑΠΑΖΑΦΕΙΡΙΟΥ *

1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ

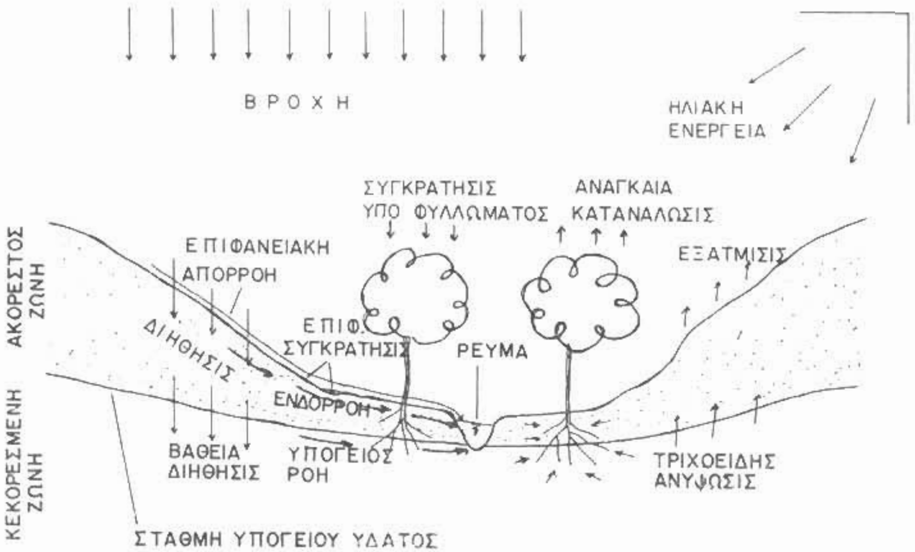
Κλασικῶς, ὡς ὑδρολογία μπορεῖ νὰ ὁρισθῆ ἐκεῖνο τὸ τμῆμα τῶν φυσικῶν ἐπιστημῶν τὸ ὁποῖον ἀσχολεῖται μὲ τὴν προέλευσιν καὶ κατανομὴν εἰς τόπον καὶ χρόνον τοῦ ἐπὶ τῆς γῆς ρεόντος νεροῦ. Ὑδρολογικὸς κύκλος εἶναι μία ἔννοια, ἡ ὁποία θεωρεῖ τὴν διαδικασία τῆς κινήσεως, ἀπωλείας καὶ ἐμπλουτισμοῦ τοῦ νεροῦ τῆς γῆς. Ὁ ὑδρολογικὸς κύκλος εἶναι μία συνέχεια, ἡ ὁποία δὲν ἔχει οὔτε ἀρχή, οὔτε τέλος. Τὸ νερὸ ἐξατμίζεται ἀπὸ τὸ ἔδαφος, τὶς θάλασσες ἢ ἄλλες ἐλεύθερες ἐπιφάνειες νεροῦ γιὰ νὰ ἀποτελέση μέρος τῆς ἀτμοσφαίρας. Οἱ ὑδρατμοὶ ἀνυψώνονται, μεταφέρονται καὶ προσωρινῶς ἀποθηκεύονται στὴν ἀτμόσφαιρα, μέχρις ὅτου τελικῶς ἐπανακάμψουν στὴ γῆ ὑπὸ μορφὴν ἀτμοσφαιρικῶν κατακρημνισμάτων. Τὸ ὕδωρ τῶν κατακρημνισμάτων συγκρατεῖται ἢ διαπνέεται ἀπὸ τὰ φυτά, ἀπορρέει ἐπιφανειακῶς πρὸς τὰ ὑδάτινα ρεύματα ἢ διηθεῖται ἐντὸς τοῦ ἐδάφους. Τὸ διηθούμενο νερὸ μπορεῖ προσωρινῶς νὰ ἀποθηκευθῆ στὸ ἔδαφος καὶ ἐν συνεχείᾳ εἴτε νὰ χρησιμοποιηθῆ ἀπὸ τὰ φυτά, εἴτε νὰ βρῆ τὸν δρόμο πρὸς κάποιο ρεῦμα, ἢ νὰ προχωρήση εἰς βαθύτερα στρώματα καὶ νὰ ἀποθηκευθῆ ὡς ὑπόγειο νερό, τὸ ὁποῖο ἐπίσης ἐν καιρῷ μπορεῖ νὰ χρησιμοποιηθῆ ἀπὸ τὰ φυτὰ ἢ νὰ κινηθῆ πρὸς πηγὰς ἢ ρεύματα. Τελικῶς πάλι ἐξατμίζεται πρὸς τὴν ἀτμόσφαιρα, γιὰ νὰ ἐπαναληφθῆ ἡ ὅλη διαδικασία ἀπὸ τὴν ἀρχή.

Ἡ βασικὴ ὑδρολογικὴ μονάδα εἶναι ἡ ὑδρολογικὴ λεκάνη. Ἡ ὑδρολογικὴ λεκάνη ὁρίζεται ὡς περιοχὴ ἐκείνη, ἀνεξαρτήτως μεγέθους ἢ σχήματος, ἡ ὁποία εὑρίσκεται ἀνάντη ἑνὸς σημείου ἐπὶ ὑδατίνου ρεύματος καὶ ἡ ὁποία συνεισφέρει νερὸ ἀπορροῆς στὸ σημεῖο αὐτό. Συνυφασμένη μὲ τὴν ὑδρολογικὴ λεκάνη εἶναι ἡ ἔννοια τοῦ κύκλου ἀπορροῆς. Ὁ κύκλος ἀπορροῆς ἀποτελεῖ τὸ μέρος ἐκεῖνο τοῦ γενικοῦ ὑδρολογικοῦ κύκλου. ποὺ θεωρεῖ τίς διαδικασίες, στίς ὁποῖες ὑπόκειται τὸ νερὸ τῶν ἀτμοσφαιρικῶν κατακρημνισμάτων, ἀπὸ τὴν στιγμὴν ποὺ θὰ φθάση τὴν ἐπιφάνειαν τῆς ὑδρολογικῆς λεκάνης μέχρι τὴν ἐμφάνισίν του ὡς ἀπορροῆς εἰς τὸ κατώτερο μέρος τῆς λεκάνης. Μιὰ φυσικὴ ἀπεικόνισις τῶν ἀνωτέρω δίδεται εἰς τὸ σχῆμα 1. Ἡ ἀνάλυσις τῶν διφόρων φάσεων ποὺ περιλαμβάνονται στὸ σχῆμα αὐτὸ παρουσιάζει ἰδιαίτερο ἐνδιαφέρον, διότι παρέχει τὴν εὐκαιρία νὰ ἐπισημανθῆ ὁ πολύπλοκος μηχανισμὸς εἰς τὸν ὁποῖον ὑπόκειται

* ΖΑΦ. Γ. ΠΑΠΑΖΑΦΕΙΡΙΟΥ, Ἀρ. Πανεπ. Θεσσαλονίκης.

τὸ νερὸ τῆς βροχῆς μέχρι τὴν μετατροπή του εἰς ἀπορροὴ καί, κατὰ συνέπειαν, τῶν δυσκολιῶν ποὺ παρουσιάζονται εἰς τὸν ὑδρολόγον κατὰ τὴν διερεύνησιν ποσοτικῶν σχέσεων βροχῆς-ἀπορροῆς.

Ἡ πρώτη ἐπαφὴ τοῦ νεροῦ τῆς βροχῆς γίνεται μὲ τὸ φύλλωμα τῶν φυτῶν. Ἐάν ἡ ποσότης τοῦ νεροῦ τῆς βροχῆς ὑπερβαίνη τὴν ὁλικὴν ἱκανότητα συγκρατήσεως ὑπὸ τοῦ φυλλώματος, ἡ διαφορὰ θὰ φθάση τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ ἐδάφους. Ἀπὸ τὸ συγκρατηθὲν ὑπὸ τοῦ φυλλώματος νερὸ μέρος θὰ ἐξατμισθῇ καὶ



Σχ. 1. Φυσικὴ Ἀπεικόνισις τοῦ Κύκλου Ἀπορροῆς.
(Σ. Σ. τριχοειδὴς ἀνύψωσις).

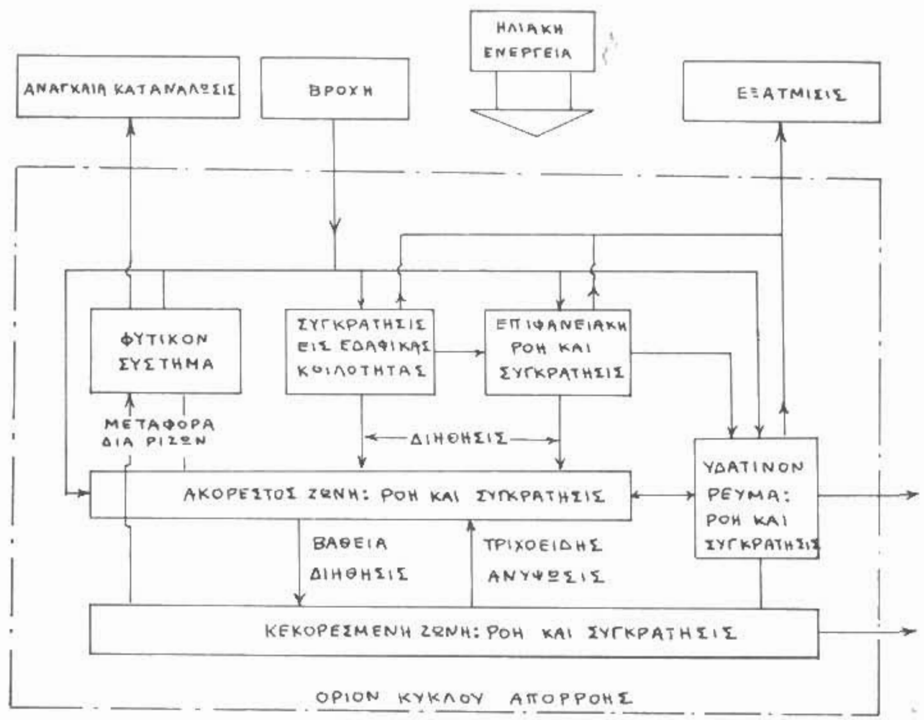
μέρος ἐνδέχεται νὰ φθάση τὸ ἔδαφος κινούμενον κατὰ μῆκος τῶν κλάδων καὶ τοῦ κορμοῦ ἢ συνεπείᾳ τοῦ ἀνέμου. Τὸ νερὸ ποὺ φθάνει τὸ ἔδαφος ὑπόκειται εἰς τὴν διαδικασία τῆς διηθήσεως. Ἐὰν ἡ ραγδαιότης τῆς βροχῆς εἶναι μικροτέρα τῆς διηθητικότητος τοῦ ἐδάφους δὲν θὰ ὑπάρξη ἐπιφανειακὴ ἀπορροή. Ἄλλως, ἡ διαφορὰ ραγδαιότητος-διηθητικότητος θὰ ἐμφανισθῇ ὡς ἐπιφανειακὴ ροή. Μέρος τῆς ροῆς αὐτῆς πληροῖ ἐδαφικὲς κοιλότητες καὶ προσωρινῶς ἀποθηκεύεται ἐπιφανειακῶς, ἐξατμίζεται, ἢ κινεῖται πρὸς τὸ πλησιέστερο ὑδάτινο ρεῦμα. Τὸ διηθούμενο νερὸ προσωρινῶς ἀποθηκεύεται στὸ ἔδαφος καὶ ἀνεβάζει τὸ ἐπίπεδο τῆς ὑγρασίας. Τὸ ἐδαφικὸ νερὸ χρησιμοποιεῖται ἀπὸ τὰ φυτὰ καί, ἐφ' ὅσον ὑπερβῇ ἕνα ὡρισμένο ἐπίπεδο, ὑπὸ τὴν ἐπίδρασιν ὑφισταμένων ὑδραυλικῶν κλίσεων εὑρίσκει τὸν δρόμο του πρὸς τὸ ρεῦμα ὡς ἐνδορροὴ ἢ διηθεῖται βαθέως ἐντὸς τῆς κεκορεσμένης ζώνης. Τέλος τὸ νερὸ τῆς κεκορεσμένης ζώνης χρησιμοποιεῖται ἀπὸ τὰ φυτά, κατευθύνεται πρὸς τὸ ρεῦμα ὡς ὑπεδ
ἢ χάνεται σὲ βαθύτερα στρώματα διὰ νὰ ἐμφανισθῇ κάπου ἐκτὸς τῶν ὁρίων τῆς

ὑπὸ συζήτησιν λεκάνης. Δηλαδὴ οἱ βασικὲς διαδικασίες μποροῦν νὰ συνοψισθοῦν στὶς φάσεις τῆς βροχῆς, ἐξατμίσεως, διαπνοῆς, ἐπιφανειακῆς διηθήσεως, βαθείας διηθήσεως, ἀποθηκεύσεως καὶ τελικῆς ἀπορροῆς. Οἱ φάσεις αὐτὲς κατὰ κανόνα ἀλληλοεξαρτῶνται, λαμβανομένου δὲ ὑπ' ὄψιν τοῦ γεγονότος ὅτι καὶ ὑπὸ τὶς πλέον ἁπλὲς συνθῆκες εἶναι δύσκολον νὰ διερευνηθοῦν ἀναλυτικὲς σχέσεις, ποὺ νὰ περιγράφουν ποσοτικῶς τὶς διάφορες φάσεις, εἶναι προφανεῖς οἱ τεράστιες δυσκολίες ποὺ πρέπει νὰ ἀντιμετωπισθοῦν, ἐὰν πρόκειται νὰ ἐπιχειρηθῇ ἡ διερεύνησις κάποιας ἀναλυτικῆς λύσεως τοῦ ὅλου κυκλώματος βροχῆς - ἀπορροῆς.

Στὸ παρελθὸν ὅλες οἱ σχέσεις βροχῆς-ἀπορροῆς στὴν ἐφηρμοσμένη ὑδρολογία ἦταν ἐμπειρικές. Ἡ εἰσαγωγὴ καὶ ραγδαία διάδοσις τῶν ἠλεκτρονικῶν ὑπολογιστῶν, ὅπως ἐπίσης καὶ ἡ ἀνάπτυξις καὶ ἐφαρμογὴ θεωριῶν ποὺ ἐμφανίστηκαν βασικὰ κατὰ τὰ τελευταῖα 20 ἔτη, ἔδωσαν τὰ μέσα καὶ στὸν ὑδρολόγο-μηχανικὸ διὰ τὴν διερεύνησιν μεθόδων πλέον συνεπῶν, ὅπου τὸ περιθώριον τῆς ἀβεβαιότητος μπορεῖ νὰ περιορισθῇ ἐντὸς τῶν ὁρίων τοῦ πρακτικῶς ἐπιτρεπτοῦ. Ὁ νέος αὐτὸς κλάδος τῆς ὑδρολογίας θὰ μποροῦσε νὰ ὀνομασθῇ ὡς ὑδρολογία τῶν συστημάτων καὶ εὑρίσκει ἐφαρμογὴ τόσο στὴν σπουδὴν τοῦ ὑπογείου, ὅσον καὶ τοῦ ἐπιφανειακοῦ νεροῦ μὲ τὴν χρῆσιν τῶν καταλλήλων γιὰ κάθε περίπτωσιν θεωριῶν. Τὸ ἀντικείμενον τῆς παρούσης ἐργασίας ἀναφέρεται εἰς τὰ ἐπιφανειακὰ ὑδρολογικὰ συστήματα. Διευκολύνεται δὲ ἡ κατανόησις τῆς λογικῆς διαδικασίας τῆς σχετικῆς μὲ τὰ ὑδρολογικὰ συστήματα μὲ τὴν παρουσίασιν τοῦ κύκλου ἀπορροῆς τῆς ὑδρολογικῆς λεκάνης ὑπὸ τὴν μορφὴν τοῦ σχ. 2.

Βασικῶς μποροῦν νὰ ἀκολουθηθοῦν δύο διαφορετικὲς διαδικασίες γιὰ τὸν ὑπολογισμὸ τῆς ἀπορροῆς, μία φυσικὴ καὶ μία καθαρὰ μαθηματική. Στὴν φυσικὴ διαδικασία, προσπάθεια καταβάλλεται γιὰ τὴν ὅσο τὸ δυνατὸν καλύτερη κατανόηση τοῦ τρόπου, μὲ τὸν ὁποῖον συμπεριφέρεται στὴν πραγματικότητα μία δεδομένη ὑδρολογικὴ λεκάνη κατὰ τὴν μετατροπὴ τῆς βροχῆς σὲ ἀπορροή, καὶ ἐν συνεχείᾳ ἀκολουθεῖ ἡ διευθέτησις τῆς ὅλης διαδικασίας κατὰ τέτοιο τρόπο, ὥστε αὐτὴ νὰ ἀκολουθῇ ὅσο πλησιέστερα γίνεται γνωστοὺς φυσικοὺς νόμους. Τὰ διάφορα τμήματα τῆς διαδικασίας αὐτῆς σὲ τελικὴ ἀνάλυση ἀντιπροσωπεύουν τὶς διάφορες φάσεις τοῦ κύκλου ἀπορροῆς. Ἕνα τέτοιο σύστημα εἶναι κατ' ἐξοχὴν πολύπλοκον, διότι ὅπως ἤδη συνάγεται αὐτὸ ἀπὸ τὶς προηγούμενες παραγράφους, εἶναι πολὺ δύσκολο νὰ ἐξευρεθοῦν τρόποι ὑπολογισμοῦ τῶν διαφόρων παραμέτρων τοῦ κύκλου ἀπορροῆς, ὅταν μάλιστα λάβουμε ὑπ' ὄψιν μας καὶ τὸν περιωρισμένον ἀριθμὸν καὶ εἶδος τῶν διαθεσίμων παρατηρήσεων, ποὺ κατὰ κανόνα εἶναι παρατηρήσεις βροχῆς καὶ ἀπορροῆς. Μιὰ τέτοια διαδικασία ἀναφέρεται ὡς σύνθεσις συστήματος καὶ ἀντιπροσωπευτικὲς τοῦ εἴδους αὐτοῦ ἐργασίες ἔχουν γίνει ἀπὸ τοὺς DAWDY - O' DONNELL (1965) καὶ CRAWFORD - LINSLEY (1966). Ἐν ἀντιθέσει πρὸς τὴν ἀνωτέρω διαδικασία, στὴν ἀνάλυσιν ὑδρολογικῶν συστημάτων οἱ φυσικοὶ νόμοι μποροῦν νὰ ἀγνοηθοῦν σὲ κάποιο βαθμὸ καὶ ἀντὶ αὐτοῦ διερευνᾶται ἕνα γενικὸ καὶ μαθηματικῶς ἁπλούστερο πρότυπο. Ἐν σχέσει μὲ τὸ σχῆμα 2, ἡ περιοχή, ποὺ περικλείεται ἀπὸ τὸ ὅριο τοῦ κύκλου ἀπορροῆς, θεωρεῖται ὅτι ἀποτελεῖ ἕνα ἑνιαῖο ὑδρολογικὸ σύστημα, τοῦ ὁποίου ἡ συμπεριφορὰ στὴν πρώτη φάση μᾶς εἶναι ἄγνωστη.

Ἐὰν θεωρήσουμε ὅτι τὸ σύστημα αὐτὸ εἶναι χρονικῶς ἀμετάβλητο, τότε μία δεδομένη βροχὴ θὰ πρέπη νὰ δίδη πάντοτε κατὰ προσέγγισιν τὴν αὐτὴν



Σχ. 2. Σχηματικὴ Παράστασις τοῦ Κύκλου Ἀπορροῆς.
(Σ. Σ. τριχοειδικὴ ἀνύψωσις).

ἀπορροήν. Ἡ ἀνάλυσις ὑδρολογικῶν συστημάτων βασίζεται ἀκριβῶς στὴν ἀρχὴν αὐτήν, χρησιμοποιεῖ δὲ ταὐτοχρόνως παρατηρήσεις βροχῆς καὶ ἀπορροῆς διὰ τὸν ὑπολογισμὸν τῶν χαρακτηριστικῶν συναρτήσεων τοῦ συστήματος. Οἱ συναρτήσεις αὐτὲς ἐν συνεχείᾳ χρησιμοποιοῦνται διὰ τὸν ὑπολογισμὸν τῆς ἀπορροῆς, ὅταν εἶναι διαθέσιμες μόνον παρατηρήσεις βροχῆς. Ἡ γενικὴ θεωρία γραμμικῶν καὶ μὴ γραμμικῶν συστημάτων ὅπως ἐπίσης καὶ ἡ τοποθέτησις ὑφισταμένων μεθόδων ἐντὸς τῶν πλαισίων τῆς θεωρίας αὐτῆς δίδονται ἀναλυτικῶς ἀπὸ τὸν ΠΑΠΑΖΑΦΕΙΡΙΟΥ (1972) καὶ δὲν πρόκειται νὰ ἐπαναληφθοῦν ἐδῶ. Ἀντὶ αὐτοῦ, ἀναφέρονται μόνον οἱ τελικὲς ἐξισώσεις καὶ ἡ ἔμφασις δίδεται στὴν παρουσίασιν ἑνὸς ὁλοκληρωμένου μαθηματικοῦ προτύπου μὲ παραδείγματα ἐφαρμογῆς.

2. Η ΓΕΝΙΚΗ ΜΟΡΦΗ ΤΟΥ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΥ ΠΡΟΤΥΠΟΥ

Ὅπως ἔχει δειχθῆ ἀλλαχοῦ (Ζ. ΠΑΠΑΖΑΦΕΙΡΙΟΥ 1972 α, β), ἕνα γενικὸ μὴ γραμμικό, ἀναλυτικό, χρονικῶς ἀμετάβλητο ὑδρολογικὸ σύστημα μὲ πεπερασμένη μνήμη, μπορεῖ νὰ ἀναπτυχθῆ σὲ σειρὰ τοῦ VOLTERA. Ἡ μορφὴ τοῦ ἀναπτύγματος αὐτοῦ, ὅταν εἴσοδος καὶ ἔξοδος τοῦ συστήματος εἶναι συνεχεῖς συναρτήσεις, μπορεῖ νὰ ἐκφρασθῆ ὑπὸ τὴν μορφὴν

$$y(t) = h_0 + \int_0^{t_m} h_1(\tau_1) \times (t - \tau_1)\, d\tau_1 +$$

$$+ \int_0^{t_m}\int_0^{t_m} h_2(\tau_1, \tau_2) \times (t - \tau_1) \times (t - \tau_2)\, d\tau_1 d\tau_2 + \ldots\ldots \qquad (1)$$

$$h_1(\tau_1),\ h_2(\tau_1, \tau_2),\ \ldots\ldots = 0 \ \text{διὰ κάθε}\ \tau_1, \tau_2 \ldots < 0 \qquad (2)$$

Στὴν ἀνωτέρω ἐξίσωσιν h_0, εἶναι τὸ ὑποσύστημα μηδενικῆς τάξεως, τὸ ἁπλὸ ὁλοκλήρωμα εἶναι τὸ γραμμικὸ ὑποσύστημα, τὸ διπλὸ ὁλοκλήρωμα ἀντιπροσωπεύει τὸ δευτέρας τάξεως μὴ γραμμικὸ ὑποσύστημα κ.ο.κ. $y(t)$ εἶναι ἡ ἔξοδος τοῦ συστήματος (ἀπορροή), $x(t\text{-}t_i)$ εἶναι ἡ εἴσοδος (βροχὴ) καὶ $h_i(\tau_i, \ldots, \tau_i)$ εἶναι ἡ χαρακτηριστικὴ συνάρτησις, $\tau_1, \tau_2, \ldots\ldots, \tau_i$ ἀντιπροσωπεύουν χρόνον στὸ παρελθὸν καὶ t_m εἶναι τὸ μῆκος τῆς μνήμης τοῦ συστήματος.

Τὸ σύστημα μηδενικῆς τάξεως κατὰ κανόνα εἶναι μηδὲν ἢ πολὺ μικρὸ καὶ συνήθως μπορεῖ νὰ παραλειφθῆ. Στὸ σημεῖο αὐτὸ πρέπει νὰ τονισθῆ ἡ ὁμοιότης τοῦ ἀναπτύγματος (1) πρὸς τὸ ἀνάπτυγμα μιᾶς συνεχοῦς συναρτήσεως σὲ σειρὰ τοῦ TAYLOR. Ὅπως στὴν περίπτωσιν τῆς σειρᾶς τοῦ TAYLOR ἐπιτυγχάνουμε μεγαλύτερη προσέγγισιν ὅταν χρησιμοποιοῦμε ὅσο τὸ δυνατὸν περισσοτέρους ὅρους, τὸ ἴδιον δύναται νὰ λεχθῆ καὶ διὰ τὸ ἀνάπτυγμα ἑνὸς συναρτησιακοῦ σὲ σειρὰ τοῦ VOLTERA τῆς μορφῆς τῆς ἐξισώσεως (1).

Ἐὰν εἴσοδος τοῦ συστήματος δίδεται, ὄχι ὡς συνεχεῖς συναρτήσεις, ἀλλὰ ὑπὸ μορφὴν παρατηρήσεων κατὰ καθωρισμένα χρονικὰ διαστήματα, ἡ ἐξίσωσις (1) παίρνει τὴν μορφὴν

$$y(t) = h_0 + \sum_{\tau_1=0}^{M} h_1(\tau_1) \times (t - \tau_1) + \sum_{\tau_1=0}^{M}\sum_{\tau_2=0}^{M} h_2(\tau_1, \tau_2) \times (t - \tau_1) \times (t - \tau_2) + \ldots \qquad (3)$$

ὅπου M εἶναι τὸ μῆκος τῆς μνήμης καὶ οἱ ὑπόλοιποι ὅροι παραμένουν οἱ αὐτοὶ ὅπως στὴν ἐξίσωσιν (1). Εἶναι ἐμφανὲς ὅτι ἡ λύσις τοῦ συστήματος αὐτοῦ γιὰ τὴν ἀπόκτησιν τῶν χαρακτηριστικῶν συναρτήσεων ἀπαιτεῖ τεράστιον ἀριθμὸν ὑπολογισμῶν. Ἐξοικονόμησις μπορεῖ νὰ ἐπιτευχθῆ κατὰ δύο τρόπους: Πρῶτον διὰ τῆς χρησιμοποιήσεως μόνον περιωρισμένου ἀριθμοῦ ὅρων στὴν ἐξίσωσιν (3) καὶ δεύτερον διὰ τοῦ ἀναπτύγματος τῶν χαρακτηριστικῶν συναρτήσεων τοῦ συστήματος εἰς σειρὰν ὀρθογωνικῶν πολυωνύμων. Μια οἰκογένεια πολυωνύμων ἀποτελεῖ ὀρθογωνικὸν σύστημα ἐν συναρτήσει πρὸς κάποια σταθμιστικὴ συνάρτησιν W (t), ἐὰν

$$\sum_{i=0}^{N} W(t_i)\, Q_m(t_i)\, Q_n(t_i) \begin{cases} = 0 & \text{ἐὰν} \quad m \neq n \\ \neq 0 & m = n \end{cases} \tag{4}$$

Στὴν παροῦσαν ἐργασία χρησιμοποιοῦνται τὰ πολυώνυμα τοῦ CHEBYSHEV τῆς πρώτης τάξεως. Τά πολυώνυμα ὁρίζονται ὡς

$$T_n(t) = \sigma\upsilon\nu(n\Theta), \quad \sigma\upsilon\nu\Theta = t, \quad -1 \leqslant t \leqslant 1 \tag{5}$$

καὶ μποροῦν νὰ ἀποκτηθοῦν μὲ τὴν σχέσιν

$$T_{n+1}(t) = 2tT_n(t) - T_{n-1}(t), \quad T_0(t) = 1, \quad T_1(t) = t \tag{6}$$

Χρησιμοποιῶντας τὴν σχέσιν (6) εὔκολα βρίσκουμε διαδοχικὰ μέλη τῆς ὁμάδος αὐτῆς, ὅπως

$$\left.\begin{aligned} T_0(t) &= 0 \\ T_1(t) &= t \\ T_2(t) &= 2t^2 - 1 \\ T_3(t) &= 4t^3 - 3t \\ T_4(t) &= 8t^4 - 8t^2 + 1 \quad \text{κ. ο. κ.} \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Τὸ ἀνάπτυγμα μιᾶς συναρτήσεως σὲ σειρὰ τοῦ CHEBYSHEV ἔχει τὴν μορφὴ

$$f(t) = P_N(t) = \sum_{k=0}^{N}{}'' C_k T_k(t) \tag{8}$$

ὅπου

$$C_k = \frac{2}{N} \sum_{p=0}^{N}{}'' f(t_p)\, T_k(t_p), \quad t_p = \sigma\upsilon\nu(p\pi/N) \tag{9}$$

Ὁ διπλὸς τόνος ὑποδηλοῖ ὅτι ὁ πρῶτος καὶ ὁ τελευταῖος ὅρος τοῦ ἀναπτύγματος πρέπει νὰ διαιρεθοῦν διὰ τοῦ 2.

Ἡ ἐπιλογὴ τῶν πολυώνύμων τοῦ CHEBYSHEV ἔγινε μὲ βάσιν τὶς ἰδιότητές τους. Τὰ πολυώνυμα αὐτὰ εἶναι ὀρθογωνικὰ στὸ διάστημα $\rho = 0, 1, \ldots, m$, M εἶναι τὸ μῆκος τῆς μνήμης τοῦ συστήματος, $t_p = \sigma\upsilon\nu\ (p\pi/m)$ καὶ ἡ σταθμιστικὴ συνάρτηση ἴση μὲ τὴν μονάδα, δηλαδὴ

$$\sum_{p=0}^{M}{}'' T_m(t_p)\, T_n(t_p) = \begin{cases} 0 & (m \neq n) \\ \dfrac{m}{2} & (M = n \neq 0 \ \text{ἢ} \ N) \\ M & (m = n = 0 \ \text{ἢ} \ N) \end{cases} \tag{10}$$

Ἐπὶ πλέον τὸ σφάλμα τοῦ ὑπολογισμοῦ

$$\Sigma_N(t) = |f(t) - P_N(t)| \tag{11}$$

ἱκανοποιεῖ τὸ κριτήριον κατὰ τὴν ἔννοιαν τῶν ἐλαχίστων τετραγώνων

$$S = \sum_{p=0}^{M}{}'' \Sigma_N^2(t_p) = \text{ἐλάχιστον} \tag{12}$$

καὶ ὅπου

$$S_{\text{ἐλάχ.}} = \sum_{p=0}^{M} \left[f^2(t_p) - \sum_{k=0}^{N} C_k^2\, T_k^2(t_p) \right] \tag{13}$$

Τέλος, ἡ δυνατότης ἐκφράσεως τῶν πολυωνύμων τοῦ CHEBYSHEV ὑπὸ μορφὴν συνημιτόνων ἀπλοποιεῖ πολὺ τὸν προγραμματισμὸν καὶ ἐξοικονομεῖ χρόνον ὑπολογισμοῦ. Γιὰ περισσότερες λεπτομέρειες καὶ χρήσεις τῶν πολυωνύμων αὐτῶν ὁ ἀναγνώστης παραπέμπεται στὶς ἐργασίες τοῦ LANCZOS (1952), FOX and PARKER (1968) καὶ SNYDER (1966). Στὴν συνέχεια ἀναπτύσσονται ἕνα γραμμικὸ καὶ ἕνα μὴ γραμμικὸ πρότυπο δευτέρας τάξεως.

3. ΓΡΑΜΜΙΚΟΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΝ ΠΡΟΤΥΠΟΝ ΥΔΡΟΛΟΓΙΚΟΥ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ

Ἐάν στὴ σχέση (3) ἀγνοηθοῦν ὅλοι οἱ ὅροι ἀπὸ τὴν διπλῆ σειρὰ καὶ περαιτέρω, τὸ ἀπομένον πρὸς λύσιν σύστημα εἶναι γραμμικὸν τῆς μορφῆς

$$y(t) = h_0 + \sum_{\tau_1=0}^{M} h(\tau_1) \times (t - \tau_1), \tag{14}$$

ὅπου M εἶναι τὸ μῆκος τῆς μνήμης τοῦ συστήματος. Ἀνάπτυξις τῆς χαρακτηριστικῆς συναρτήσεως τοῦ συστήματος σὲ σειρὰ τοῦ CHEBYSHEV δίδει

$$h(\tau_1) \simeq P_N(S\tau_1) = \sum_{n=0}^{N}{}'' \alpha_n T_n(S\tau_1) \tag{15}$$

ὅπου

$$S\tau_1 = \sigma\upsilon\nu(\tau_1\pi/m), \quad \tau_1 = 0, 1, \ldots\ldots, M \tag{16}$$

Ἀντικατάστασις τῆς ἐξισώσεως (15) στὴν (14) δίδει

$$y(t) = \sum_{\tau_1=0}^{N} \sum_{n=0}^{N}{}'' \alpha_n T_n(S\tau_1) \times (t - \tau_1) \tag{17}$$

Ἀναδιάταξις τῶν σειρῶν στὴν ἐξίσωσιν (17) δίδει

$$y(t) = \sum_{n=0}^{N}{}'' \alpha_n \sum_{\tau_1=0}^{M} T_n(S\tau_1) \times (t - \tau_1) \tag{18}$$

Γιὰ εὐκολία, κάνουμε τὴν ἀντικατάστασιν

$$C_n(t) = \sum_{\tau_1=0}^{M} T_n(S\tau_1) \times (t - \tau_1) \tag{19}$$

'Εὰν δοθῇ μία ἀκολουθία βροχομετρικῶν παρατηρήσεων, οἱ ποσότητες $C_n(t)$ μποροῦν νὰ ὑπολογισθοῦν ἀμέσως, ἀφοῦ ὅλες οἱ παράμετροι στὸ δεξιὸ μέρος τῆς (19) εἶναι γνωστές. 'Εάν, ἐπὶ πλέον, δοθοῦν ταυτόχρονες παρατηρήσεις ἀπορροῆς, στὴν ἐξίσωσιν (18) οἱ μόνοι ἄγνωστοι εἶναι οἱ συντελεσταὶ α_n, οἱ ὁποῖοι ὑπολογίζονται, ἐὰν λυθῇ τὸ σύστημα:

$$
\begin{aligned}
y(t_0) &= \frac{1}{2}\alpha_0 C_0(t_0) + \alpha_1 C_1(t_0) + \ldots\ldots + \frac{1}{2}\alpha_N C_N(t_0) \\
y(t_1) &= \frac{1}{2}\alpha_0 C_0(t_1) + \alpha_1 C_1(t_1) + \ldots\ldots + \frac{1}{2}\alpha_N C_N(t_1) \\
&\vdots \\
y(t_L) &= \frac{1}{2}\alpha_0 C_0(t_L) + \alpha_1 C_1(t_L) + \ldots\ldots + \frac{1}{2}\alpha_N C_N(t_L)
\end{aligned}
\tag{20}
$$

ὅπου L εἶναι ὁ χρόνος παρατηρήσεων. 'Υπὸ τὴν μορφὴν μητρώου ἡ ἐξίσωσις (20) μπορεῖ νὰ παρασταθῇ ὡς

$$
\begin{gathered}
[\mathbf{C}_{k,n}]\,[\boldsymbol{\alpha}_n] = [\mathbf{y}_k] \\
k = 0, 1, \ldots, L, \quad n = 0, 1, \ldots, N
\end{gathered}
\tag{21}
$$

'Εὰν N= L, τὸ σύστημα ἔχει τὸ ἴδιο ἀριθμὸ ἀγνώστων καὶ ἐξισώσεων καὶ συνεπῶς ὑπάρχει ἀκριβὴς λύσις, ἀλλὰ δεδομένου ὅτι $N \ll L$ τὸ σύστημα εἶναι ἀκαθόριστον καὶ μπορεῖ κανεὶς ἐλεύθερα νὰ ἐφαρμόσῃ ὅποια ἀπὸ τὶς διαθέσιμες μεθόδους νομίζει κατάλληλη, γιὰ νὰ βρῇ μιὰ ἀποδεκτὴ λύσιν. Μιὰ τέτοια μέθοδος εἶναι ἡ πολλαπλῆ συσχέτισις, ἡ ὁποία ἔχει τὸ πλεονέκτημα, ὅτι ὑπάρχουν κατὰ κανόνα ἕτοιμα προγράμματα σὲ κάθε κέντρο ἠλεκτρονικῶν ὑπολογιστῶν καὶ ἀκόμη διὰ τοῦ ὑπολογισμοῦ τοῦ κριτηρίου F καὶ τοῦ συντελεστοῦ πολλαπλῆς συσχετίσεως μπορεῖ κανεὶς νὰ κρίνῃ, πόσο καλὴ εἶναι ἡ λύσις ποὺ πῆρε.

Γιὰ τὴν διερεύνησιν τῆς χαρακτηριστικῆς συναρτήσεως ἑνὸς γραμμικοῦ συστήματος πρέπει νὰ ἐπιλεγοῦν ὁ κατάλληλος ἀριθμὸς πολυωνύμων N καὶ τὸ μῆκος τῆς μνήμης τοῦ συστήματος M. 'Η ἐπιλογὴ πρέπει νὰ γίνῃ κατὰ τέτοιο τρόπο, ὥστε τὸ σύστημα νὰ δίδῃ α) τὴν καλύτερη δυνατὴ προσέγγισιν στὴν πραγματικὴν ἀπορροή, β) ἡ χαρακτηριστικὴ συνάρτησις νὰ εἶναι φυσικῶς πραγματοποιήσιμη (νὰ μὴν ἔχῃ ἀρνητικὲς τιμὲς) καὶ γ) νὰ περιορίζῃ τὸν ἀριθμὸ τῶν ὑπολογισμῶν στὸ ἐλάχιστον δυνατόν. Χρυσοῦς κανὼν γιὰ μία τέτοια ἐπιλογὴ δὲν ὑπάρχει. 'Ο μόνος τρόπος εἶναι, νὰ γίνουν μερικὲς δοκιμὲς μὲ διαφορετικοὺς ἀριθμοὺς πολυωνύμων καὶ μήκη μνήμης καὶ νὰ ἐπιλεγῇ ὁ συνδυασμὸς ποὺ δίδει τὴν καλύτερη προσέγγισιν. 'Ως ἀποτέλεσμα ἐμπειρίας, ὁ ἀριθμὸς τῶν πολυωνύμων συνήθως κυμαίνεται μεταξὺ 6 καὶ 12, τὸ δὲ μῆκος τῆς μνήμης δὲν δύναται νὰ ὑπερβαίνῃ τὸ $^1/_3$ τοῦ μήκους τῶν παρατηρήσεων καὶ δὲν μπορεῖ νὰ εἶναι μικρότερον τοῦ διαστήματος μεταξὺ τῆς τελευταίας βροχομετρικῆς παρατηρή-

σεως καὶ τοῦ τελευταίου στοιχείου ἀπορροῆς. Στὴν συνέχεια δίδονται δύο ἐφαρμογὲς τῆς μεθόδου. 'Η πρώτη ἀφορᾶ ἕνα συνθετικὸ σύστημα καὶ ἡ δεύτερη μιὰ φυσικὴ ὑδρολογικὴ λεκάνη.

α) **'Εφαρμογὴ I. Συνθετικὸν Σύστημα.**

Τὸ συνθετικὸν σύστημα αὐτῆς τῆς περιπτώσεως κατ' ἀρχὴν λαμβάνεται ὡς καθαρῶς γραμμικὸν καὶ καθορίζεται ἀπὸ τὴν ἐξίσωσιν.

$$y(t) = \int_0^t h(\tau) \times (t - \tau)\, d\tau \tag{22}$$

ὅπου ἡ χαρακτηριστικὴ συνάρτησις ἀπὸ τὴν σχέσιν

$$h(\tau) = 40t \exp(-t/5) \tag{23}$$

καὶ ἡ εἴσοδος τοῦ συστήματος ὡς

$$x(t) = A[.04t \exp(-t/5)] + B[.016(t-11)^2 \exp((11-t)/5)] \tag{24}$$

ὅπου

$$A = \begin{cases} 1 & \text{διὰ} \quad 0 < t < 82 \\ 0 & \text{διὰ} \quad 0 > t > 82 \end{cases}$$

$$B = \begin{cases} 1 & \text{διὰ} \quad 11 < t < 82 \\ 0 & \text{διὰ} \quad 11 > t > 82 \end{cases}$$

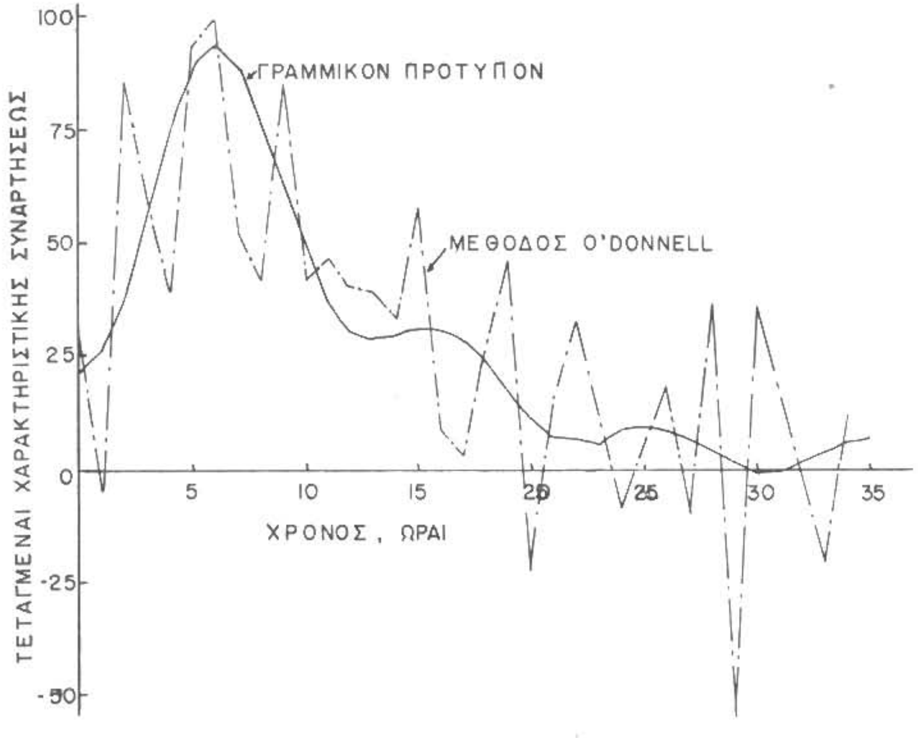
'Αντικατάστασις τῶν ἐξισώσεων (23) καὶ (24) στὴν (22) καὶ κατ' εὐθεῖαν ὁλοκλήρωσις δίδει τὸν ὑπολογισμὸν τῆς ἐξόδου ὡς

$$y(t) = .26667t^3 \exp(-t/5) + .53333(t-11)^4 \exp[(11-t)/5] \tag{25}$$

Στὴν συνέχεια χρησιμοποιοῦνται οἱ ἐξισώσεις (24) καὶ (25) διὰ τὸν ὑπολογισμὸν 82 τιμῶν εἰσόδου καὶ 100 τιμῶν ἐξόδου μὲ ἀκρίβεια 5 δεκαδικῶν ψηφίων. Οἱ τιμὲς αὐτὲς ἀκολούθως χρησιμοποιοῦνται ὡς εἴσοδος καὶ ἔξοδος στὸ σύστημα

$$y(t) = \sum_{\tau=0}^{M} h(\tau) \times (t - \tau) \tag{26}$$

γιὰ τὸν ὑπολογισμὸν τῆς συναρτήσεως $h(\tau)$. Χρησιμοποιώντας μῆκος μνήμης M=40 καὶ ἀριθμὸν πολυωνύμων N=15, ἡ χαρακτηριστικὴ συνάρτησις εὑρέθη ἀκριβῶς ὅπως δίδεται ἀπὸ τὴν ἐξίσωσιν (23). Στὴν συνέχεια οἱ τιμὲς εἰσόδου καὶ ἐξόδου τροποιοῦνται ἐλαφρῶς. Οἱ μὲν τιμὲς εἰσόδου στρογγυλοποιοῦνται σὲ δύο δεκαδικὰ ψηφία καὶ οἱ τιμὲς ἐξόδου σὲ ἀκεραίους ἀριθμούς. Μὲ αὐτὴ τὴν τροποποίησιν τὸ σύστημα πλέον δὲν εἶναι τὸ ἴδιο καὶ δὲν μπορεῖ νὰ θεωρηθῇ ὡς καθαρὰ γραμμικό, ἀλλὰ σχεδὸν γραμμικό. Αὐτὴ ἡ τροποποίησις εἶναι σημαντικὴ ἀπὸ τὴν ἄποψιν τῆς δοκιμῆς τῆς εὐαισθησίας τοῦ μαθηματικοῦ προτύπου. Στὸ σημεῖον αὐτὸ πρέπει νὰ τονισθῇ ὅτι, τὸ ὅτι ἡ εἴσοδος καὶ ἔξοδος εἰς χρόνον $t=0$ ἔχουν τιμὴ μηδέν, ὑποδηλώνει ὅτι τὸ γραμμικὸ σύστημα εὑρίσκεται εἰς ἠρεμία κατὰ τὴν ἔναρξιν τοῦ φαινομένου καὶ κατὰ συνέπεια ἡ χαρακτηριστική του συνάρτησις εἶναι τὸ μοναδιαῖον ὑδρογράφημα (ΠΑΠΑΖΑΦΕΙΡΙΟΥ 1972). Δηλαδή, ἡ ὁριακὴ περίπτωσις τοῦ ὑπὸ ἀνάπτυξιν μαθηματικοῦ



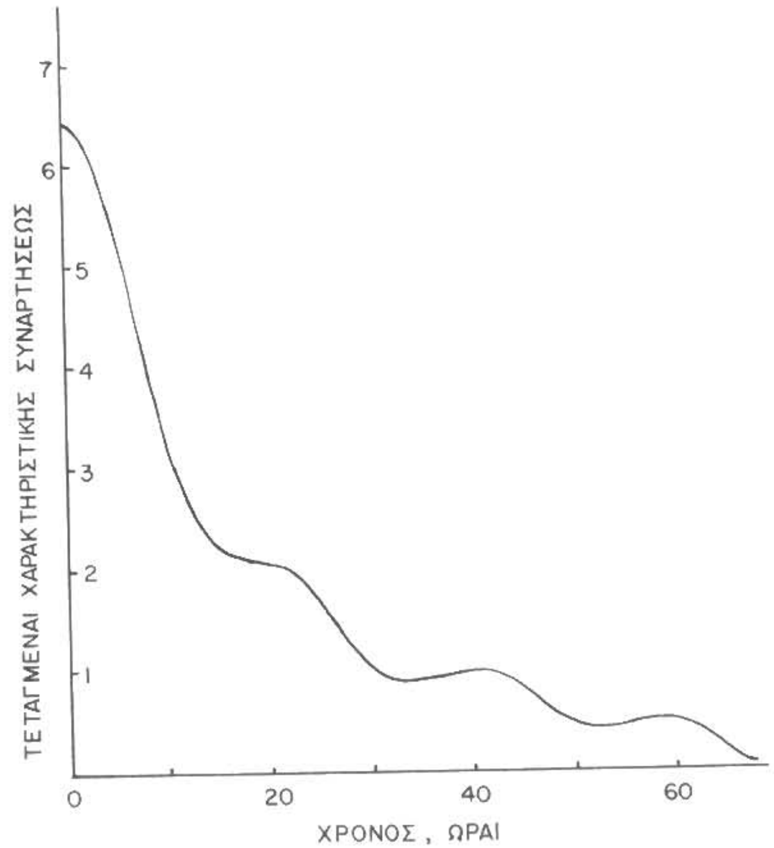
Σχ. 3. Συνθετικὸν Σύστημα: Μοναδιαῖα Ὑδρογραφήματα μὲ τὴν Μέθοδο O' Donnell καὶ τοῦ Γραμμικοῦ Προτύπου.

προτύπου ὅταν τὸ σύστημα εἶναι σὲ ἠρεμία σὲ χρόνο $t=0$, εἶναι τὸ μοναδιαῖο ὑδρογράφημα. Εἶναι κατὰ συνέπεια κατάλληλον νὰ ἐπιχειρηθῇ μία σύγκρισις τοῦ μαθηματικοῦ προτύπου μὲ μία τῶν μεθόδων διερευνήσεως μοναδιαίων ὑδρογραφημάτων. Γιὰ τὴν σύγκρισιν αὐτὴν ἐπελέγη ἡ μέθοδος τοῦ O' DONNELL (1960), διότι ἀντικειμενικὰ κρινομένη δίδει καλὰ ἀποτελέσματα καὶ ἐπὶ πλέον, ἀφοῦ χρησιμοποιεῖ σειρὲς τοῦ FOURIER γιὰ τὸ ἀνάπτυγμα εἰσόδου, ἐξόδου καὶ χαρακτηριστικῆς συναρτήσεως, ἐμπίπτει στὴν ἴδια κατηγορία, ὅπως καὶ τὸ ὑπὸ ἀνάπτυξιν μαθηματικὸν πρότυπον. Διὰ τὸν προσδιορισμὸν τῆς χαρακτηριστικῆς συναρτήσεως, τὸ μῆκος τῆς μνήμης ἐλήφθη $M=35$ καὶ ὁ ἀ[illegible] πολυωνύμων $N=7$. Τὰ δύο ὑδρογραφήματα δίδονται στὸ σχῆμα 3. Ἀπὸ τὴν

σύγκρισιν τῶν δύο φαίνεται καθαρὰ ὅτι ἡ μέθοδος τοῦ O' DONNELL δὲν δίδει ὑδρογράφημα φυσικῶς πραγματοποιήσιμον καὶ αὐτὸ εἶναι ἕνα ἀπὸ τὰ μειονεκτήματα, ποὺ τὸ παρὸν πρότυπον μπορεῖ νὰ ὑπερπηδήσῃ.

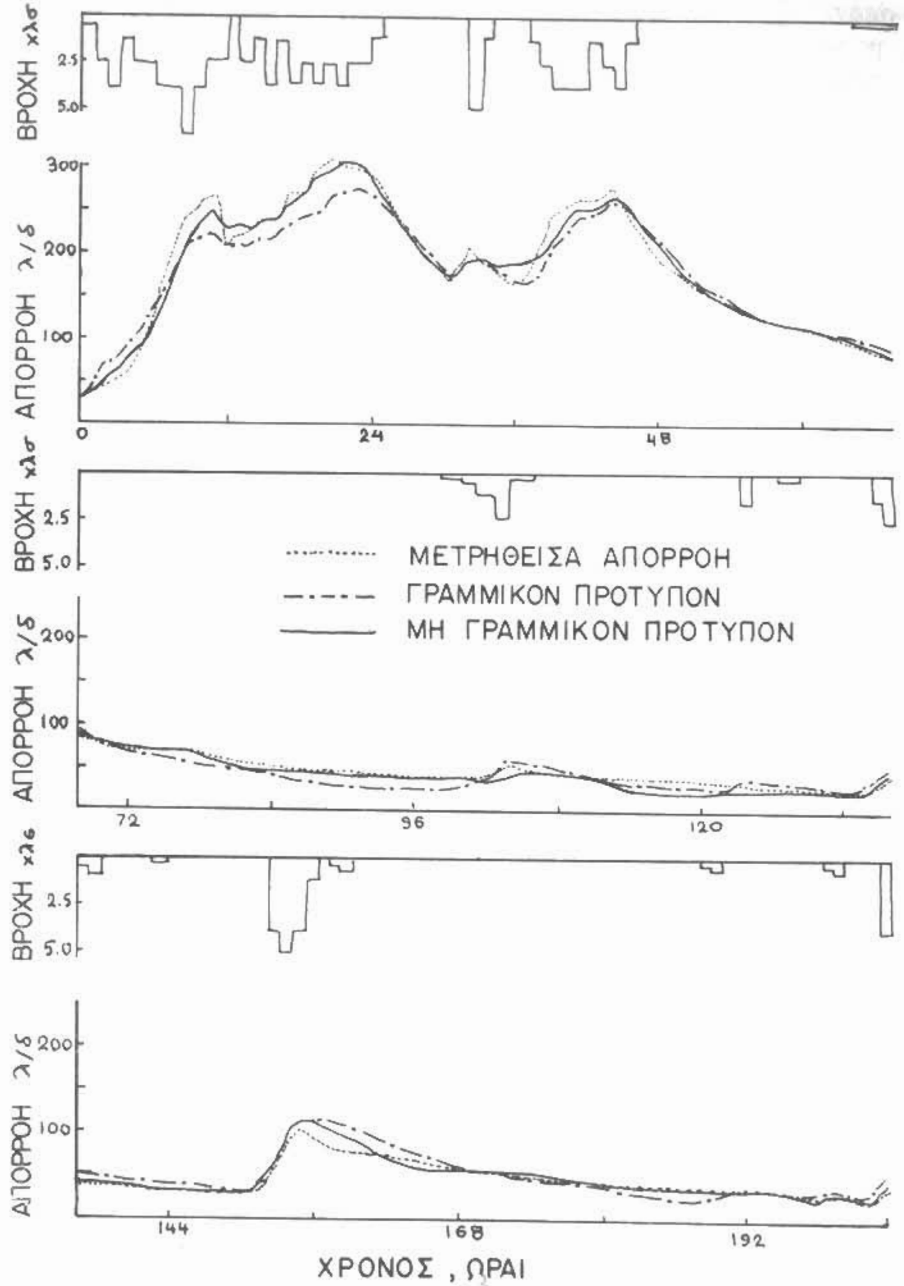
β) **Ἐφαρμογὴ II. Φυσικὴ Ὑδρολογικὴ Λεκάνη.**

Στὴν ἐφαρμογὴ αὐτὴ χρησιμοποιοῦνται παρατηρήσεις βροχῆς καὶ ἀπορροῆς μιᾶς φυσικῆς ὑδρολογικῆς λεκάνης κατὰ ὡριαῖα χρονικὰ διαστήματα.

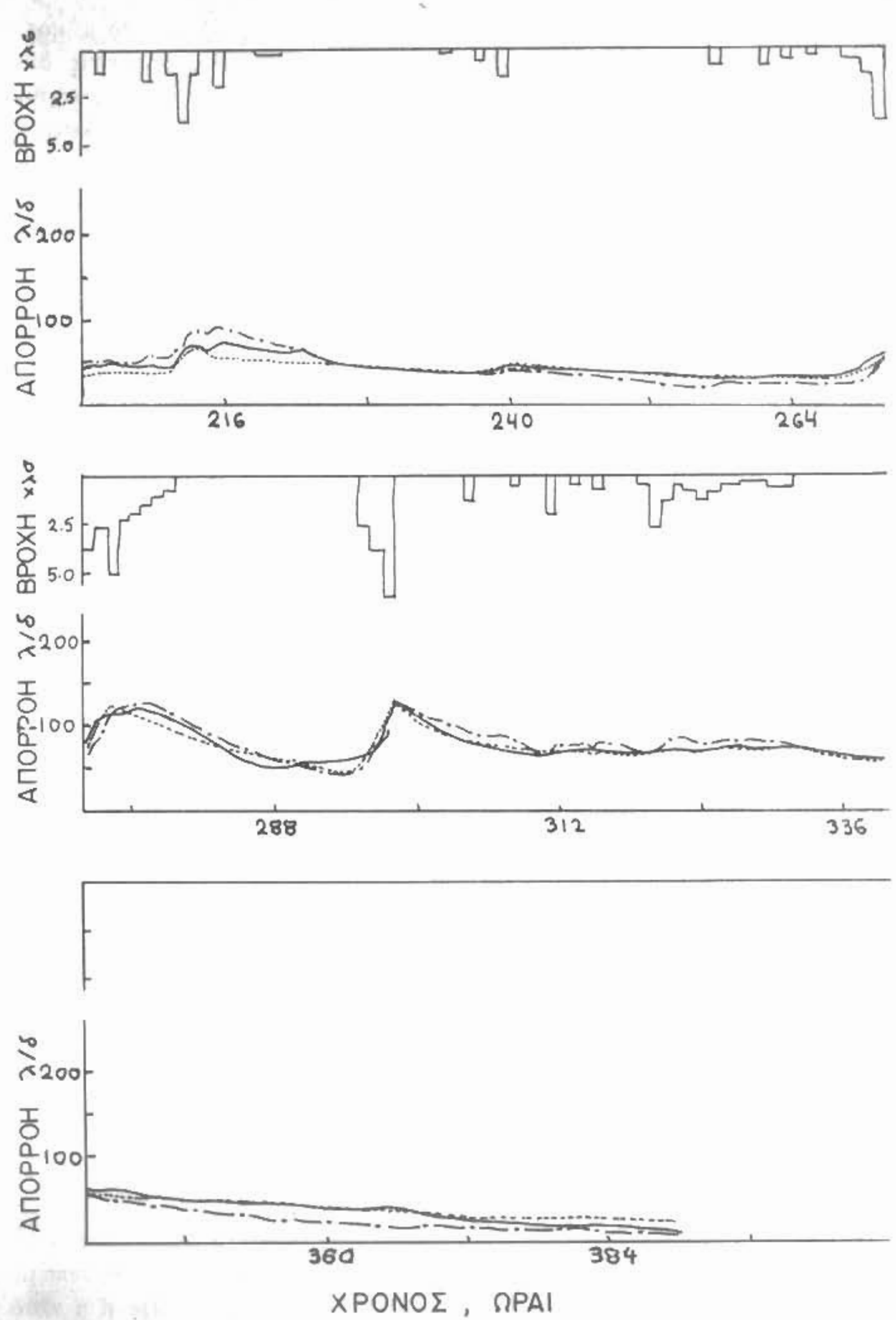


Σχ. 4. Φυσικὴ Ὑδρολογικὴ Λεκάνη: Γραμμικὴ Χαρακτηριστικὴ Συνάρτησις.

Ἡ λεκάνη αὐτὴ βρίσκεται στὴν βορειοδυτικὴ Καλιφορνία, ἔχει ἔκτασιν 850 στρεμμάτων καὶ μέσον ἐτήσιον ὕψος βροχῆς 950 χιλιοστά. Διὰ τὴν διερεύνησιν τῆς γραμμικῆς χαρακτηριστικῆς συναρτήσεως τῆς λεκάνης ἐπελέγη τὸ διάστημα [illegible] 13 καὶ 29 Ἰανουαρίου 1956. Διὰ τὸ ἀνάπτυγμα τῆς χαρακτηριστικῆς



Σχ. 5.



Σχ. 5. Φυσική Ὑδρολογική Λεκάνη : Μετρηθεῖσα Ἀπορροή καί ὑπολογισθεῖσα διά τοῦ Γραμμικοῦ καί μή Γραμμικοῦ Προτύπου.

συναρτήσεως ἐχρησιμοποιήθησαν ἑπτὰ πολυώνυμα ($N = 7$) καὶ τὸ μῆκος τῆς μνήμης ἐλήφθη ἴσον πρὸς $M = 70$. Ἡ χαρακτηριστικὴ συνάρτησις δίδεται στὸ σχῆμα 4 καὶ τὸ πραγματικὸν καὶ ὑπολογισθὲν ὑδρογράφημα στὸ σχῆμα 5. Ὁ συντελεστὴς πολλαπλῆς συσχετίσεως τοῦ συστήματος τῶν συντελεστῶν τοῦ CHEBYSHEV ἰσοῦται πρὸς 0.943 καὶ ἡ τετραγωνικὴ ρίζα τοῦ ἀθροίσματος τῶν τετραγώνων τῶν διαφορῶν μεταξὺ πραγματικῆς καὶ ὑπολογισθείσης ἀπορροῆς (RMS) εὑρέθη ἴση πρὸς 15 λίτρα. Ἡ μέση παροχὴ κατὰ τὸ διάστημα τῶν παρατηρήσεων εἶναι 75 λίτρα.

Σύγκρισις τῶν ἀποτελεσμάτων δείχνει ὅτι ἡ μέθοδος γενικὰ ὑποτιμᾶ τὰς τρεῖς διαδοχικὰς αἰχμὰς ποὺ ἐμφανίζονται στὸ πρῶτο σκέλος τοῦ ὑδρογραφήματος κατὰ 10% περίπου. Ὑπάρχει ἀπόλυτος ταυτότης χρόνου ἐμφανίσεως τῶν αἰχμῶν καὶ εἰς τὰ δύο ὑδρογραφήματα. Γενικά, ἔχοντας ὑπ᾽ ὄψιν ὅτι ἡ ἀκρίβεια τῶν παρατηρήσεων κυμαίνεται ἐντὸς ὁρίων 10%, ἡ προσέγγισις πού δίδει τὸ μαθηματικὸ πρότυπον εἶναι λογικὴ καὶ πρακτικῶς ἀποδεκτή. Ἐπίσης πρέπει νὰ τονισθῆ ὅτι τὸ πρότυπον χρησιμοποιεῖ τὶς πραγματικὲς παρατηρήσεις βροχῆς-ἀπορροῆς καὶ ὄχι «ὠφέλιμη βροχὴ» καὶ «ἐπιφανειακὴ ἀπορροή», ὅπως στὴν περίπτωσιν τοῦ μοναδιαίου ὑδρογραφήματος.

4. ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΝ ΠΡΟΤΥΠΟΝ ΥΔΡΟΛΟΓΙΚΟΥ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ ΜΗ ΓΡΑΜΜΙΚΟΝ ΔΕΥΤΕΡΑΣ ΤΑΞΕΩΣ

Ἐὰν στὴν ἐξίσωσιν (14) προσθέσουμε τὸν ὅρον ποὺ περιέχει τὴν διπλῆ σειρὰ ἀπὸ τὴν σχέσιν (3), τὸ σύστημα εἶναι πλέον μὴ γραμμικὸν δευτέρας τάξεως τῆς μορφῆς

$$y(t) = h_0 + \sum_{\tau_1=0}^{M} h_1(\tau_1)\times(t-\tau_1) + \sum_{\tau_1=0}^{M}\sum_{\tau_2=0}^{M} h_2(\tau_1,\tau_2)\times(t-\tau_1)\times(t-\tau_2) \qquad (27)$$

ὅπου M εἶναι τὸ μῆκος τῆς μνήμης τοῦ συστήματος. Ἀνάπτυξις τῶν χαρακτηριστικῶν συναρτήσεων εἰς σειρὰς τοῦ CHEBYSHEV δίδει

$$h_1(\tau_1) \sim P_{N_1}(s) = \sum_{r=0}^{N_1}{}'' \alpha_r T_r(s) \qquad (28)$$

καὶ

$$h_2(\tau_1,\tau_2) \sim P_{N_2}(s,z) = \sum_{r=0}^{N_2}{}'' \sum_{s=0}^{N_2}{}'' \alpha_{rs} T_r(s)\, T_s(z) \qquad (29)$$

ὅπου

$$\begin{aligned} s &= \text{συν}(\tau_1\pi/M), & \tau_1 &= 0, 1, \ldots\ldots, M \\ z &= \text{συν}(\tau_2\pi/M), & \tau_2 &= 0, 1, \ldots\ldots, M \end{aligned} \qquad (30)$$

καὶ N_1, N_2 ὁ ἀριθμὸς τῶν πολυωνύμων στὶς σειρὲς τοῦ CHEBYSHEV. Ἀντικατάστασις τῶν ἐξισώσεων (28) καὶ (29) στὴν (27) δίδει

$$\begin{aligned} y(t) = h_0 &+ \sum_{\tau_1=0}^{M} \sum_{r=0}^{N_1}{}'' \alpha_r T_r(s)\times(t-\tau_1) + \\ &+ \sum_{\tau_1=0}^{M}\sum_{\tau_2=0}^{M}\sum_{r=0}^{N_2}{}''\sum_{s=0}^{N_2}{}'' \alpha_{rs} T_r(s)\, T_s(z)\times(t-\tau_1)\times(t-\tau_2) \end{aligned} \qquad (31)$$

Ἀναδιάταξις τῶν σειρῶν δίδει τὴν ἐξίσωσιν

$$\begin{aligned} y(t) = h_0 &+ \sum_{r=0}^{N_1}{}'' \alpha_r \sum_{\tau_1=0}^{M} T_r(s)\times(t-\tau_1) + \\ &+ \sum_{r=0}^{N_2}{}'' \sum_{s=0}^{N_2} \alpha_{rs} \Big[\sum_{\tau_1=0}^{M} T_r(s)\times(t-\tau_1)\Big]\cdot\Big[\sum_{\tau_2=0}^{M} T_s(z)\times(t-\tau_2)\Big] \end{aligned} \qquad (32)$$

Ἐὰν περαιτέρω κάνουμε τὴν ἀντικατάστασιν

$$\begin{aligned} C_r(t) &= \sum_{\tau_1=0}^{M} T_r(s)\times(t-\tau_1) \\ C_s(t) &= \sum_{\tau_2=0}^{M} T_s(z)\times(t-\tau_2) \end{aligned} \qquad (33)$$

Ἡ ἐξίσωσις (32) παίρνει τὴν πιὸ ἁπλῆ μορφὴ

$$y(t) = h_0 + \sum_{r=0}^{N_1}{}'' \alpha_r C_r(t) + \sum_{r=0}^{N_2}{}'' \sum_{s=0}^{N_2}{}'' \alpha_{rs} C_r(t)\, C_s(t) \qquad (34)$$

Χρησιμοποιῶντας τὴν ἰδιότητα ὅτι οἱ χαρακτηριστικὲς συναρτήσεις τοῦ συστήματος εἶναι συμμετρικὲς (ΠΑΠΑΖΑΦΕΙΡΙΟΥ, 1972) καὶ χωρίζοντας τὰ διαγωνιακὰ στοιχεῖα ἀπὸ τὰ μὴ διαγωνιακά, καταλήγουμε στὴν σχέσιν

$$y(t) = h_0 + \sum_{r=0}^{N_1}{}'' \alpha_r C_r(t) + \sum_{r=0}^{N_2}{}^{(4)} \alpha_{rr} C_r^2(t) + 2\sum_{r=1}^{N_2}{}'' \sum_{s=0}^{r=1}{}'' \alpha_{rs} C_r(t)\, C_s(t) \qquad (35)$$

ὅπου ὁ διπλὸς τόνος σημαίνει ὅτι, ὅταν $r=0$ ἢ N_1, οἱ ἀντίστοιχοι ὅροι τῆς σειρᾶς πρέπει νὰ διαιρεθοῦν διὰ τοῦ δύο διὰ τὸ γραμμικὸν μέρος τῆς ἐξισώσεως, καὶ ὅταν r ἢ s ἰσοῦται μὲ μηδὲν ἢ N_2 διὰ τὸ μὴ γραμμικὸν μέρος. Ἐπὶ πλέον,

(4) σημαίνει ὅτι ὁ πρῶτος καὶ τελευταῖος ὅρος πρέπει νὰ διαιρεθοῦν διὰ τοῦ τέσσαρα. Ἡ σχέσις (35) ὑπὸ μορφὴν μητρώου δίδεται ἀπὸ τὴν ἐξίσωσιν

$$[\mathbf{C}_{k,n}][\boldsymbol{\alpha}_n] = [\mathbf{y}_k] \tag{36}$$

$$k = 0, 1, \ldots\ldots, L, \quad n = 0, 1, \ldots\ldots, N$$

ὅπου

$$N = N_1 + \sum_{r=1}^{N_2+1} r \tag{37}$$

Ὅπως εἶναι ἐμφανές, ἡ ἐξίσωσις (36) εἶναι ὅμοια μὲ τὴν (21), μὲ τὴν διαφορά, ὅτι εἶναι πιὸ πολύπλοκος. Ἡ ἴδια διαδικασία ἀκολουθεῖται διὰ τὸν ὑπολογισμὸν τῶν συντελεστῶν τοῦ CHEBYSHEV, ὅπως καὶ στὴν περίπτωσιν τοῦ γραμμικοῦ συστήματος.

Τὸ μῆκος τῆς μνήμης M καὶ ὁ ἀριθμὸς τῶν πολυωνύμων τοῦ CHEBYSHEV γιὰ τὴ γραμμικὴ καὶ μὴ γραμμικὲς χαρακτηριστικὲς συναρτήσεις τοῦ συστήματος N_1 καὶ N_2 πρέπει ἐπίσης νὰ ἐπιλεγοῦν. Ἰδιαίτερα πρέπει νὰ προσεχθῇ ὁ ἀριθμὸς τῶν πολυωνύμων τοῦ μὴ γραμμικοῦ μέρους, διότι αὔξησις τοῦ ἀριθμοῦ αὐτοῦ ἔστω καὶ κατὰ μία μονάδα συνεπάγεται σημαντικὴ αὔξησιν τῶν ἀπαιτουμένων ὑπολογισμῶν. Διὰ κάθε πρακτικὴ ἐφαρμογή, ὁ ἀριθμὸς αὐτὸς εὑρίσκεται κάπου μεταξὺ 3 καὶ 5. Στὴν συνέχεια ἀκολουθεῖ ἡ ἐφαρμογὴ τοῦ μὴ γραμμικοῦ προτύπου διὰ τὸν ὑπολογισμὸν τῆς ἀπορροῆς.

Διὰ τὸν σκοπὸν αὐτὸν χρησιμοποιεῖται ἡ ἰδία ὑδρολογικὴ λεκάνη καὶ τὰ ὑδρολογικὰ στοιχεῖα τῆς αὐτῆς περιόδου ὅπως καὶ εἰς τὴν Ἐφαρμογὴ II τοῦ γραμμικοῦ προτύπου, ὥστε νὰ καταστῇ δυνατὴ ἡ σύγκρισις τῶν δύο. Τὸ μῆκος τῆς μνήμης ἐπελέγη ἐπίσης ἴσο πρὸς 70 ὧρες, ὁ ἀριθμὸς τῶν πολυωνύμων τοῦ γραμμικοῦ τμήματος (N_1) ἴσος πρὸς 7 καὶ ὁ ἀριθμὸς τῶν πολυωνύμων τοῦ μὴ γραμμικοῦ τμήματος (N_2) ἴσος πρὸς 4. Τὸ ὑπολογισθὲν ὑδρογράφημα δίδεται ἐπίσης εἰς τὸ σχῆμα 5. Ὁ συντελεστὴς πολλαπλῆς συσχετίσεως εὑρέθη ἴσος πρὸς 0.978 καὶ ἡ τετραγωνικὴ ρίζα τοῦ ἀθροίσματος τῶν τετραγώνων τῶν διαφορῶν ὑπολογισθείσης - μετρηθείσης ἀπορροῆς ἴση πρὸς 8 λίτρα.

Συγκρίνοντας τὰ στοιχεῖα αὐτὰ καὶ τὰ ὑδρογραφήματα στὸ σχῆμα 5, βγαίνει καθαρὰ τὸ συμπέρασμα, ὅτι τὸ δευτέρας τάξεως μὴ γραμμικὸν σύστημα δίδει πολὺ καλύτερα ἀποτελέσματα. Τὸ συνολικὸ σφάλμα (RMS) περιορίζεται ἀπὸ 15 σὲ 8 λίτρα, δηλαδὴ ἐπῆλθε βελτίωσις 47% τοῦ ὅλου σφάλματος. Ὅσον ἀφορᾷ τὶς αἰχμές, ἀπὸ μέση διαφορὰ 10% στὸ γραμμικὸ πρότυπο ἔχουμε τώρα διαφορὰ μόνον 3%. Γενικῶς, μπορεῖ νὰ λεχθῇ ὅτι καλύτερη προσέγγισις τῆς πραγματικῆς ἀπορροῆς, ἀπὸ αὐτὴ ποὺ δίδει τὸ μὴ γραμμικὸν σύστημα, θὰ ἦταν μᾶλλον σπατάλη χρόνου καὶ κόπου νὰ ἐπιδιωχθῇ.

5. ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Σκοπὸς τῆς παρούσης ἐργασίας εἶναι νὰ παρουσιάσῃ ἐν περιλήψει τὴν θεωρία ἀναλύσεως ὑδρολογικῶν συστημάτων καὶ τὴν χρῆσιν της εἰς τὴν διερεύνησιν γραμμικῶν καὶ μὴ γραμμικῶν μαθηματικῶν προτύπων ὑδρολογικῶν συστημάτων. Τὰ ἀναφερθέντα παραδείγματα ἔχουν σκοπὸν νὰ δείξουν τὶς δυνατότητες τῆς μεθόδου διὰ τὴν ἐπίλυσιν ὑδρολογικῶν προβλημάτων καὶ νὰ ἁπλοποιήσουν τὶς ἔννοιες εἰς σημεῖον, ὥστε ὁ μελλοντικὸς ἐρευνητής, ποὺ θὰ ἤθελε νὰ χρησιμοποιήσῃ τὴν μέθοδον αὐτήν, νὰ τὸ ἐπιτυχῃ μὲ ὅσο τὸ δυνατὸν λιγώτερες δυσκολίες. Ἐπισκόπησις τῆς παρουσιασθείσης ὕλης ἐπιτρέπει τὴν ἐξαγωγὴν ὡρισμένων χρησίμων συμπερασμάτων:

1. Ἡ μέθοδος χρησιμοποιεῖ αὐτούσιες παρατηρήσεις βροχῆς καὶ ἀπορροῆς καὶ εἶναι ἡ πρώτη φορὰ κατὰ τὴν ὁποίαν μαθηματικὴ μέθοδος χρησιμοποιεῖ αὐτούσια τὰ στοιχεῖα αὐτά.

2. Τὸ γραμμικὸν πρότυπον, ἐὰν τὸ σύστημα διὰ τὸ ὁποῖον χρησιμοποιεῖται εὑρίσκεται κατὰ τὴν ἀρχική του φάση σὲ ἠρεμία (δηλαδὴ αὐτὸ εἶναι ἰσοδύναμον μὲ τὸν χωρισμὸν τοῦ ὑδρογραφήματος καὶ χρῆσιν τῆς ὠφελίμου βροχῆς ποὺ χρησιμοποιεῖται στὶς μεθόδους διερευνήσεως μοναδιαίου ὑδρογραφήματος), δίδει τὸ μοναδιαῖον ὑδρογράφημα τοῦ συστήματος, μὲ τὸ ἐπὶ πλέον πλεονέκτημα ὅτι τὸ ὑδρογράφημα αὐτὸ εἶναι πάντοτε φυσικῶς πραγματοποιήσιμον (θετικὲς τεταγμένες).

3. Τὸ πρότυπον εἶναι ἐλαστικὸν καὶ κατάλληλον τόσο γιὰ περιπτώσεις, ὅπου ἡ ὑδρολογικὴ λεκάνη συμπεριφέρεται ὡς σχεδὸν γραμμικὸ σύστημα, ὅσον καὶ διὰ περιπτώσεις ποὺ ἡ λεκάνη εἶναι ἰσχυρῶς μὴ γραμμική. Ἀρχίζει κανεὶς μὲ τὸ γραμμικὸν πρότυπον καὶ ἐὰν τὰ ἀποτελέσματα δὲν ἐμπίπτουν εἰς ἐπιθυμητὰ ὅρια, τότε καὶ μόνον προστίθενται καὶ ἄλλοι μέχρι ἀποκτήσεως τοῦ ἐπιθυμητοῦ ἀποτελέσματος. Αὐτὸ βεβαίως σημαίνει οἰκονομία κόπου καὶ χρήματος.

4. Παρέχει ἰδεώδη τρόπον ποσοτικῆς ἐκτιμήσεως τῶν ἀποτελεσμάτων εἰς περιπτώσεις, ὅπου ἡ ὑδρολογικὴ λεκάνη ὑφίσταται μεταβολὰς τυχαίας ἢ προγραμματισμένας. Ἐκτίμησις τῶν χαρακτηριστικῶν συναρτήσεων πρὸ καὶ μετὰ τὴν μεταβολὴν παρέχει τὴν εὐχέρειαν ἐκτιμήσεως τῶν συνεπειῶν τῶν μεταβολῶν αὐτῶν.

5. Παρέχει τὰ μέσα συμπληρώσεως ἐλλειπόντων στοιχείων ἀπορροῆς, ὅταν μόνον βροχομετρικὰ δεδομένα εἶναι διαθέσιμα. Ἔτσι ἐπιμηκύνεται ὁ χρόνος διαθεσίμων στοιχείων ἀπορροῆς καὶ κατὰ συνέπειαν παρέχεται ἡ εὐχέρεια διὰ καλύτερη σχεδίασι καὶ προγραμματισμὸν ὑδραυλικῶν ἔργων.

6. Καίτοι εἰς τὰ παραδείγματα χρησιμοποιοῦνται ὡριαῖες παρατηρήσεις, μποροῦν νὰ χρησιμοποιηθοῦν παρατηρήσεις κατὰ ὁποιαδήποτε διαστήματα εἶναι ἐπιθυμητὰ (ἡμερήσια, ἑβδομαδιαῖα κ.λ.π.).

7. Μὲ κατάλληλες τροποποιήσεις τὸ πρότυπον μπορεῖ νὰ χρησιμοποιη-

θῇ καὶ γιὰ ἄλλους ὑπολογισμούς, ὅπως ποσότητα φερτῶν ὑλῶν, ποιότητα νεροῦ, φυσικῶν ρευμάτων κ.λ.π.

8. Τέλος ἡ χρῆσις τοῦ προτύπου εἶναι οἰκονομική. Τὸ κόστος ὑπολογισμοῦ τοῦ γραμμικοῦ συστήματος εἶναι ἀσήμαντον, ἐνῷ τὸ κόστος τοῦ μὴ γραμμικοῦ δὲν ὑπερβαίνει τὴν ἀποζημίωσιν μιᾶς ὥρας ἑνὸς τεχνικοῦ βοηθοῦ.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

1. GRAWFORD, N. H. and KINSLEY, R. K.: Digital Simulation in Hydrology: Stanford Watershed Model IV, Tech. Rep. 39, Dept. Civil Eng., Stanford University, Palo Alto, 1966.
2. DAWDY, D. R. and O'DONNELL, T.: Mathematical Models of Catchment Behavior, Proc. A.S.C.E. 91 (HY4) 123 - 137, 1965.
3. FOX, L. and PARKER I. B.; Chebyshev Polynomials in Numercal Analysis, Oxford University Press, London, 1968.
4. LANCZOS, C.: Tables of Chebyshev Polynomials, U. S. National Bureau of Standards, Applied Mathematics series 9, U. S. Gov't printing office, Washingron D. C., 1952.
5. O'DONNEL. T.; Instantaneous unit Hydrograph Derivation by Harmonic Analysis, Int'l Assoc. Sci, Hydrology, Publ. No 51, 546 - 557, 1960.
6. PAPAZAFIRIOU, Z. G. and BURGY, R. H.; Hydrologic System Analysis in the Coniferous Forest Biome, Dept. Water Sci. and Eng. University of California, Davis, 1972 a.
7. ΠΑΠΑΖΑΦΕΙΡΙΟΥ, Ζ. Γ.; Ἀνάλυσις συστημάτων καὶ ὑδρολογικαὶ αὐτῶν ἐφαρμογαί, Τεχνικὰ Χρονικά, 1137 - 1143, 1972 β.
8. SYSTEM, M. A.; Chebyshev Methods in Numerical Approximation, Prentice Hall Inc. N. J. 1966.