

SPECTRUM ANALYSIS OF SP ANOMALY OVER A POLARIZED SPHERE.
A QUANTITATIVE INTERPRETATION BASED ON THE FREQUENCY SPECTRUM OF
THE ANOMALY. SELECTION OF OPTIMUM STEP OF PROSPECTING

By

G.Ai.Skianis* T.D.Papadopoulos* D.A.Vaiopoulos**

SUMMARY

Although, numerous papers have been published, dealing with spectrum analysis methods, in the magnetic and gravity field, however a little work has been done in this direction for the spontaneous potential field. So, by studying systematically the behaviour of frequency spectrum of geophysical anomalies, there have been found analytical expressions for the spectrum of gravity and magnetic fields which are produced by various geometrical bodies.

In this paper an analytical expression is introduced for the frequency spectrum of a spontaneous potential curve which is produced by a polarized spherical body and is considered the behaviour of the theoretical curves of this spectrum.

In addition, it is presented a new method of quantitative interpretation of spontaneous potential anomalies, based on the frequency spectrum, for the depth determination to the centre of the sphere and the polarization angle.

Finally, it is described quantitatively the dependence of the step of prospecting which has to be chosen to keep up the information taken from a SP profile, when the spherical body is buried in various depths.

The results of this paper can be useful in mineral prospecting investigations as well as in geothermal studies with the presupposition that the detected SP anomalies can be simulated to the potential field produced by a polarized spherical body.

* University of Athens, Geophysics-Geothermy Division

** University of Athens, Geography-Climatology Division

ΦΑΣΜΑΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ ΑΝΩΜΑΛΙΑΣ ΦΥΣΙΚΟΥ ΔΥΝΑΜΙΚΟΥ ΠΟΥ
ΠΑΡΑΓΕΤΑΙ ΑΠΟ ΠΟΛΩΜΕΝΗ ΣΦΑΙΡΑ. ΠΟΣΟΤΙΚΗ ΕΡΜΗΝΕΙΑ
ΤΗΣ ΑΝΩΜΑΛΙΑΣ ΜΕ ΒΑΣΗ ΤΟ ΦΑΣΜΑ ΣΥΧΝΟΤΗΤΩΝ ΤΗΣ.
ΕΠΙΛΟΓΗ ΚΑΤΑΛΛΗΛΟΥ ΒΗΜΑΤΟΣ ΔΙΑΣΚΟΠΗΣΗΣ

Υπο

Γ.Αι.Σκιδάνη* Τ.Δ.Παπαδόπουλου* Δ.Α.Βαϊόπουλου**

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Ενώ, στη βαρυτομετρία και μαγνητομετρία έχει διερευνηθεί συστηματικά η συμπεριφορά του φάσματος συχνοτήτων σε γεωφυσικές ανωμαλίες και έχουν βρεθεί οι αναλυτικές εκφράσεις των φασμάτων του βαρυτικού και μαγνητικού πεδίου που παράγονται από διάφορα γεωμετρικά σώματα, στον τομέα του φυσικού δυναμικού έχει γίνει λίγη δουλειά προς αυτή την κατεύθυνση.

Στην παρούσα εργασία εξάγεται η αναλυτική έκφραση του φάσματος συχνοτήτων της καμπύλης φυσικού δυναμικού που παράγεται από ένα πολωμένο σφαιρικό σώμα και μελετάται η συμπεριφορά των θεωρητικών καμπυλών αυτού του φάσματος. Στη συνέχεια αναπτύσσεται μια μέθοδος ποσοτικής ερμηνείας των ανωμαλιών φυσικού δυναμικού, με βάση το φάσμα συχνοτήτων τους, κατά την οποία προσδιορίζεται το βάθος του κέντρου της σφαίρας και η γωνία πόλωσης.

Τέλος, περιγράφεται ποσοτικά η εξάρτηση του βήματος διασκόπησης που χρειάζεται για να μη χαθεί η πληροφορία που μπορεί να μας δώσει το προφίλ φυσικού δυναμικού, όταν το σφαιρικό σώμα βρίσκεται σε διάφορα βάθη.

Τα πορίσματα αυτής της εργασίας μπορούν να αξιοποιηθούν στις μεταλλευτικές εξισκοπήσεις και σε μικρότερη κλίμακα στη γεωθερμία, στο βαθμό που οι ανωμαλίες φυσικού δυναμικού, στους δύο αυτούς τομείς της εφαρμοσμένης έρευνας, παράγονται από διπολικές κατανομές φορτίου.

* Πανεπιστήμιο Αθηνών, Τομέας Γεωφυσικής-Γεωθερμίας

** Πανεπιστήμιο Αθηνών, Τομέας Γεωγραφίας-Κλιματολογίας

(α) ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Ενώ, στη βαρυτομετρία και μαγνητομετρία εφαρμόζεται σε μεγάλη κλίμακα η ανάλυση συχνοτήτων για την ερμηνεία των ανωμαλιών υπαίθρου και υπάρχει μια μεγάλη βιβλιογραφία σε σχέση με αυτό το αντικείμενο (ενδεικτικά μόνο αναφέρουμε τις εργασίες των Dean 1958, Bhattacharyya 1966, Odegard and Berg 1965, Bhisasankaram κ.α. 1977), στη μέθοδο του φυσικού δυναμικού η έρευνα που έχει πραγματοποιηθεί σε σχέση με τις εφαρμογές της ανάλυσης Fourier είναι πολύ περιορισμένη. Από όσο γνωρίζουμε, υπάρχουν δυο εργασίες που αναφέρονται στην ποσοτική ερμηνεία ανωμαλιών φυσικού δυναμικού που παράγονται από κεκλιμένα λεπτά φύλλα (Rao κ.α. 1982, Rao and Mohan 1984).

Στην παρούσα εργασία γίνεται μια θεωρητική μελέτη του συνεχούς φάσματος ανωμαλίας που παράγεται από πολωμένη σφαίρα και στη συνέχεια παρουσιάζονται εφαρμογές της ανάλυσης αυτής στην ποσοτική ερμηνεία των ανωμαλιών φυσικού δυναμικού και στη μετρολογία.

(β) ΜΕΛΕΤΗ ΤΟΥ ΦΑΣΜΑΤΟΣ

Θεωρούμε διπολωμένη σφαίρα ακτίνας R_0 και πόλωσης E , το κέντρο k της οποίας απέχει κατά h από την επιφάνεια της Γης (σχ.1). Την αναλυτική έκφραση για το δυναμικό του ηλεκτρικού πεδίου έχει δώσει ο Petronski (1928). Ενδιαφερόμαστε μόνο για το δυναμικό $V(x)$ κατά τον άξονα x και θα υιοθετήσουμε την έκφραση που δίνεται σε σχετική εργασία του De Witte (1948):

$$V(x) = \frac{-ER_0^2}{2} \cdot \frac{h \cos \alpha + x \sin \alpha}{(h^2 + x^2)^{3/2}} \quad (1)$$

Η μετασχηματισμένη κατά Fourier $U(\omega)$ της $V(x)$ δίνεται από τη σχέση

$$U(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} V(x) e^{-i\omega x} dx \quad (\text{Spiegel, 1978}) \quad (2)$$

Δηλαδή,
$$U(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{-ER_0^2}{2} \cdot \frac{h \cos \alpha + x \sin \alpha}{(h^2 + x^2)^{3/2}} \cdot e^{-i\omega x} dx \rightarrow$$

$$\rightarrow U(\omega) = -\frac{ER_0^2}{2} \cos \alpha \int_{-\infty}^{\infty} \frac{h}{(x^2 + h^2)^{3/2}} e^{-i\omega x} dx - \frac{ER_0^2}{2} \sin \alpha \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{(x^2 + h^2)^{3/2}} e^{-i\omega x} dx \quad (3)$$

Αλλά
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{h}{(x^2 + h^2)^{3/2}} e^{-i\omega x} dx = 2\omega K_1(h\omega) \quad (\text{Campbell-Foster, 1957}) \quad (4)$$

Το ω θα θεωρείται θετικό στους υπολογισμούς που θα γίνουν. Η συνάρτηση K_1 είναι η τροποποιημένη συνάρτηση Bessel 2ου είδους και 1ης τάξης. Επειδή ισχύει:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{(x^2+h^2)^{3/2}} \cdot e^{-i\omega x} dx = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{-1}{(x^2+h^2)^{3/2}} \right]'_x \cdot e^{-i\omega x} dx$$

δηλαδή,
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{(x^2+h^2)^{3/2}} \cdot e^{-i\omega x} dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega x} d \left[\frac{-1}{(x^2+h^2)^{3/2}} \right]$$

με παραγοντική ολοκλήρωση θα έχουμε:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{(x^2+h^2)^{3/2}} \cdot e^{-i\omega x} dx = \left. \frac{-e^{-i\omega x}}{(x^2+h^2)^{3/2}} \right]_{-\infty}^{\infty} - i\omega \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i\omega x}}{(x^2+h^2)^{3/2}} dx \quad (5)$$

Εξ άλλου ισχύει:
$$\frac{-e^{-i\omega x}}{(x^2+h^2)^{3/2}} = \frac{-\cos\omega x}{(x^2+h^2)^{3/2}} + \frac{i\sin\omega x}{(x^2+h^2)^{3/2}} \quad (6)$$

Αλλά
$$\left| \frac{-\cos\omega x}{(x^2+h^2)^{3/2}} \right| \leq \frac{1}{(x^2+h^2)^{3/2}} \quad (7)$$

Ομως
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{(x^2+h^2)^{3/2}} = 0 \quad (8)$$

οπότε με βάση σχετικό ορισμό από τη ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ, Spiegel (1982), έχουμε ότι

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N : x > N \rightarrow \left| \frac{1}{(x^2+h^2)^{3/2}} \right| < \varepsilon \quad (9)$$

Από τις (7) και (9) συνάγεται ότι $\forall \varepsilon > 0$

$$\exists N : x > N \rightarrow \left| \frac{-\cos\omega x}{(x^2+h^2)^{3/2}} \right| < \varepsilon,$$

δηλαδή
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-\cos\omega x}{(x^2+h^2)^{3/2}} = 0 \quad (\text{Spiegel, 1982}) \quad (10)$$

Με ανάλογους συλλογισμούς μπορούμε να δείξουμε ότι:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-\cos\omega x}{(x^2+h^2)^{3/2}} = 0 \quad (11) \text{ καθώς και } \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\sin\omega x}{(x^2+h^2)^{3/2}} = 0 \quad (12)$$

Από τις (10), (11), (12) συνάγεται ότι ο πρώτος όρος του δευτέρου μέλους της (5) είναι ίσος με μηδέν, ήτοι

$$\left. \frac{-e^{-i\omega x}}{(x^2+h^2)^{3/2}} \right]_{-\infty}^{\infty} = 0, \quad \text{οπότε η (5) γίνεται:}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{(x^2+h^2)^{3/2}} \cdot e^{-i\omega x} dx = -i\omega \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i\omega x}}{(x^2+h^2)^{3/2}} dx \quad (13)$$

Επειδή ισχύει ότι:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i\omega x}}{(x^2+h^2)^{\frac{3}{2}}} dx = 2K_0(h\omega), \quad (\text{Campbell-Forster, 1957}) \quad (14)$$

όπου K_0 είναι η τροποποιημένη συνάρτηση Bessel, 2ου είδους, μηδενικής τάξης, η (13) γίνεται:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{(x^2+h^2)^{\frac{3}{2}}} \cdot e^{-i\omega x} dx = -2i\omega K_0(h\omega) \quad (15)$$

Ετσι, από τις (3), (4) και (15) έχουμε:

$$U(\omega) = -ER_0^2 \cos\alpha \cdot \omega K_1(h\omega) + iER_0^2 \sin\alpha \cdot \omega K_0(h\omega) \quad (16)$$

Το φάσμα πλάτων (amplitude spectrum) $A(\omega)$ θα δίνεται από τη σχέση

$$A(\omega) = |U(\omega)| \quad (16a)$$

Από τις (16) και (16a) συνάγεται ότι:

$$A(\omega) = ER_0^2 \omega \sqrt{\cos^2\alpha K_1^2(h\omega) + \sin^2\alpha K_0^2(h\omega)} \quad (17)$$

ενώ το φάσμα ισχύων (power spectrum) $A^2(\omega)$ θα είναι:

$$A^2(\omega) = E^2 R_0^4 \omega^2 [\cos^2\alpha K_1^2(h\omega) + \sin^2\alpha K_0^2(h\omega)] \quad (18)$$

Στα σχήματα 2 και 3 παρουσιάζονται οι καμπύλες των φασμάτων πλάτων $A(\omega)$ και φασμάτων ισχύων $A^2(\omega)$ αντίστοιχα, για διάφορες γωνίες πόλωσης. Το $A(\omega)$, με βάση τη (17) μετασχηματίζεται σε

$$\frac{h}{ER_0^2} \cdot A(\omega) = h\omega \sqrt{\cos^2\alpha K_1^2(h\omega) + \sin^2\alpha K_0^2(h\omega)},$$

οπότε στο διάγραμμα του φάσματος πλάτων έχουμε το $h\omega$ στον άξονα x (με το h σταθερό και το ω μεταβλητό) και στον άξονα y έχουμε το μέγεθος $\frac{h}{ER_0^2} \cdot A(\omega)$ με μεταβλητή ποσότητα το $A(\omega)$.

Παρατηρούμε ότι για $h\omega = 6 \text{ rad}$, το μέγεθος $\frac{h}{ER_0^2} \cdot A(\omega)$, άρα και το $A(\omega)$ πρακτικά μηδενίζεται. Δηλαδή, για σφαίρα που το κέντρο της βρίσκεται σε βάθος h , το $A(\omega)$ μηδενίζεται στη συχνότητα $\omega_{0,A}$, για την οποία ισχύει

$$h\omega_{0,A} = 6 \text{ rad} \quad (19)$$

Στο διάγραμμα του φάσματος ισχύων έχουμε το $h\omega$ στον άξονα x και το μέγεθος $\frac{h^2}{E^2 R_0^4} \cdot A^2(\omega)$ στον άξονα y . Το φάσμα ισχύων $A^2(\omega)$ πρακτικά μηδενίζεται στη συχνότητα ω_{0,A^2} για την οποία ισχύει

$$h\omega_{0,A^2} = 3.2 \text{ rad} \quad (20)$$

Θα πρέπει επίσης να σημειωθεί ότι

$$\lim_{h\omega \rightarrow 0} h\omega K_0(h\omega) = 0 \quad (21) \quad \text{και} \quad \lim_{h\omega \rightarrow 0} h\omega K_1(h\omega) = 1 \quad (22)$$

Οι αποδείξεις για τις (21) και (22) υπάρχουν στο ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ.

Η φάση $\Phi(\omega)$ δίνεται από τη σχέση:

$$\Phi(\omega) = \arctan \left[\frac{\text{Im}U(\omega)}{\text{Re}U(\omega)} \right] \stackrel{(16)}{\rightarrow} \Phi(\omega) = -\arctan \left[\frac{K_0(h\omega)}{K_1(h\omega)} \cdot \tan a \right] \quad (23)$$

Για $h\omega \rightarrow \infty$ οι ποσότητες $K_0(h\omega)$ και $K_1(h\omega)$ προσεγγίζονται από την παράσταση

$$\frac{e^{-h\omega}}{\sqrt{2\pi h\omega}} \quad (\text{Spiegel, 1976})$$

οπότε οι $K_0(h\omega)$ και $K_1(h\omega)$ τείνουν να εξισωθούν, δηλαδή

$$\lim_{h\omega \rightarrow \infty} \frac{K_0(h\omega)}{K_1(h\omega)} = 1 \quad (24)$$

Επίσης, $\lim_{h\omega \rightarrow 0} \frac{K_0(h\omega)}{K_1(h\omega)} = \lim_{h\omega \rightarrow 0} \frac{h\omega K_0(h\omega)}{h\omega K_1(h\omega)} \stackrel{(21),(22)}{\rightarrow} \lim_{h\omega \rightarrow 0} \frac{K_0(h\omega)}{K_1(h\omega)} = 0 \quad (25)$

Έτσι, το όριο της (23), για $\omega \rightarrow 0$, λόγω της (25) είναι:

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} \Phi(\omega) = -\lim_{h\omega \rightarrow 0} \arctan \left[\frac{K_0(h\omega)}{K_1(h\omega)} \cdot \tan a \right] = 0$$

ήτοι $\lim_{\omega \rightarrow 0} \Phi(\omega) = 0 \quad (26)$

και για $\omega \rightarrow \infty$, λόγω της (24) είναι:

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \Phi(\omega) = -a \quad (27)$$

Στο σχήμα 4 παρουσιάζεται η φάση $\Phi(\omega)$ σε συνάρτηση με το $h\omega$, για διάφορες τιμές της γωνίας πόλωσης a .

Είναι σημαντικό, για την ποσοτική ερμηνεία των ανωμαλιών φυσικού δυναμικού, να επισημόνουμε ότι ισχύει:

και
$$\left. \begin{aligned} A(0) &= \lim_{\omega \rightarrow 0} A(\omega) \\ A(0) &= \frac{ER\delta \cos a}{h} \end{aligned} \right\} (28) \quad \text{Η απόδειξη υπάρχει στο ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ}$$

(Υ) ΠΟΣΟΤΙΚΗ ΕΡΜΗΝΕΙΑ

Θεωρούμε λοιπόν μια ανωμαλία φυσικού δυναμικού που οφείλεται σε πολυμένη σφαίρα (σχ.1). Από το φάσμα πλατών ή το φάσμα ισχύων του προφίλ φυσικού δυναμικού, σημειώνουμε τη συχνότητα μηδενισμού $\nu_{0,A}$ ή ν_{0,A^2} αντίστοιχα. Από τις σχέσεις (19) και (20) βλέπουμε ότι το h προσδιορίζεται είτε από την

$$h = \frac{6}{2\pi\nu_{0,A}} = \frac{3}{\pi\nu_{0,A}} \quad (29)$$

$$\text{είτε από την } h = \frac{3.2}{2\pi\nu_{o,A}} = \frac{1.6}{\pi\nu_{o,A}^2} \quad (30)$$

Για τον προσδιορισμό της γωνίας πόλωσης a , θα μπορούσαμε στο φάσμα συχνοτήτων Φ να αμειώσουμε την τιμή του Φ ως προς την οποία η καμπύλη πρακτικά οριζοντιώνεται και που είναι ίση με $-a$. Το πρόβλημα όμως είναι ότι η οριζοντίωση καθυστερεί (γίνεται περίπου στη διπλάσια συχνότητα από αυτή που αντιστοιχεί στον πρακτικό μηδενισμό του $A(\omega)$), ενώ το φάσμα φάσης που εξάγεται με βάση τους κανόνες της αριθμητικής ανάλυσης δεν προσεγγίζει ικανοποιητικά τη θεωρητική καμπύλη $\Phi(\omega)$, προφανώς γιατί το διάστημα συλλογής τιμών (δηλαδή το δειγματικό διάστημα-βήμα διακοπήσης-sampling interval) θα πρέπει να είναι πολύ μικρό, ώστε να γίνει ο αριθμητικός μετασχηματισμός του $V(x)$. Αντίθετα, τα αριθμητικά προσδιορισμένα φάσματα πλατών και ισχύων, προσεγγίζουν ικανοποιητικά τις θεωρητικές καμπύλες, οπότε έχοντας ήδη προσδιορίσει το h σημειώνουμε τη συχνότητα ω για την οποία $h\omega = 1$, καθώς και την αντίστοιχη τιμή $A_{(h\omega=1)}$. Σημειώνουμε επίσης και την τιμή $A(0)$. Στη συνέχεια υπολογίζουμε το λόγο

$$\lambda = \frac{A_{(h\omega=1)}}{A(0)} \quad (31)$$

Από την (17) έχουμε ότι:

$$A_{(h\omega=1)} = \frac{ER_0^2}{h} \sqrt{\cos^2 a K_1^2(1) + \sin^2 a K_0^2(1)} \quad (32)$$

Το $A(0)$ προσδιορίζεται από την (28), οπότε από τις (28), (31) και (32) συνάγεται ότι

$$\lambda = \sqrt{K_1^2(1) + \tan^2 a K_0^2(1)} \quad \rightarrow \quad a = \arctan \sqrt{\frac{\lambda^2 - K_1^2(1)}{K_0^2(1)}}$$

Τα $K_0(1)$ και $K_1(1)$ προσδιορίζονται από πίνακες, οπότε

$$a = \arctan \sqrt{\frac{\lambda^2 - 0.36228}{0.17724}} \quad (33)$$

Έτσι προσδιορίζεται το h από την (29) ή την (30) και το a από την (33), αφού βρεθεί το λ από την (31).

ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Θεωρούμε πολωμένη σφαίρα με $ER_0^2 = 2 \cdot 10^5 \text{ mV} \cdot \text{m}$, σε βάθος $h = 20 \text{ m}$ και γωνίας πόλωσης $a = 30^\circ$. Παίρνοντας τιμές του $V(x)$ ανά 1 m (256 τιμές συνολικά), προσδιορίζουμε το φάσμα πλατών αριθμητικά με βάση το σύντομο μετασχηματισμό Fourier (FFT) (σ.5). Τελικά, βρίσκουμε ότι $h = 20.4 \text{ m}$ και $a = 38.7^\circ$.

Το πρόβλημα είναι ότι το $A(0)$ εξαρτάται και από σταθερές ως προς x τιμές του

$V(x)$, που προστίθενται ενδεχομένως και αυτές στο προφίλ υπαίθρου. Αν λοιπόν δεν έχουμε προσδιορίσει τη μηδενική στάθμη ώστε να έχουμε αναγάγει ως προς αυτήν τις μετρούμενες τιμές δυναμικού, τότε ή θα προσδιορίσουμε από το φάσμα πλατών το $\lim_{\omega \rightarrow 0} A(\omega)$ και θα το θεωρήσουμε αυτό σαν $A(0)$ ή θα λύσουμε την τριγωνομετρική εξίσωση

$$\mu = \frac{A(h\omega=1)}{A(h\omega=2)} = \frac{\sqrt{\cos^2 a \kappa \xi^2(1) + \sin^2 a \kappa \xi_0^2(1)}}{\sqrt{\cos^2 a \kappa \xi^2(2) + \sin^2 a \kappa \xi_0^2(2)}}$$

με μοναδικό άγνωστο το a .

Θα πρέπει να σημειωθεί ότι το κέντρο k της σφαίρας (σχ.1) δε βρίσκεται σε βάθος h κάτω από το αρνητικό κέντρο της ανωμαλίας, αλλά κάτω από το σημείο O του προφίλ, που απέχει κατά x_m από το αρνητικό κέντρο. Το x_m υπολογίζεται από τη σχέση

$$\frac{x_m}{h} = -\frac{3}{4} \cot a + \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{9}{16} \cot^2 a} \quad (\text{De Witte, 1948}) \quad (34)$$

Κατά συνέπεια, το σημείο που απέχει κατά h από το κέντρο της σφαίρας το προσδιορίζουμε από την (34).

(δ) ΕΠΙΛΟΓΗ ΒΗΜΑΤΟΣ ΔΙΑΣΚΟΠΗΣΗΣ

Επειδή το ηλεκτρικό πεδίο στην επιφάνεια παράγεται από μια κατανομή φορτίου στο βάθος h με βάση το νόμο των αντίστροφων τετραγώνων, αναμένεται η ανωμαλία $V(x)$ να διευρύνεται όσο αυξάνει το ξάθος h , οπότε αυξάνει και το βήμα διασκόπησης (sampling interval) που χρειάζεται για να μη χάσουμε σημαντικό μέρος της πληροφορίας που μπορεί να μας δώσει το προφίλ φυσικού δυναμικού. Ωστόσο, δεν έχουμε δει στη βιβλιογραφία μια ποσοτική σχέση που θα δίνει το βήμα διασκόπησης που θα πρέπει να επιλεγεί, όταν υπάρχουν πληροφορίες για τα πού περίπου κυμαίνεται το βάθος της πηγής της ανωμαλίας, ενώ στη βαρυτομετρία έχει γίνει μια παρόμοια εργασία (Μέμου-Σκιάνης, 1983).

Το κριτήριο στο οποίο στηριζόμαστε για τον προσδιορισμό του βήματος διασκόπησης, όταν το βάθος της πηγής είναι h , είναι το εξής:

Η κυκλική συχνότητα ω_s που αντιστοιχεί στο βήμα διασκόπησης (sampling interval), η οποία είναι διπλάσια της συχνότητας Nyquist (Kulhanek, 1976), θα πρέπει να είναι διπλάσια της μέγιστης συχνότητας $\omega_{o,A}$ που αντιστοιχεί στο φάσμα πλατών της ανωμαλίας, η οποία παράγεται από πηγή που βρίσκεται σε βάθος h , ώστε η συχνότητα Nyquist να είναι ίση με $\omega_{o,A}$. Θα πρέπει δηλαδή

$$\omega_s = 2\omega_{o,A} \quad (19) \quad \omega_s = \frac{12}{h} \rightarrow v_s = \frac{6}{\pi h}$$

Το βήμα διασκόπησης Δx_s είναι ίσο με $\frac{1}{v_s}$; οπότε $\Delta x_s = \frac{\pi h}{6}$ (35)

Στο σχ.6 έχουμε τη γραφική παράσταση του Δx_s ως προς h .

Ψηφιακή Βιβλιοθήκη Θεόφραστος - Τμήμα Γεωλογίας. Α.Π.Θ.

(ε) ΠΑΡΑΡΤΗΚΑ

Ισχύουν:

$$K_0(h\omega) = -\left\{\ln\left(\frac{h\omega}{2}\right) + \gamma\right\} I_0(h\omega) + \frac{(h\omega)^2}{2^2} + \frac{(h\omega)^4}{2^2 \cdot 4^2} \cdot \left(1 + \frac{1}{2}\right) + \frac{(h\omega)^6}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) + \dots$$

$$\gamma \rightarrow \text{σταθερά του Ευλείερ, } I_0(h\omega) = 1 + \frac{(h\omega)^2}{2^2} + \frac{(h\omega)^4}{2^2 \cdot 4^2} + \dots$$

Για $h\omega \rightarrow 0$ παραλείπουμε τους όρους $h\omega$ που είναι τάξης ανώτερης της πρώτης, οπότε θα ισχύει

$$h\omega K_0(h\omega) \approx -h\omega \left\{ \ln\left(\frac{h\omega}{2}\right) + \gamma \right\}, \quad (36)$$

$$\text{δηλαδή } h\omega K_0(h\omega) \approx -h\omega \ln \frac{h\omega}{2} - h\omega \gamma \quad (36a)$$

$$\text{Ομως, } -h\omega \ln \frac{h\omega}{2} = \frac{\ln \frac{h\omega}{2}}{-\frac{1}{h\omega}}. \text{ Αλλά } \lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{\ln \frac{h\omega}{2}}{-\frac{1}{h\omega}}$$

είναι η απροσδιόριστη μορφή $\frac{0}{0}$, οπότε εφαρμόζοντας τον κανόνα του l'Hospital μπορούμε να γράψουμε:

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} (-h\omega \ln \frac{h\omega}{2}) = \lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{\ln \frac{h\omega}{2}}{-\frac{1}{h\omega}} = \lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{\left[\ln \frac{h\omega}{2}\right]'}{\left[-\frac{1}{h\omega}\right]'}$$

$$\text{ήτοι } \lim_{\omega \rightarrow 0} (-h\omega \ln \frac{h\omega}{2}) = \lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{\frac{h\omega}{2}}}{\frac{1}{(h\omega)^2}} = \lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{2}{(h\omega)} \quad \text{ή } \lim_{\omega \rightarrow 0} (-h\omega \ln \frac{h\omega}{2}) = \lim_{\omega \rightarrow 0} 2h\omega = 0,$$

$$\text{ώστε } \lim_{\omega \rightarrow 0} (-h\omega \ln \frac{h\omega}{2}) = 0 \quad (36\beta)$$

$$\text{Επίσης, } \lim_{\omega \rightarrow 0} (-h\omega \gamma) = 0 \quad (36\gamma)$$

Συνεπώς, από (36α), (36β) και (36γ) οδηγούμαστε στην

$$\lim_{h\omega \rightarrow 0} h\omega K_0(h\omega) = 0 \quad (37)$$

Επίσης ισχύουν: (Spiegel, 1976)

$$K_2(h\omega) = \left\{ \ln\left(\frac{h\omega}{2}\right) + \gamma \right\} I_2(h\omega) + \frac{1}{h\omega} - \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{h\omega}{2}\right)^{1+2k}}{k!(1+k)!} \{\Theta(k) + \Theta(1+k)\}$$

$$I_2(h\omega) = \frac{h\omega}{2} + \frac{(h\omega)^3}{2^2 \cdot 4^2} + \frac{(h\omega)^5}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2} + \dots$$

$$\Phi(p) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{p}, \quad \Phi(0) = 0$$

Για $h\omega \rightarrow 0$ μπορούμε να κάνουμε ανάλογες προσεγγίσεις με αυτές που κάναμε για να καταλήξουμε στην (37), οπότε ο μόνος όρος που θα μένει στην τροποποιημένη συνάρτηση Bessel δευτέρου είδους $K_1(h\omega)$ θα είναι ο $\frac{1}{h\omega}$ ο οποίος αν πολλαπλασιασθεί με $h\omega$ θα δώσει γινόμενο τη μονάδα, δηλαδή

$$\lim_{h\omega \rightarrow 0} h\omega K_1(h\omega) = 1 \quad (38)$$

Επίσης, από τις (17), (18), (37), (38) συνάγεται ότι:

$$\lim_{h\omega \rightarrow 0} A(\omega) = \frac{ER_0^2 \cos a}{h} \quad (39)$$

και

$$\lim_{h\omega \rightarrow 0} A^2(\omega) = \frac{E^2 R_0^4 \cos^2 a}{h^2} \quad (40)$$

Εξ άλλου, από τη σχέση (16α) συνάγεται ότι:

$$A(0) = |U(0)| \quad (41)$$

Το $U(0)$ θα υπολογισθεί από τη σχέση (2), αν θέσουμε $\omega = 0$, δηλαδή

$$U(0) = \int_{-\infty}^{\infty} V(x) dx \quad (42)$$

Τότε, από τις (1) και (42) έχουμε:

$$U(0) = \frac{-ER_0^2}{2} \left[\int_{-\infty}^{\infty} \frac{h \cos a}{(h^2 + x^2)^{3/2}} dx + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin a}{(h^2 + x^2)^{3/2}} dx \right] \quad (43)$$

Στο δεύτερο ολοκλήρωμα της (43) η υπό ολοκλήρωση συνάρτηση είναι περιττή, κατά συνέπεια θα είναι

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin x}{(h^2 + x^2)^{3/2}} dx = 0, \quad \text{οπότε η (43) γίνεται}$$

$$U(0) = \frac{-ER_0^2}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{h \cos a}{(h^2 + x^2)^{3/2}} dx \quad (44)$$

Επειδή ισχύουν:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(h^2 + x^2)^{3/2}} = 2 \int_0^{\infty} \frac{dx}{(h^2 + x^2)^{3/2}} \quad (45)$$

και

$$\int \frac{dx}{(h^2 + x^2)^{3/2}} = \frac{x}{h^2 \sqrt{x^2 + h^2}} \quad (\text{Spiegel, 1976}) \quad (46)$$

έχουμε:

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{(h^2 + x^2)^{3/2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{h^2 \sqrt{h^2 + x^2}} - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{h^2 \sqrt{h^2 + x^2}} \rightarrow \int_0^{\infty} \frac{dx}{(h^2 + x^2)^{3/2}} = \frac{1}{h^2} \quad (45)$$

→ $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(h^2+x^2)^{3/2}} = \frac{2}{h^2}$, οπότε η (44) γίνεται:

$$U(0) = \frac{-ER_0}{h} \cos a \quad (41) \quad A(0) = \frac{ER_0}{h} \cos a \quad (47)$$

Από τις (39) και (47) έχουμε:

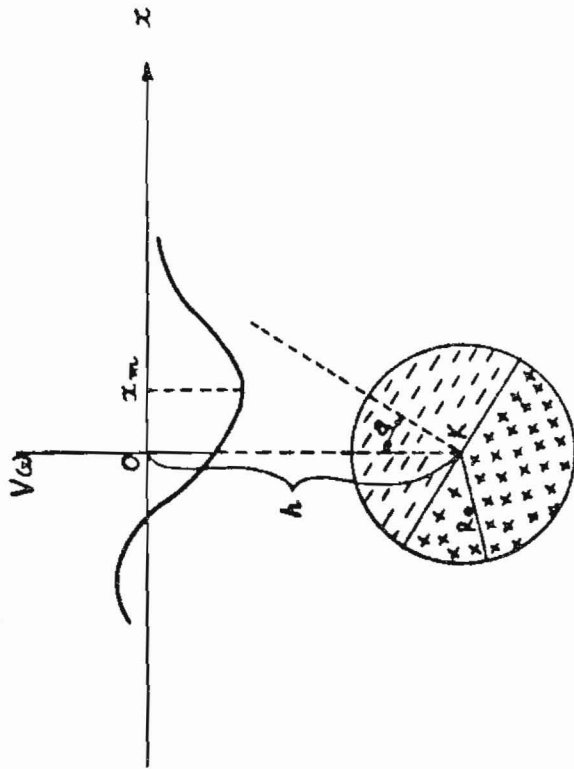
$$\lim_{\omega \rightarrow 0} A(\omega) = A(0) \quad (48)$$

Η σχέση (48) αποδεικνύει τη συνέχεια της συνάρτησης $A(\omega)$ στο σημείο 0.

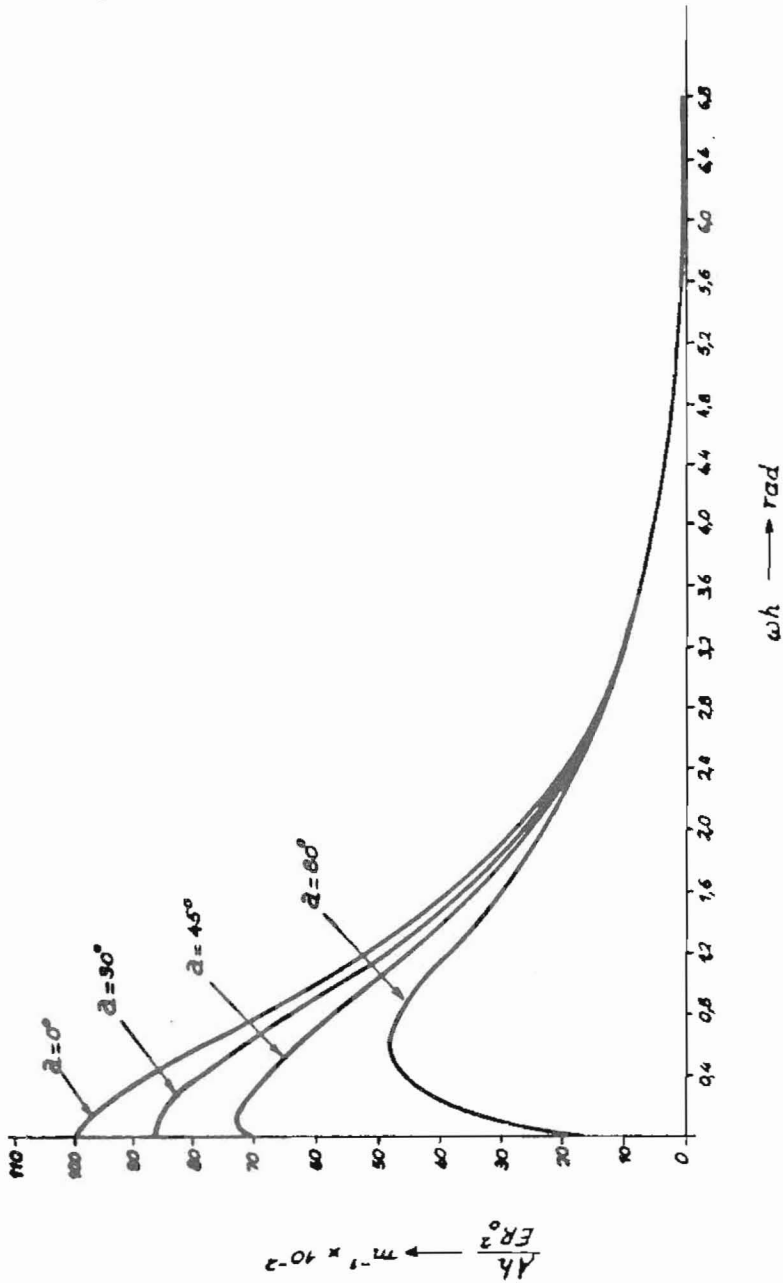
Επιμείναμε στην απόδειξη της συνέχειας της συνάρτησης $A(\omega)$ στο σημείο 0, για την περίπτωση της πολωμένης σφαίρας, γιατί θα πρέπει να έχουμε υπόψη ότι η συνάρτηση $A(\omega)$ δεν είναι συνεχής στη συχνότητα μηδέν σε όλες τις περιπτώσεις και αν αγνοήσουμε το ζήτημα της συνέχειας είναι πιθανό να οδηγηθούμε σε σφάλματα στην ερμηνεία των φασμάτων πλατών που οφείλονται σε διάφορες κατανομές φορτίου.

B I B Λ Ι Ο Γ Ρ Α Φ Ι Α

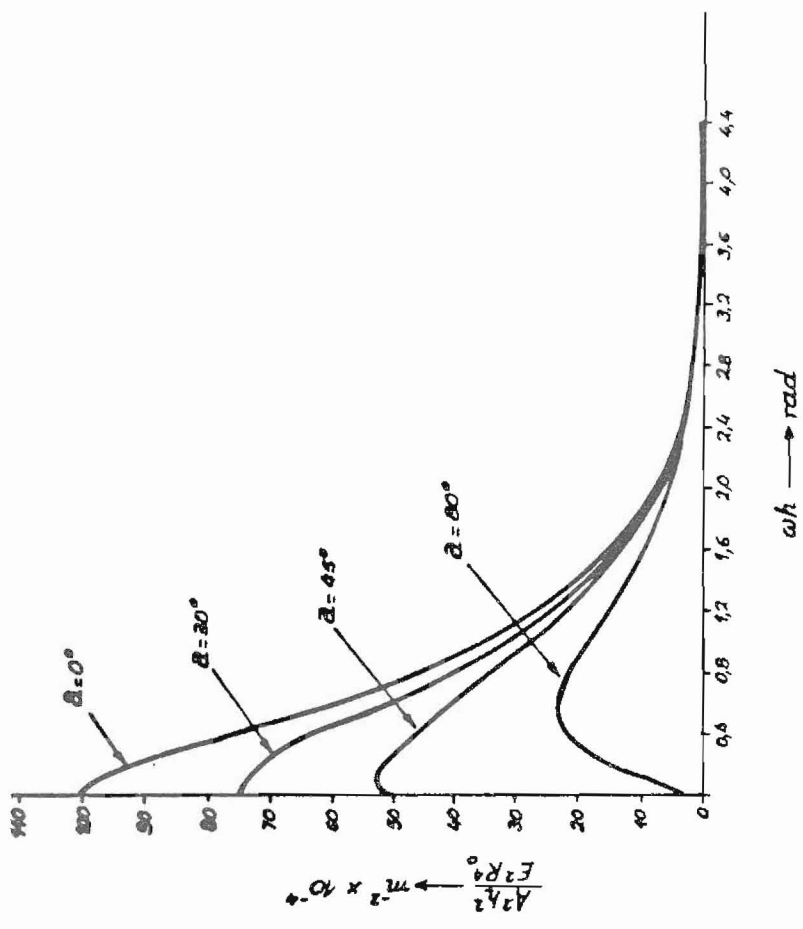
- Bhattacharyya B.K.: Continuous Spectrum of the Total Magnetic Field Anomaly due to a Rectangular Prismatic Body. *Geophysics* 31, p.97-121, 1966.
- Bhimasankaram V.L.S., Nagendra R., Seshagiri Rao S.V.S.: Interpretation of Gravity Anomalies due to Finite Inclined Dikes using Fourier Transformation. *Geophysics* 42 (1), p.51-59, 1977.
- Campbell G.A., Foster R.A.: *Fourier Integrals*. D. Van Nostrand Company Inc., Princeton New Jersey, Toronto, New York, London, 1957.
- Dean W.: Frequency Analysis for Gravity and Magnetic Interpretation. *Geophysics* 23 (1), p.97-127, 1958.
- De Witte L.: A New Method of Interpretation of Self-Potential Field Data. *Geophysics* 13, p.600-608, 1948.
- Kulhanek O.: *Introduction to Digital Filtering in Geophysics*. Elsevier Scientific Publishing Company, Amsterdam-Oxford-New York, 1976.
- Odegard M.E., Berg J.W. (Jr): Gravity Interpretation Using the Fourier Integral. *Geophysics* 30 (3), p.424-438, 1965.
- Petrovski A.: The Problem of a Hidden Polarized Sphere. *Phil. Mag.* 5, 334-358, 1928.
- Rao D.A., Ram Babu E.V., Sivakumar Sinha G.D.J.: A Fourier Transform Method for the Interpretation of Self-Potential anomalies due to TWO-DIMENSIONAL INCLINED Sheets of FINITE Depth Extent. *PAGEOPH* 120, p.365-374, 1982.
- Rao S.V.S., Mohan N.L.: Spectral Interpretation of Self-Potential Anomaly due to an Inclined Sheet. *Current Science. Mag* 5, Vol.53, N°9, 1984.
- Spiegel M.R.: *Μαθηματικό Τυπολόγιο. Μετάφραση Περούδης Σ.Κ.* McGraw-Hill New York, ΕΣΠΙ, Αθήνα 1976.
- Spiegel M.R.: *Ανώτερα Μαθηματικά. Μετάφραση Σχολιάς Ι.Χ.* McGraw-Hill New York, ΕΣΠΙ Αθήνα, 1982.
- Spiegel M.R.: *Ανάλυση Fourier: Μετάφραση Περούδης Σ.Κ.* McGraw-Hill New York, ΕΣΠΙ Αθήνα, 1978.
- Μέμου Τζ., Σκυιάνης Γ.: Δυνατότητες και Περιορισμοί των Γεωφυσικών Μεθόδων στην Αναζήτηση και στον Εντοπισμό Χρωμικών Κοιτασμάτων. 1° Γεωλογικό Συνέδριο. Αθήνα, Δεκ. 1983.



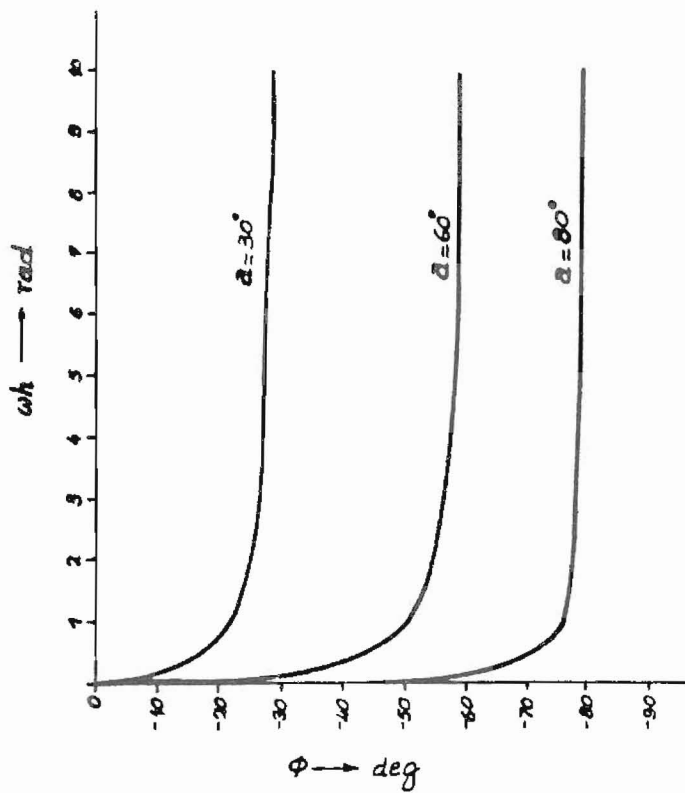
Σχ.1. Προφίλ δυναμικού που παράγεται από πολεμύνητ
 σφαίρα αττίνας R_0 , μωνία πόλωςης a και βάθους h



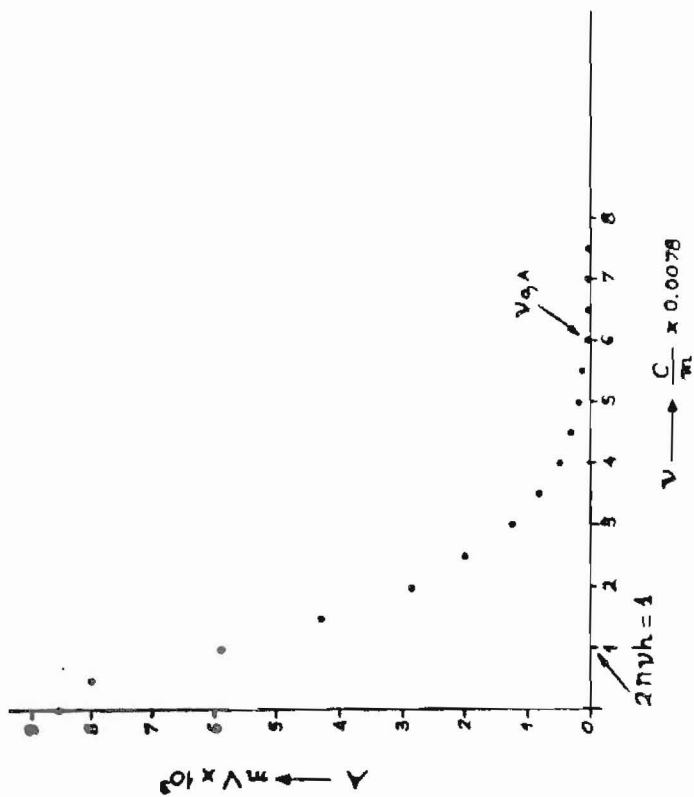
Σχ.2 Μεταβολή του ηλάτους ως προς τη ευνότητα, για διάφορες γωνίες πόλωσης



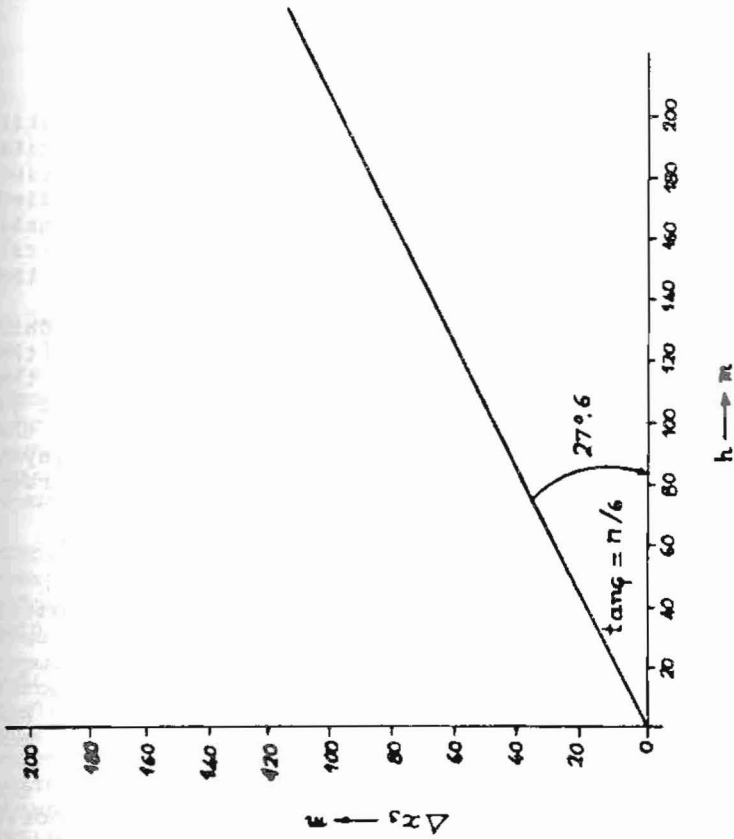
Σχ.3 Μεταβολή της ισχύος ως προς τη ευυνότητα για διάφορες γωνίες πάκωσης



Στ.4 Μεταβολή της φάσης ως προς τη συχνότητα για διάφορες γωνίες πόλωσης



Στ.5. Φάσμα πλατών του ευθεταιπιού μοντέλου επε
 πολαμένης εραίρας ($ER_0 = 2 \times 10^5 \text{ m.v.m}$, $h = 20 \text{ m}$, $\alpha = 30^\circ$)



Στ.6. Γραμμική παράσταση του βήματος διακύλισης ως προς το βάθος της πολωμένης σφαίρας