

ΠΟΣΟΤΙΚΗ ΕΡΜΗΝΕΙΑ ΑΝΩΜΑΛΙΩΝ ΦΥΣΙΚΟΥ ΔΥΝΑΜΙΚΟΥ
ΠΟΥ ΠΑΡΑΓΟΝΤΑΙ ΑΠΟ ΚΕΚΛΙΜΕΝΟ ΛΕΠΤΟ ΦΥΛΛΟ (ΛΕΠΤΗ ΦΛΕΒΑ)
ΜΕ ΒΑΣΗ ΤΗ ΜΕΛΕΤΗ ΤΟΥ ΦΑΣΜΑΤΟΣ ΣΥΧΝΟΤΗΤΩΝ

Υπό

Γ.Αι.Σκιάνη* Τ.Δ.Παπαδόπουλου* Δ.Α.Βαϊόπουλου**

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Το θέμα της φασματικής ανάλυσης των ανωμαλιών φυσικού δυναμικού έχει διερευνηθεί σε πολύ περιορισμένη κλίμακα, αν και, από τη μελέτη της συμπεριφοράς των καμπυλών του φάσματος συχνοτήτων, μπορεί κανείς να έχει πληροφορίες για παραμέτρους της κατανομής φορτίου που παράγει την ανωμαλία του δυναμικού.

Στα πλαίσια της προσπάθειας μας για μια πιο ολοκληρωμένη αντιμετώπιση των ζητημάτων που σχετίζονται με το φάσμα συχνοτήτων των ανωμαλιών φυσικού δυναμικού, εντάσσεται και η παρούσα εργασία, όπου αναπτύσσεται μια νέα μέθοδος ποσοτικής ερμηνείας των προφίλ ηλεκτρικού δυναμικού που παράγονται από πολωμένο και λεπτό κεκλιμένο φύλλο (λεπτή φλέβα), με βάση τη συμπεριφορά του φάσματος συχνοτήτων στο σημείο μηδέν και στις υψηλές συχνότητες.

Η εργασία αυτή μπορεί να αξιοποιηθεί στις μεταλλευτικές διασκοπήσεις όπου εκδηλώνονται ανωμαλίες φυσικού δυναμικού, στο βαθμό που παράγονται από διπολικές κατανομές ηλεκτρικού φορτίου.

A SPECTRUM ANALYSIS METHOD FOR QUANTITATIVE
INTERPRETATION OF SP ANOMALIES DUE TO A THIN POLARIZED
INCLINED SHEET

G.Ai.Skianis* T.D.Papadopoulos* D.A.Vaiopoulos**

Summary

Spectrum analysis methods have been used in a limited scale in interpreting SP anomalies, although it is possible by studying the behaviour of frequency spectrum curves to get valuable information about the parameters of charge distribution which produces the SP anomaly.

This work is the result of our effort to present a more complete elaboration of the parameters which are related to the frequency spectrum of SP anomalies.

In this paper a new method is introduced for quantitative interpretation of electric potential anomalies, which are produced from a thin polarized inclined sheet, based on the behaviour of the frequency spectrum at point zero and higher frequencies.

The results of this paper can be useful in mineral prospecting investigations, in areas where SP anomalies have been detected and can be simulated to the potential field produced by an inclined polarized body (dike-like) at depth.

* Πανεπιστήμιο Αθηνών, Τομέας Γεωφυσικής-Γεωθερμίας
University of Athens, Geophysics-Geothermy Division

** Πανεπιστήμιο Αθηνών, Τομέας Γεωγραφίας-Κλιματολογίας
University of Athens, Geography-Climatology Division

(α) ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Η ανάλυση συχνοτήτων για την ερμηνεία ανωμαλιών υπαίθρου εφαρμόζεται συχνά στη βαρυτομετρία και μαγνηταμετρία και υπάρχουν αρκετές εργασίες που αφορούν στο αντικείμενο αυτό (Dean 1958, Bhattacharyya 1966, Odegard and Berg 1965, Bhimasankaram κ.α. 1977 και άλλων ερευνητών). Οι ανωμαλίες όμως φυσικού δυναμικού που οφείλονται σε κεκλιμένα λεπτά φύλλα έχουν μελετηθεί πολύ λιγότερο. Στη διεθνή βιβλιογραφία, από όσο γνωρίζουμε, υπάρχουν μόνο δυο εργασίες που αναφέρονται σε μεθόδους για την ερμηνεία τέτοιων ανωμαλιών (Rao κ.α. 1982, Rao and Mohan 1984). Στην παραύσα εργασία επισημαίνονται ορισμένα χαρακτηριστικά του φάσματος συχνοτήτων της καμπύλης φυσικού δυναμικού που παράγεται από κεκλιμένο λεπτό φύλλο και στη συνέχεια, με βάση τα χαρακτηριστικά αυτά, εκτίθεται μια μέθοδος ποσοτικού προαδιορισμού των παραμέτρων που καθορίζουν την ανωμαλία φυσικού δυναμικού.

(β) ΜΕΛΕΤΗ ΤΟΥ ΦΑΣΜΑΤΟΣ ΣΥΧΝΟΤΗΤΩΝ

Θεωρούμε ανωμαλία φυσικού δυναμικού $V(x)$, που παράγεται από δύο παράλληλες γραμμές αρνητικού και θετικού φορτίου, πυκνότητας $-I$ και $+I$ αντίστοιχα, οι οποίες είναι κάθετες στο κατακόρυφο επίπεδο, στο οποίο ανήκουν οι άξονες x και $V(x)$ (βλ.σχ.1). Η έκφραση για το $V(x)$ είναι η:

$$V(x) = M \ln \frac{x^2 + h^2}{(x-a)^2 + H^2} \quad (\text{Rao-Ram Babu, 1983}) \quad (1)$$

Τα x , a , h , H , καθώς και η γωνία κλίσης θ παριστάνονται στο σχ.1. Το M είναι η πόλωση του κεκλιμένου λεπτού φύλλου και έχει διαστάσεις δυναμικού. Ο μετασχηματισμός Fourier του $V(x)$ δίνεται από τη σχέση

$$U(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} V(x) e^{-i\omega x} dx \quad (\text{Spiegel, 1978}) \quad (2)$$

Σύμφωνα με τους Rao κ.α. (1982), το $V(x)$ της σχέσης (1), μετασχηματιζόμενο κατά Fourier (θέτοντας M αντί για $\frac{I\rho}{2\pi}$) δίνει:

$$U(\omega) = R(\omega) + iX(\omega) \quad (3)$$

$$R(\omega) = \frac{2\pi M}{\omega} \{ e^{-\omega H} \cos(a\omega) - e^{-\omega h} \} \quad (4)$$

$$X(\omega) = -\frac{2\pi M}{\omega} e^{-\omega H} \sin(a\omega) \quad (5)$$

Οι αρνητικές τιμές του ω δεν έχουν καμμία φυσική σημασία στο πρόβλημα που διαπραγματευόμαστε, οπότε σε όλες τις σχέσεις θέτουμε $\omega > 0$.

Η φάση $\Phi(\omega)$ δίνεται από τη σχέση:

$$\Phi(\omega) = \arctan \left\{ \frac{X(\omega)}{R(\omega)} \right\} \quad (4) \rightarrow (5) \quad \Phi(\omega) = \arctan \left\{ \frac{-e^{-\omega H} \sin(a\omega)}{e^{-\omega h} \cos(a\omega) - e^{-\omega h}} \right\}$$

Και αν διαρέσουμε αριθμητή και παρονομαστή με $-e^{-\omega h}$ και δεδομένου ότι $H = h + P$ (βλ.σχ.1), καταλήγουμε ότι:

$$\Phi(\omega) = \arctan \left\{ \frac{e^{-\omega P} \sin(a\omega)}{1 - e^{-\omega P} \cos(a\omega)} \right\} \quad (6)$$

Το φάσμα πλάτων (amplitude spectrum) $A(\omega)$ δίνεται από τη σχέση:

$$A(\omega) = \{R^2(\omega) + X^2(\omega)\}^{\frac{1}{2}} \quad (4) \rightarrow (5) \quad (7a)$$

$$\rightarrow A(\omega) = \frac{2\pi M}{\omega} \{e^{-2\omega H} + e^{-2\omega h} - 2e^{-\omega(H+h)} \cos(a\omega)\}^{\frac{1}{2}} \quad (7)$$

Στο σχήμα 2 και σχήμα 3 έχουμε μια εικόνα της συμπεριφοράς των A και Φ ως προς ωh και ω αντίστοιχα. Στο σχ.2 παρατηρούμε ότι το $A(\omega)$ πρακτικά μηδενίζεται (αποσβέννεται) για $\omega_{0,A}$ τέτοια ώστε:

$$\omega_{0,A} \cdot h = 3.5 \text{ rad} \quad (8)$$

Η φάση $\Phi(\omega)$ είναι περιοδική συνάρτηση ως προς ω και, όπως συνάγεται από την (6), μηδενίζεται στις θέσεις εκείνες για τις οποίες ισχύει:

$$a\omega = k\pi, \quad k \text{ φυσικός αριθμός}$$

Ωστόσο, από τη σχέση (6) παρατηρούμε ότι για $\omega P = 5$ ισχύει ότι:

$$e^{-\omega P} \sin(a\omega) \approx 0 \quad \text{και} \quad 1 - e^{-\omega P} \cdot \cos(a\omega) \approx 1$$

Δηλαδή, η φάση πρακτικά μηδενίζεται (αποσβέννεται) για τη συχνότητα $\omega_{0,\Phi}$ που ικανοποιεί τη σχέση:

$$P\omega_{0,\Phi} = 5 \text{ rad} \quad (9)$$

(και φυσικά για κάθε ω μεγαλύτερο του $\omega_{0,\Phi}$)

θα πρέπει επίσης να σημειωθεί ότι:

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} \Phi(\omega) = \frac{\pi}{2} - \theta \quad (\text{Rao κ.α., 1982}) \quad (10)$$

και ότι

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} A(\omega) = \frac{2\pi M(H-h)}{\sin \theta}$$

οπότε, δυνάμει του σχ.1, το παραπάνω όριο θα ισούται με:

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} A(\omega) = 2\pi M \sqrt{a^2 + P^2} \quad (11)$$

θα δείξουμε όμως ότι η συνάρτηση $A(\omega)$ είναι ασυνεχής για $\omega = 0$. Έχουμε:

$$A(0) = |U(0)| \quad (12)$$

Όμως, με βάση τη σχέση (2), συνάγεται ότι:

$$U(0) = \int_{-\infty}^{\infty} V(x) dx \quad (1)$$

$$\rightarrow U(0) = M \int_{-\infty}^{\infty} \{\ln(x^2+h^2) - \ln((x-a)^2+H^2)\} dx \quad (13)$$

$$\text{Όμως } \int \ln(x^2+h^2) dx = x \ln(x^2+h^2) - 2x + 2h \operatorname{arctan} \frac{x}{h} \quad (\text{Spiegel, 1976}) \quad (14)$$

$$\text{Επίσης } \int \ln((x-a)^2+H^2) dx = (x-a) \ln((x-a)^2+H^2) - 2(x-a) + 2H \operatorname{arctan} \frac{x-a}{H} \quad (15)$$

Από τις (14) και (15) έχουμε:

$$\begin{aligned} \int \ln(x^2+h^2) dx - \int \ln((x-a)^2+H^2) dx &= x \ln \frac{x^2+h^2}{(x-a)^2+H^2} + a \ln((x-a)^2+H^2) - 2a + \\ &+ 2h \operatorname{arctan} \frac{x}{h} - 2H \operatorname{arctan} \frac{x-a}{H} \end{aligned}$$

ήτοι:

$$\begin{aligned} \int \ln(x^2+h^2) dx - \int \ln((x-a)^2+H^2) dx &= \ln \frac{(x^2+h^2)^x}{((x-a)^2+H^2)^{x-a}} - 2a + 2h \operatorname{arctan} \frac{x}{h} - \\ &- 2H \operatorname{arctan} \frac{x-a}{H} \end{aligned}$$

Επομένως

$$\begin{aligned} &\int_{-\infty}^{\infty} \ln(x^2+h^2) dx - \int_{-\infty}^{\infty} \ln((x-a)^2+H^2) dx = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln \frac{(x^2+h^2)^x}{((x-a)^2+H^2)^{x-a}} - \lim_{x \rightarrow -\infty} \ln \frac{(x^2+h^2)^x}{((x-a)^2+H^2)^{x-a}} + 2h \lim_{x \rightarrow +\infty} \operatorname{arctan} \frac{x}{h} - \\ &- 2h \lim_{x \rightarrow -\infty} \operatorname{arctan} \frac{x}{h} - 2H \lim_{x \rightarrow +\infty} \operatorname{arctan} \frac{x-a}{H} + 2H \lim_{x \rightarrow -\infty} \operatorname{arctan} \frac{x-a}{H} \end{aligned}$$

$$\text{Και δεδομένου ότι: } \lim_{x \rightarrow +\infty} \operatorname{arctan} \frac{x}{h} = \frac{\pi}{2}, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \operatorname{arctan} \frac{x-a}{H} = \frac{\pi}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \operatorname{arctan} \frac{x}{h} = -\frac{\pi}{2}, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \operatorname{arctan} \frac{x-a}{H} = -\frac{\pi}{2}$$

συνάγεται:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \ln(x^2+h^2) dx - \int_{-\infty}^{\infty} \ln((x-a)^2+H^2) dx = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln \frac{(x^2+h^2)^x}{((x-a)^2+H^2)^{x-a}} - \lim_{x \rightarrow -\infty} \ln \frac{(x^2+h^2)^x}{((x-a)^2+H^2)^{x-a}} + 2\pi(h-H)$$

ή

$$\int_{-\infty}^{\infty} \ln(x^2+h^2) dx - \int_{-\infty}^{\infty} \ln((x-a)^2+H^2) dx = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\ln \frac{(x^2+h^2)^x}{((x-a)^2+H^2)^{x-a}} - \ln \frac{(x^2+h^2)^{-x}}{((x+a)^2+H^2)^{-(x+a)}} + 2\pi(h-H) \right]$$

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} \ln(x^2+h^2) dx - \int_{-\infty}^{\infty} \ln((x-a)^2+H^2) dx = \\ & = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln \left[\frac{(x^2+h^2)^x}{((x-a)^2+H^2)^x} \cdot \frac{(x^2+h^2)^x}{((x+a)^2+H^2)^x} \cdot \frac{((x-a)^2+H^2)^a}{((x-a)^2+H^2)^a} \right] - 2\pi P \end{aligned} \quad (16)$$

$$\text{Ομως } \frac{(x^2+h^2)^x}{((x-a)^2+H^2)^x} = \left[\frac{1 + \frac{h^2}{x^2}}{\left(1 - \frac{a}{x}\right)^2 + \frac{H^2}{x^2}} \right]^x \quad \text{οπότε για } x \rightarrow +\infty$$

η κλασματική παράσταση του 2ου μέλους της παραπάνω ιδιότητας τείνει στη μονάδα, με αποτέλεσμα να έχουμε:

$$\left[\frac{1 + \frac{h^2}{x^2}}{\left(1 - \frac{a}{x}\right)^2 + \frac{H^2}{x^2}} \right]^x = 1, \quad \text{για } x \rightarrow +\infty$$

$$\text{Δηλαδή } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x^2+h^2)^x}{((x-a)^2+H^2)^x} = 1 \quad (17)$$

Με ανάλογους συλλογισμούς αποδεικνύεται επίσης ότι:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x^2+h^2)^x}{((x+a)^2+H^2)^x} = 1 \quad (18)$$

$$\text{και } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{((x-a)^2+H^2)^a}{((x+a)^2+H^2)^a} = 1 \quad (19)$$

Από τις (16), (17), (18), (19) συνάγεται ότι:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \ln(x^2+h^2) dx - \int_{-\infty}^{\infty} \ln((x-a)^2+H^2) dx = -2\pi P$$

Και αν λάβουμε υπόψη μας τις (12) και (13) έχουμε:

$$A(0) = M \cdot 2\pi P \quad (20)$$

Επομένως, από τις (11) και (20) συμπεραίνουμε ότι

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} A(\omega) \neq A(0) \quad (21)$$

Η παραπάνω σχέση (21) δείχνει την ασυνέχεια της $A(\omega)$ στο σημείο 0. Η ασυνέχεια της συνάρτησης του φάσματος πλατών στη συχνότητα μηδέν θα πρέπει να ληφθεί υπόψη σε περίπτωση που επιδιώκουμε να προσδιορίσουμε τις παραμέτρους του κεκλιμένου λεπτού φύλλου, εξετάζοντας τη συμπεριφορά της $A(\omega)$ για $\omega = 0$. Ένα άλλο ενδιαφέρον σημείο είναι ότι, όπως φαίνεται και στο σχ.2, η καμπύλη $A(\omega)$ τείνει να γίνει ευθεία για τις τιμές του ωh που πλησιάζουν το 0 (και που γενικά είναι μικρότερες της μονάδας).

Αυτό μπορεί να δικαιολογηθεί προσεγγίζοντας τη συνάρτηση $A(\omega)$ με σειρές Taylor

και παρολείποντας τους όρους εκείνους που προσδίδουν μια μη γραμμική συμπεριφορά στο φάσμα πλατών, θεωρώντας ότι αυτοί έχουν πολύ μικρή απόλυτη τιμή για μικρές τιμές του ωh (βλ. ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ).

(γ) ΠΟΣΟΤΙΚΗ ΕΡΜΗΝΕΙΑ ΤΗΣ ΑΝΩΜΑΛΙΑΣ ΦΥΣΙΚΟΥ ΔΥΝΑΜΙΚΟΥ
(ΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΜΟΣ ΤΩΝ ΠΑΡΑΜΕΤΡΩΝ h, H, a)

Από τις (11) και (20) συνάγεται ότι:

$$\frac{A(0)}{\lim_{\omega \rightarrow 0} A(\omega)} = \frac{P}{\sqrt{a^2 + P^2}},$$

όμως από το σχ.1 έχουμε $P = T_2 T_3$ και $T_1 T_3 = \sqrt{a^2 + P^2}$, οπότε $\sin \theta = \frac{P}{\sqrt{a^2 + P^2}}$,

ήτοι $\frac{A(0)}{\lim_{\omega \rightarrow 0} A(\omega)} = \sin \theta$ (22)

Επομένως, $\theta = \arcsin \left\{ \frac{A(0)}{\lim_{\omega \rightarrow 0} A(\omega)} \right\}$ (23)

Κατά συνέπεια, σημειώνοντας το $A(0)$ στο φάσμα πλατών και προσδιορίζοντας το $\lim_{\omega \rightarrow 0} A(\omega)$ μπορούμε, με βάση τις (22) και (23), να υπολογίσουμε τα $\sin \theta$ και θ αντίστοιχα.

Όσο για το φάσμα φάσης (phase spectrum) είναι γεγονός ότι οι τιμές που παίρνουμε από αριθμητική λύση (υπολογιστής) απέχουν πολύ από τις θεωρητικά προβλεπόμενες, καθώς οι πρώτες παρουσιάζουν πολύ απότομες διακυμάνσεις και χρειάζεται μια πολύ πυκνή δειγματοληψία (sampling) και σε μεγάλο εύρος του προφίλ φυσικού δυναμικού, ώστε να έχουμε μια ικανοποιητική αριθμητική προσέγγιση της φάσης. Ωστόσο, για $\omega P = 5$ οι διακυμάνσεις παύουν και η τεθλασμένη γραμμή γίνεται σχεδόν ευθεία. Επαληθεύεται δηλαδή η θεωρητική πρόβλεψη για απόσβεση της καμπύλης της φάσης για $\omega P = 5 \text{ rad}$.

Οπότε, αν στο φάσμα συχνοτήτων $\Phi(\nu)$ σημειώσουμε τη συχνότητα $\nu_{0,\phi}$ για την οποία παύουν οι απότομες διακυμάνσεις, τότε με βάση την (9) έχουμε ότι

$$P \cdot 2\pi \nu_{0,\phi} = 5, \quad \text{ήτοι} \quad P = \frac{2.5}{\pi \nu_{0,\phi}} \quad (24)$$

από την οποία προσδιορίζεται το P .

Από το σχ.1 όμως έχουμε: $a^2 = T_1 T_3^2 - P^2 = \left(\frac{P}{\sin \theta} \right)^2 - P^2 \rightarrow a = \sqrt{\left(\frac{P}{\sin \theta} \right)^2 - P^2}$ (25)

και γνωρίζοντας ήδη το P από την (24) και τη θ από την (23) υπολογίζουμε το a .

Από το φάσμα πλατών, σημειώνοντας τη συχνότητα πρακτικού μηδενισμού $\nu_{0,A}$ και έ-

χοντας υπόψη την (8), έχουμε ότι:

$$2\pi\nu_{o,A} \cdot h = 3.5, \quad \text{ήτοι} \quad h = \frac{1.75}{\pi\nu_{o,A}} \quad (26)$$

Εξ άλλου, από τις (24) και (25) και το σχ.1, προσδιορίζουμε και το H από τη σχέση:

$$H = P + h \quad (27)$$

Για την εύρεση του $\lim_{\omega \rightarrow 0} A(\omega)$ θα λάβουμε υπόψη τη γραμμική συμπεριφορά του φάσματος πλατών για μικρές συχνότητες, δηλαδή σε ένα τέτοιο φάσμα εντοπίζουμε το σύνολο των σημείων που αντιστοιχούν σε συχνότητες κοντά στο μηδέν και που είναι σχεδόν ευθειακά και από τα σημεία εκείνα μπορούμε γραφικά ή με τη μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων να προσδιορίσουμε το σημείο τομής του άξονα των τεταγμένων με την ευθεία που προσεγγίζει το $A(\omega)$ για τις χαμηλές συχνότητες. Το $\lim_{\omega \rightarrow 0} A(\omega)$ θα είναι ίσο με την απόσταση των σημείων τομής από την αρχή των αξόνων.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Θεωρούμε πολωμένο και λεπτό κεκλιμένο φύλλο με $M = 100\text{mV}$, $h = 10\text{m}$, $H = 20\text{m}$, $a = 21.445\text{m}$ (δηλ. $\theta = 25^\circ$). Στο αριθμητικά προσδιορισμένο φάσμα πλατών (σχ.4) σημειώνουμε τη συχνότητα πρακτικού μηδενισμού $\nu_{o,A} = 7 \times 0.0078 \text{ c/m}$ και συνάμει της (26) βρίσκουμε ότι:

$$h = 10.20\text{m} \quad (27a)$$

Σημειώνουμε επίσης ότι:

$$A(0) = 6438 \text{ mV} \quad (28)$$

$$\text{και ότι} \quad \lim_{\omega \rightarrow 0} A(\omega) = 14700 \text{ mV} \quad (29)$$

(με βάση τα τρία πρώτα μετά το $A(0)$ σημεία του φάσματος, που είναι σχεδόν ευθειακά).

Από τις (22), (23), (28), (29) έχουμε:

$$\sin\theta = 0.43795 \quad \rightarrow \quad \theta = 25.97 \quad (30)$$

Στο φάσμα φάσης (σχ.5) παρατηρούμε ότι για $\nu_{o,\varphi} = 20 \times 0.00391 \text{ c/m}$ παύουν οι έντονες διακυμάνσεις (έχουμε δηλαδή απόσβεση), οπότε συνάμει της (24) βρίσκουμε ότι

$$P = 10.18\text{m} \quad (31)$$

Από (27), (27a) και (31) έχουμε

$$H = 20.38\text{m} \quad (31a)$$

Και από τις (25), (30) και (31) βρίσκουμε ότι

$$a = 20.90\text{m}$$

Για τον προσδιορισμό του φάσματος συχνοτήτων πήραμε 512 τιμές του προφίλ φυσι-

κού δυναμικού $V(x)$, ανά $1m$, και στη συνέχεια αναλύσαμε κατά Fourier αυτό το σημειοσύνολο με ένα σύντομο μετασχηματισμό Fourier (FFT).

(δ) ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

σ. Σημειώνουμε ότι, για το σωστό προσδιορισμό του $A(0)$ θα πρέπει να έχει πρώτα βρεθεί η μηδενική στάθμη της ανωμαλίας φυσικού δυναμικού-για το σκαπό αυτόν απομακρύνεται απαισαδήςποτε συνεχής συνιστώσα στην καμπύλη $V(x)$ - και ως προς αυτή τη μηδενική στάθμη θα αναχθούν οι τιμές φυσικού δυναμικού.

β. Αν $\theta = \frac{\pi}{2}$ το αρνητικό κέντρο της ανωμαλίας φυσικού δυναμικού δεν είναι ακριβώς κάτω από τα σημεία 0 της τομής των αξόνων, αλλά απέχει κατά x_m από αυτό και η μετατόπιση είναι προς την αντίθετη πλευρά της θετικής ανωμαλίας (βλ. σχ.1). Κατά συνέπεια για να εντοπισθεί η θέση της άνω οριζόντιας πλευράς του κεκλιμένου λεπτού φύλλου, θα πρέπει να γίνει η γεώτρηση σε σημείο που απέχει κατά x_m από τη θέση ελαχίστου της θετικής ανωμαλίας και με κατεύθυνση προς το θετικό μέγιστο.

Η θέση x_m προσδιορίζεται από τη λύση της εξίσωσης

$$\begin{aligned} \left(M \ln \frac{x^2+h^2}{(x-a)^2+H^2} \right)'_x &= 0 \rightarrow \left(\ln \frac{x^2+h^2}{(x-a)^2+H^2} \right)'_x = 0 \rightarrow \\ &\rightarrow \frac{(x-a)^2+H^2}{x^2+h^2} \cdot \left(\frac{x^2+h^2}{(x-a)^2+H^2} \right)'_x = 0 \rightarrow \left(\text{κοι επειδή } \frac{(x-a)^2+H^2}{x^2+h^2} \neq 0 \right) \\ &\rightarrow \left(\frac{x^2+h^2}{(x-a)^2+H^2} \right)'_x = 0 \rightarrow 2x((x-a)^2+H^2) - (x^2+h^2) \cdot 2(x-a) = 0 \rightarrow \\ &\rightarrow ax^2 - (a^2+H^2-h^2)x - h^2a = 0 \end{aligned} \quad (32)$$

Η παραπάνω δευτεροβάθμια εξίσωση (32) έχει γενικά δύο πραγματικές ρίζες, γιατί οι συντελεστές του τριωνύμου καθιστούν τη διακρίνουσά του πάντοτε μεγαλύτερη ή ίση με το μηδέν, δηλαδή $\Delta \geq 0$.

Οι λύσεις της (32) δίνονται από τον τύπο

$$x_{m, \pm} = \frac{a^2+H^2-h^2 \pm \sqrt{(a^2+H^2-h^2)^2+4a^2h^2}}{2a}$$

Σαν x_m θα παίρνουμε τη ρίζα με τη μικρότερη απόλυτη τιμή. Στη συνέχεια, θα μετατοπιζόμαστε από τη θέση της αρνητικής κορυφής κατά x_m , με κατεύθυνση τη θέση της θετικής ανωμαλίας και εκεί (σημείο 0) το βάθος της κορυφής του διπλού θα είναι το h που προσδιορίσαμε.

Πάντως, το x_m έχει γενικά μικρές τιμές. Αν π.χ. $h = 10m$, $H = 20m$, $a = 21.455m$ (δηλ.

$\theta = 25^\circ$), τότε $x = -2.63\pi$. Πρόκειται δηλαδή για μια μετατόπιση ασήμαντη για τα δεδομένα της μεταλλευτικής έρευνας.

γ. Αν στο $A(\omega)$ διαπιστωθεί ότι $\lim_{\omega \rightarrow 0} A(\omega) = A(0)$, τότε από την (23) συνάγεται ότι $\theta = \pi/2$ (άρα $a = 0$). Σε μια τέτοια περίπτωση, από την (5) φαίνεται ότι, η φανταστική συνιστώσα μηδενίζεται, οπότε και η φάση $\Phi(\omega)$ έχει τη σταθερή τιμή μηδέν, με αποτέλεσμα το κριτήριο απόσβεσης (σχέση (9)), για τον προσδιορισμό του P να μην είναι αξιόπιστο, οπότε, για να προσδιορίσουμε το P , θα λάβουμε υπόψη ότι, με βάση την (7) και για $a = 0$, ισχύει

$$A(\omega) = \frac{2\pi M}{\omega} e^{-h\omega}(1 - e^{-\omega P}) \quad (32\alpha)$$

Για $\omega h = 1$, θα έχουμε

$$A(\omega h = 1) = \frac{2\pi M}{\omega} e^{-h\omega}(1 - e^{-\omega P}) \cdot \frac{h}{h} \text{ και επειδή } \omega h = 1 \rightarrow$$

$$A(\omega h = 1) = 2\pi M h e^{-1}(1 - e^{-P/h}) \xrightarrow{(20)} \frac{A(\omega h = 1)}{A(0)} = \frac{h}{P} e^{-1}(1 - e^{-P/h})$$

και αν θέσουμε $\frac{A(\omega h = 1)}{A(0)} = \lambda$ και λύσουμε ως προς $e^{-P/h}$ καταλήγουμε ότι:

$$\frac{h}{P} e^{-1}(1 - e^{-P/h}) = \lambda,$$

$$\text{ήτοι: } e^{-P/h} = 1 - \frac{\lambda e P}{h} \quad (32\beta)$$

Έχοντας προσδιορίσει το h από το φάσμα πλατών, με βάση την (8), υπολογίζουμε τη συχνότητα που πολλαπλασιάζεται επί h δίνει τη μονάδα ($\omega = \frac{1}{h}$) σημειώνοντας το αντίστοιχο πλάτος $A(\omega h = 1)$, οπότε προσδιορίζουμε το λόγο

$$\lambda = \frac{A(\omega h = 1)}{A(0)}$$

Γνωρίζοντας λοιπόν τα λ και h , μπορούμε να επιλύσουμε την (32β) ως προς P είτε με μια επαναληπτική μέθοδο της αριθμητικής ανάλυσης, είτε γραφικά (P θα είναι το σημείο τομής της καμπύλης $e^{-P/h}$ με την ευθεία $1 - \frac{\lambda e}{h} P$).

(ε) ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

Για τη διερεύνηση της συμπεριφοράς της συνάρτησης του φάσματος πλατών $A(\omega)$ στις χαμηλές συχνότητες θα χρησιμοποιήσουμε τις παρακάτω σειρές Taylor (Spiegel, 1976)

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots \quad -\infty < x < +\infty \quad (33)$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots \quad -\infty < x < +\infty \quad (34)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots \quad -\infty < x < +\infty \quad (35)$$

$$(1+x)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2 \cdot 4}x^2 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6}x^3 - \dots \quad -1 < x \leq 1 \quad (36)$$

Από τις (5), (33) και (34) και για $\omega \rightarrow 0$ συνάγεται ότι

$$\begin{aligned} x(\omega) &\approx -\frac{2\pi M}{\omega} (1-\omega H) \cdot a\omega \rightarrow \\ &\rightarrow x(\omega) \approx -2\pi M a (1-\omega H) \end{aligned} \quad (37)$$

Από τις (4), (33), (35) και για $\omega \rightarrow 0$ συνάγεται ότι:

$$\begin{aligned} R(\omega) &\approx \frac{2\pi M}{\omega} \left\{ \left((1-\omega H + \frac{\omega^2 H^2}{2}) \left(1 - \frac{a^2 \omega^2}{2} \right) - \left(1 - \omega h + \frac{\omega^2 h^2}{2} \right) \right) \right\} \rightarrow \\ &\rightarrow R(\omega) \approx \frac{2\pi M}{\omega} \left(\omega(h-H) - \omega^2 \left(\frac{a^2}{2} - \frac{H^2}{2} + \frac{h^2}{2} \right) + \omega^3 \left(\frac{Ha^2}{2} - \omega^4 \frac{H^2 a^2}{2} \right) \right) \end{aligned}$$

Και αν θέσουμε $h-H = -P$ (βλ. σχ.1) και παραλείψουμε μέσα στην αγκύλη τους όρους που έχουν παράγοντες δυνάμεις του ω τάξης μεγαλύτερης της δεύτερης, έχουμε ότι:

$$R(\omega) \approx -2\pi M P + \omega \pi M (H^2 - a^2 - h^2) \quad (38)$$

Και επειδή ισχύει

$$A(\omega) = \{R^2(\omega) + X^2(\omega)\}^{\frac{1}{2}}, \quad (38a)$$

αν θέσουμε τις (37) και (38) θα πάρουμε:

$$A(\omega) \approx \{4\pi^2 M^2 (P^2 + a^2) - 4\pi^2 M^2 \omega (PH^2 - Pa^2 - Ph^2 + 2a^2 H)\}^{\frac{1}{2}} \quad (38b)$$

Όπου παραλείψαμε μέσα στα άγκιστρα τους όρους που έχουν παράγοντες δυνάμεις του ω τάξης μεγαλύτερης της πρώτης.

Η (38b) γράφεται ακόμη

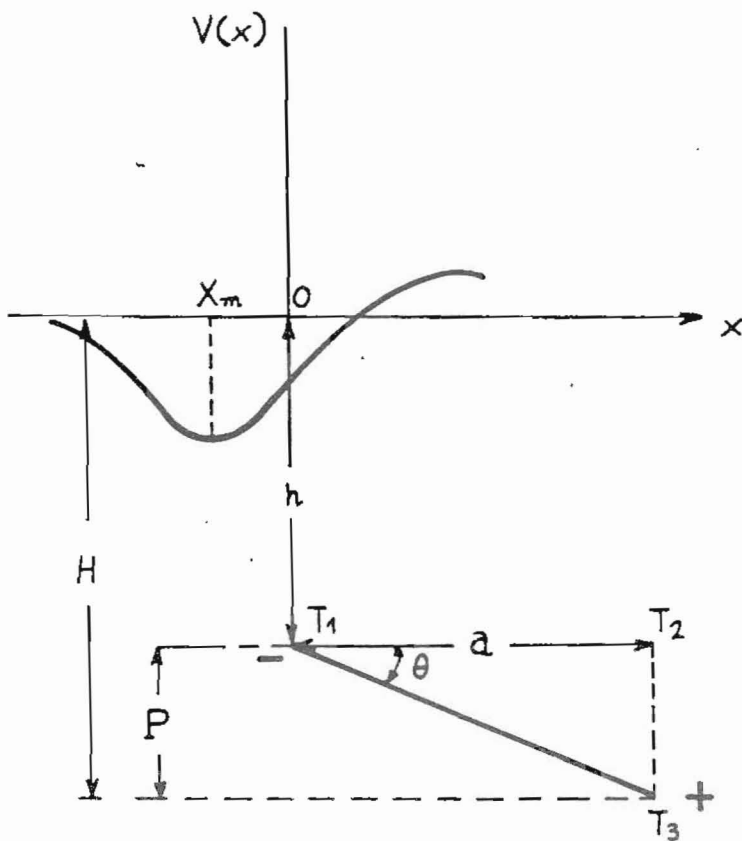
$$A(\omega) \approx 2\pi M \sqrt{P^2 + a^2} \left[1 - \omega \cdot \frac{PH^2 - Pa^2 - Ph^2 + 2a^2 H}{(P^2 + a^2)} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (39)$$

Από τις (36) και (39), δεδομένου ότι

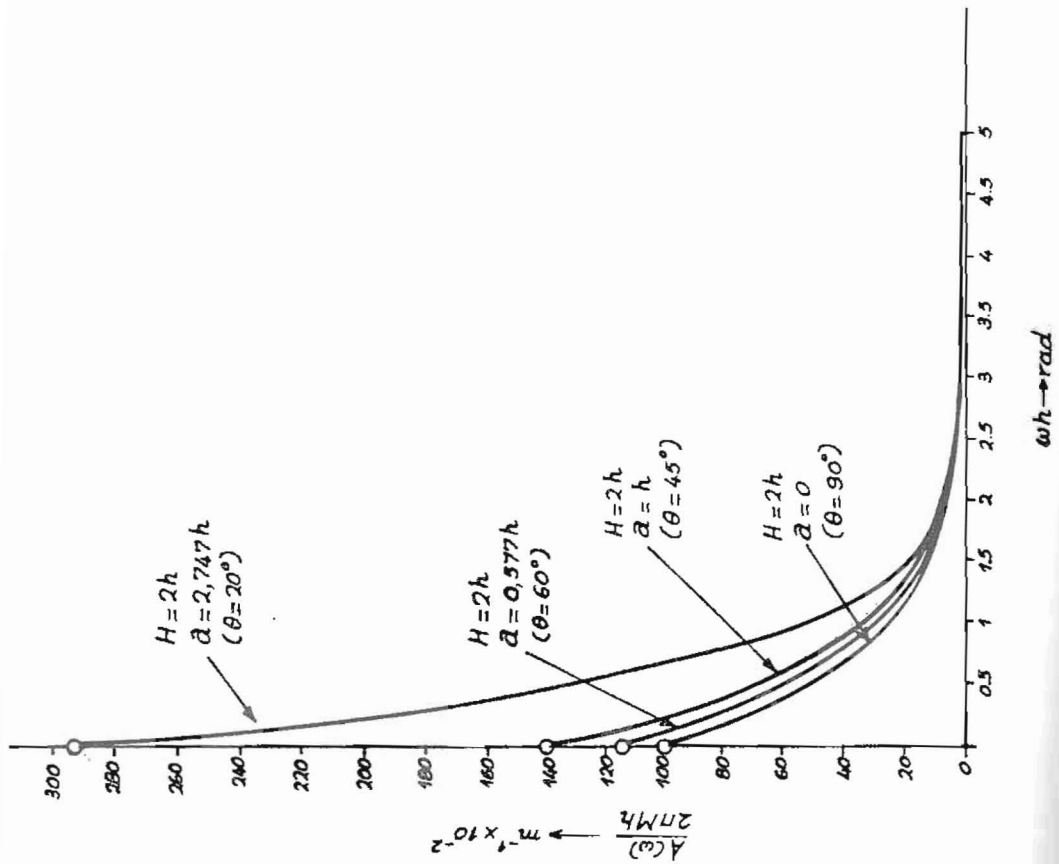
$$\omega \cdot \frac{PH^2 - Pa^2 - Ph^2 + 2a^2 H}{P^2 + a^2} \rightarrow 0 \quad \text{συνάγεται ότι:}$$

$$A(\omega) \approx 2\pi M \sqrt{P^2 + a^2} - \omega \pi M \cdot \frac{PH^2 - Pa^2 - Ph^2 + 2a^2 H}{\sqrt{P^2 + a^2}}$$

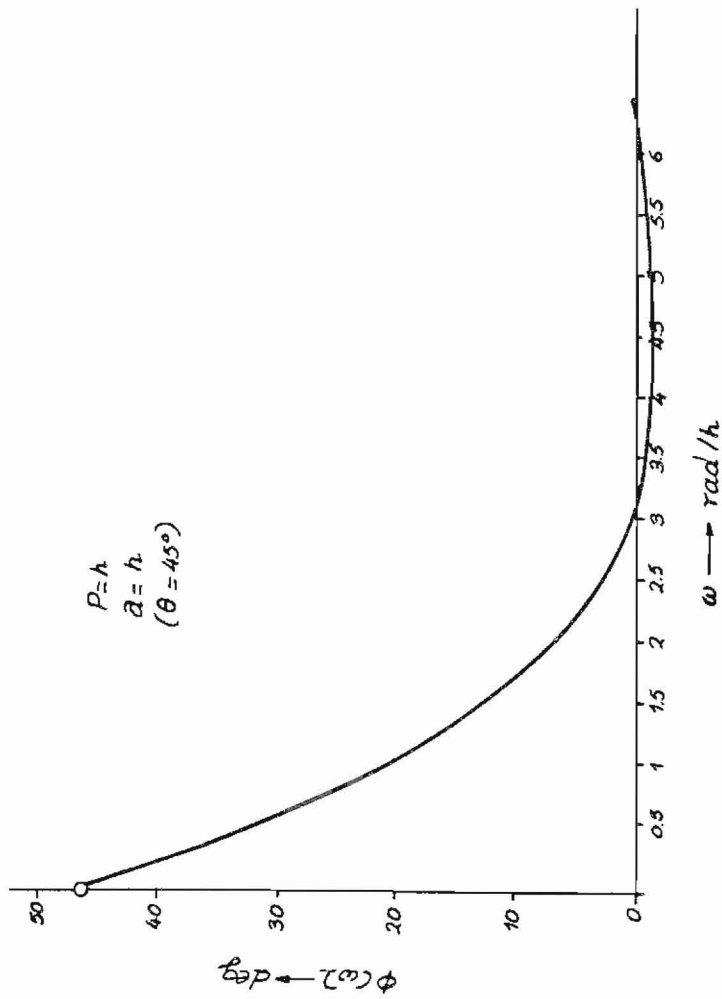
από την οποία φαίνεται ότι το $A(\omega)$ έχει γραμμική συμπεριφορά, δηλαδή η γραφική του παράσταση είναι σχεδόν ευθεία γραμμή, όταν το ω πλησιάζει στο 0.



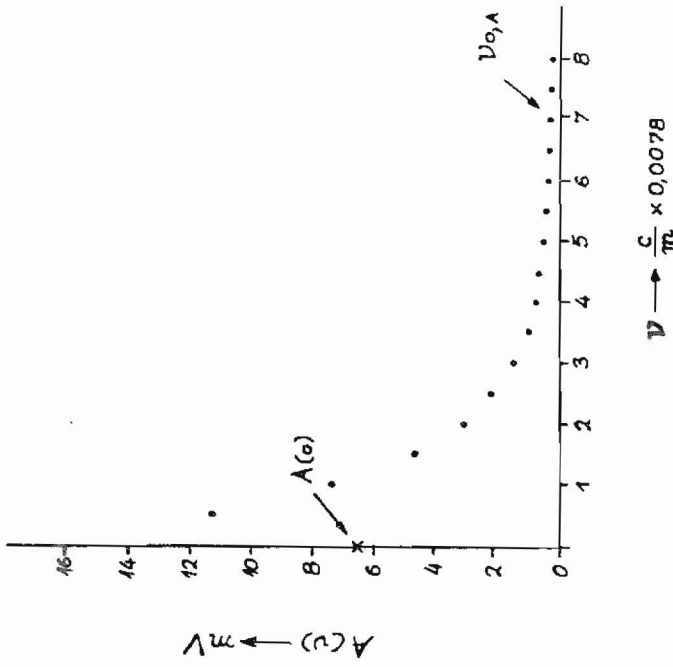
Σχ.1. Θεωρητική μαγνήτη φυσικού δυναμιού που παράγεται από υεπιμένο λεπτό φύλλο (inclined sheet) γωνίας θ σε σχέση με το οριζόντιο επίπεδο.



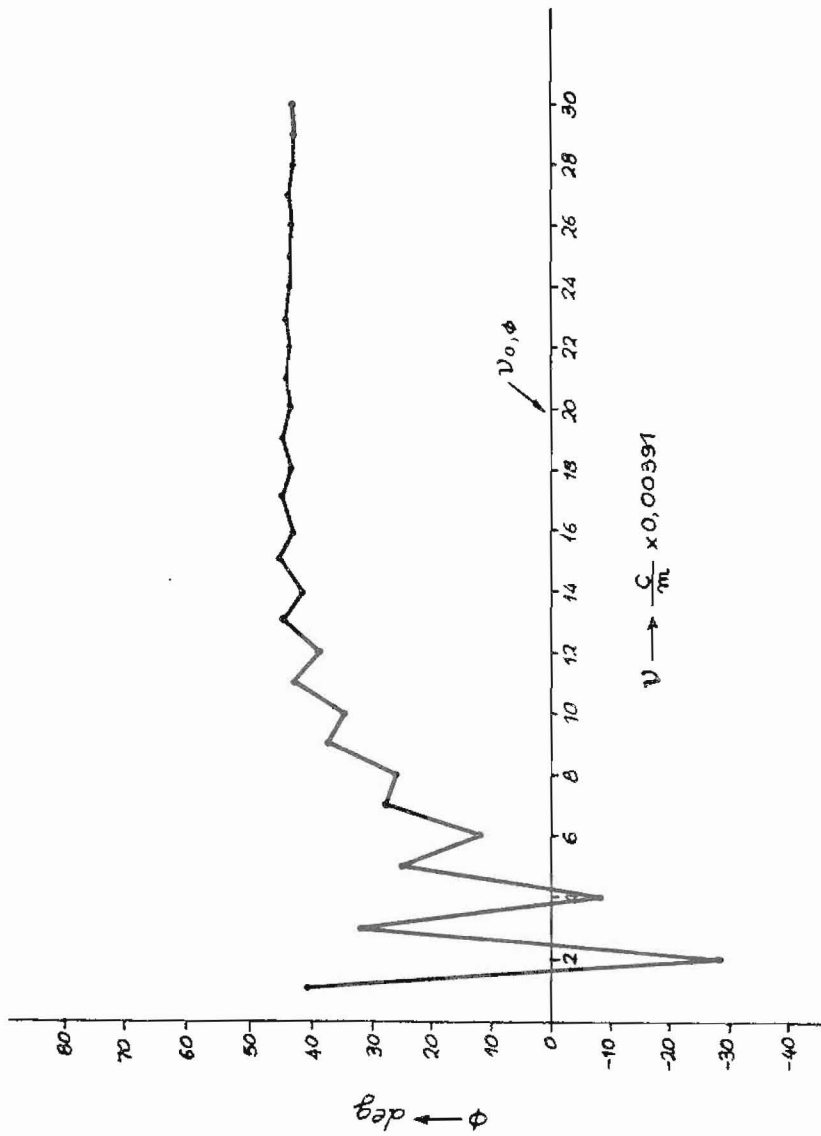
Σχ. 2 Μεταβολή του πλάτους ως προς τη ευχνότητα. Οι ανοικτοί κύκλοι δείχνουν την αυξάνεια της μαμύληλα στη ευχνότητα μηδέν.



Σχ.3 Μεταβολή της φάσης ως προς τη συχνότητα. Ο ανοικτός κύκλος δείχνει την ασυνέχεια της φασικής της συχνότητας μηδέν.



Σχ. 4 Φάσμα πλατών του συνθετικού μοντέλου του λεπτού πολυαμίνου φύλλου ($M = 100 \text{ mV}$, $h = 10 \text{ m}$, $H = 20 \text{ m}$, $a = 21.455 \text{ m}$)



Στ. 5 Φάσμα φάσας, αριθμητικά προσδιορισμένο, του ευθελτιμού μοντέλου

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

- Bhattacharyya B.K.: Continuous Spectrum of the Total Magnetic Field Anomalie due to a Rectangular Prismatic Body. *Geophysics* 31, p.97-121, 1966.
- Bhimasankaram, V.L.S., Nagendra R., Seshagiri Rao S.V.S.: Interpretation of Gravity Anomalies due to Finite Inclined Dikes using Fourier Transformation. *Geophysics* 42 (1), p.51-59, 1977.
- Dean W.: Frequency Analysis for Gravity and Magnetic Interpretation. *Geophysics* 23 (1), p.97-127, 1958.
- Odegard M.E., Berg J.W. (Jr): Gravity Interpretation Using the Fourier Integral. *Geophysics* 30 (3), p.424-438, 1965.
- Rao D.A., Ram Babu B.V., Sivakumar Sinha G.D.J.: A Fourier Transform Method for the Interpretation of self-Potential Anomalies due to Two-Dimensional Inclined Sheets of Finite Depth Extent. *PAGEOPE* 120, p.365-374, 1982.
- Rao D.A., Ram Babu B.V.: Quantitative Interpretation of Self-Potential Anomalies due to Two-Dimensional Sheet-like Bodies. *Geoph.* 48, N°12, p.1659-1664, 1983.
- Rao S.V.S., Mohan N.L.: Spectral Intepretation of Self-potential Anomaly due to an Inclined Sheet. *Current Science*, Vol.53, N°9, May 5, 1984.
- Spiegel M.R.: Μαθηματικό Τυκολόγιο. Μετάφραση Περασίδης Σ.Κ. McGraw-Hill. New York, ΕΣΠΙ Αθήνα, 1976.
- Spiegel M.R.: Ανάλυση Fourier. Μετάφραση Περασίδης Σ.Κ. McGraw-Hill. New York, ΕΣΠΙ Αθήνα, 1978.