ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

ΤΜΗΜΑ ΓΕΩΛΟΓΙΑΣ – ΤΟΜΕΑΣ ΓΕΩΦΥΣΙΚΗΣ

ΚΑΡΑΟΥΛΗΣ ΜΑΡΙΟΣ

ΔΙΣΔΙΑΣΤΑΤΗ ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΗ ΓΕΩΗΛΕΚΤΡΙΚΩΝ ΔΕΔΟΜΕΝΩΝ ΗΛΕΚΤΡΙΚΩΝ ΒΥΘΟΣΚΟΠΗΣΕΩΝ

ΕΠΙΒΛΕΠΟΝΤΕΣ ΚΑΘΗΓΗΤΕΣ
ΠΑΝ. ΤΣΟΥΡΛΟΣ, ΕΠΙΚΟΥΡΟΣ ΓΕΩΛΟΓΙΑΣ Α.Π.Θ.
ΓΡΗΓ. ΤΣΟΚΑΣ, ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ ΓΕΩΛΟΓΙΑΣ Α.Π.Θ.
Κ. ΠΑΠΑΖΑΧΟΣ, ΑΝΑΠΛΗΡΩΤΗΣ ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ Α.Π.Θ.

ΔΙΑΤΡΙΒΗ ΕΙΔΙΚΕΥΣΗΣ

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ ΤΜΗΜΑΤΟΣ ΓΕΩΛΟΓΙΑΣ
ΕΙΔΙΚΕΥΣΗ : ΓΕΩΦΥΣΙΚΗ

Περιεχόμενα

Ευχαριστίες

Θα ήθελα να ευχαριστήσω τον κύριο επιβλέποντα της διατριβής κ. Παν. Τσούρλο, Επίκουρο Καθηγητή του Τομέα Γεωφυσικής του Α.Π.Θ. Τον ευχαριστώ για την ανάθεση του θέματος, την καθοδήγηση του σε επιστημονικά θέματα, την παραχώρηση ολόκληρου του πηγαίου κώδικα του αλγορίθμου του και για τις ουσιαστικές παρατηρήσεις και συμβουλές του, καθώς επίσης και για την οικονομική υποστήριξη που μου παρείχε.

Επίσης, ευχαριστώ θερμά τον κ. Γρηγ. Τσόκα, Καθηγητή του Τομέα Γεωφυσικής του Α.Π.Θ. Τον ευχαριστώ για την καθοδήγηση και για τις ουσιαστικές παρατηρήσεις και υποδείξεις του, καθώς και για την οικονομική υποστήριξη που μου παρείχε.

Επιπλέον ευχαριστώ θερμά τον κ. Κ. Παπαζάχο Αναπληρωτή Καθηγητή του Τομέα Γεωφυσικής, για για τις ουσιαστικές υποδείξεις και προτάσεις του σε επιστημονικά θέματα. Χωρίς την βοήθεια του η εργασία αυτή δεν θα μπορούσε να ολοκληρωθεί.

Ιδιαίτερες ευχαριστίες οφείλω στον Γ. Βαργεμέζη, Λέκτορα του τομέα Γεωφυσικής του Α.Π.Θ. για τις συμβουλές του και την οικονομική υποστήριξη που μου παρείχε.

Επίσης, θα ήθελα να ευχαριστήσω όλα τα μέλη του Τομέα Γεωφυσικής καθώς και στους μεταπτυχιακούς φοιτητές για τη βοήθεια που προσέφεραν, ο καθένας με το δικό του τρόπο.

Τέλος ένα μεγάλο ευχαριστώ οφείλω στον συνάδελφο μου Πετ. Μπογιατζή, για τις ατελείωτες συζητήσεις γύρω από επιστημονικά θέματα και την ανταλλαγή απόψεων.

Κεφάλαιο 1

Εισαγωγή

1.1 Αντικείμενο διατριβής

Οι γεωφυσικές μέθοδοι χρησιμοποιούνται για την μελέτη της υπόγειας δομής της γης. Υπάρχουν διάφορες μέθοδοι που μετρούν μια συγκεκριμένη ιδιότητα του εδάφους, όπως παραδείγματος χάρη την μαγνητική επιδεκτικότητα, την ταχύτητα διάδοσης κυμάτων ή την αγωγιμότητα του εδάφους. Η παρούσα διατριβή θα ασχοληθεί με μια συγκεκριμένη γεωφυσική μέθοδο, τη μέθοδο της ηλεκτρικής αντίστασης που έχει ως σκοπό την καταγραφή της κατανομής της ηλεκτρικής αντίστασης του υπεδάφους. Όπως κάθε γεωφυσική μέθοδος, έτσι και η μέθοδος της ηλεκτρικής αντίστασης παρουσιάζει δυσκολίες στην ερμηνεία της καθώς δεν υπάρχει μονοσήμαντη σχέση μεταξύ της λιθολογίας και αντίστασης όπως θα αναλυθεί στο κεφάλαιο 1.

Μία δεύτερη δυσκολία εμφανίζεται στην απόδοση ενός μοναδικού γεωηλεκτρικού μοντέλου που ανταποκρίνεται στις μετρήσεις που λαμβάνονται. Στην ηλεκτρική μέθοδο, όπως και στις περισσότερες γεωφυσικές μεθόδους, η λήψη των μετρήσεων γίνεται επιφανειακά με διατάξεις πολλαπλών ηλεκτροδίων. Η διαδικασία εύρεσης του γεωηλεκτρικού μοντέλου από τις επιλεχθείσες μετρήσεις ονομάζεται αντιστροφή. Υπάρχουν δύο μέθοδοι αντιστροφής, οι προσεγγιστικές και οι ακριβείς. Η παρούσα διατριβή θα ασχοληθεί μόνο με τις ακριβείς μεθόδους χρησιμοποιώντας ταυτόχρονα και σύγχρονες τεχνικές που θα αναπτυχθούν στα κεφάλαια 2 και 3.

Ένα πολύ σημαντικό βήμα στην όλη διαδικασία της αντιστροφής, είναι η επίλυση του ευθέως προβλήματος δηλαδή η εύρεση των μετρήσεων που προκύπτουν από κάποιο μοντέλο με γνωστή κατανομή αντιστάσεων. Στο βήμα αυτό είναι απαραίτητη η επίλυση των διαφορικών εξισώσεων της ροής του ηλεκτρικού ρεύματος στην ανομοιογενή γη, με την χρήση αριθμητικών μεθόδων. Στην παρούσα διατριβή έγινε χρήση της μεθόδου των πεπερασμένων στοιχείων. Οι αρχές των πεπερασμένων στοιχείων όσο και των βασικών εξισώσεων ροής του ρεύματος θα αναπτυχθούν στο πρώτο κεφάλαιο.

Αναγκαιότητα αυτής της διατριβής

Η ηλεκτρική μέθοδος είναι μια ιδιαίτερα δημοφιλείς μέθοδος με πολλές προτάσεις και αλγόριθμους από πολλούς ερευνητές. Στους αλγόριθμους αυτούς αναζητάται η κατανομή των ηλεκτρικών διαστάσεων σε διάφορες υποπεριοχές του υπεδάφους, που έχουν σταθερές διαστάσεις. Στην παρούσα διατριβή οι διαστάσεις αυτών των υποπεριοχών θεωρήθηκαν μεταβλητές, με σκοπό την καλύτερη αναπαράσταση της στρωματογραφίας μιας περιοχής και των πιθανών επιφανειών ασυνέχειας, πάντα σε σχέση με τους υπάρχοντες αλγόριθμους. Συμπληρωματικά μπορεί να γίνει εφαρμογή αυτού του αλγόριθμου σε συνδυασμένη αντιστροφή ετερογενών δεδομένων, όπως παραδείγματος χάρη σε κοινή αντιστροφή ηλεκτρικών – σεισμικών.

Η μέθοδος αυτή δεν είναι γενικής χρήσης υπό την έννοια της αντικατάστασης των υπάρχοντων αλγορίθμων, καθώς η σχεδίαση της θέτει και περιορισμούς στις δομές που μπορεί να εφαρμοστεί. Βρίσκει εφαρμογή σε περιοχές με απότομες και μεγάλες αλλαγές, όπου αναζητάται η όσο το δυνατόν καλύτερη αναπαράσταση της επιφάνειας ασυνέχειας που χωρίζει τους σχηματισμούς.

Μέθοδος που ακολουθήθηκε στην επίλυση

Η κατασκευή του αλγόριθμου βασίστηκε σε τροποποίηση του υπάρχοντος δισδιάστατου αλγόριθμου αντιστροφής 2DINVS (Tsourlos 1998), με τις κατάλληλες προσθήκες ώστε να συμπεριληφθούν στο διάνυσμα των παραμέτρων και τα πάχη αυτών. Ο συγκεκριμένος αλγόριθμος εκτελεί μια πλήρη δισδιάστατη αντιστροφή, με την επίλυση του ευθέος προβλήματος με χρήση των πεπερασμένων στοιχείων σε 2.5 διαστάσεις (τρισδιάστατη πηγή και ροή ρεύματος με δισδιάστατη κατανομή αντιστάσεων στο χώρο) και υπολογίζει τις παραγώγους των αντιστάσεων με αναλυτικό τρόπο.

Ο νέος αλγόριθμος ξαναγράφτηκε ώστε να γίνει αντικειμενοστραφής (OOP), με στόχο την ευκολία μεταβολής κάποιων χαρακτηριστικών του χωρίς την επιρροή των υπολοίπων τμημάτων του, καθώς επίσης και την επαναχρησιμοποίηση τμημάτων του σε μελλοντικές εφαρμογές.

Όλες οι νέες προσθήκες γράφηκαν από την αρχή βασιζόμενοι σε νέους αλγορίθμους που αναπτύχθηκαν για αυτήν την διατριβή.

1.2 Δομή της διατριβής

Η δομή της διατριβής ακολουθήθηκε είναι η ακόλουθη

Κεφάλαιο 2 : Στο κεφάλαιο αυτό παρουσιάζεται η βασική θεωρία της επίλυσης του ευθέος προβλήματος στην ηλεκτρική διασκόπιση ροής του ηλεκτρικού ρεύματος στην γη, για περιπτώσεις ανομοιογενούς γης, με την βοήθεια των πεπερασμένων στοιχείων, όπου αναλύονται οι βασικές αρχές τις μεθόδου καθώς και η διαδικασία της μοντελοποίησης. Τέλος εξάγονται οι βασικές σχέσεις της λύσης των διαφορικών εξισώσεων και η μορφοποίησή τους σε πίνακες για την εύκολη χρησιμοποίηση τους σε αλγόριθμους ηλεκτρονικών υπολογιστών.

Κεφάλαιο 3 : Στο κεφάλαιο αυτό αναπτύσσονται οι βασικές αρχές της θεωρίας αντιστροφής, καθώς και οι δυσκολίες που πηγάζουν από την επίλυση αυτών. Αναλύονται συνοπτικά οι μέθοδοι επίλυσης των αντίστροφων προβλημάτων και η χρήση τεχνικών, όπως SVD, για την εξαγωγή μιας χρήσιμης λύσης. Παρουσιάζονται οι διάφοροι τύποι κανονικοποίησης και η εφαρμογή τους στην εύρεση του γενικευμένου αντίστροφου. Τέλος παρουσιάζεται ο αλγόριθμος της μη γραμμικής αντιστροφής.

Κεφάλαιο 4 : Στο κεφάλαιο αυτό αναπτύσσεται αναλυτικά η προσπάθεια επίλυσης της δισδιάστατης αντιστροφής με πάχη. Γίνεται αναλυτική περιγραφή όλων των μεθόδων που δοκιμάστηκαν για την εύρεση του βέλτιστου αλγόριθμου. Αναλυτικότερα παρουσιάζονται όλοι οι συνδυασμοί των πινάκων συνάφειας που δοκιμάστηκαν σε συνδυασμό με τις μεθόδους που χρησιμοποιήθηκαν για την εύρεση του βέλτιστου πολλαπλασιαστή. Τέλος δίνεται η μεθοδολογία εύρεσης των μερικών παραγώγων δυναμικού ως προς τα πάχη και η επιλογή του βέλτιστου. Όλες οι μεθοδολογίες συνοδεύονται από πλήρη ανάλυση των ιδιοτήτων τους για την αποφυγή παράπλευρων προβλημάτων, όπως παραδείγματος χάρη της ανεξαρτησίας των παραμέτρων.

Κεφάλαιο 5 : Στο κεφάλαιο αυτό, παρουσιάζεται η εφαρμογή του αλγορίθμου που κατασκευάστηκε σε συνθετικά μοντέλα, καθώς και σχολιάζονται τα αποτελέσματα.

Κεφάλαιο 6 : Στο κεφάλαιο αυτό εφαρμόζεται ο αλγόριθμος σε πραγματικά δεδομένα και σχολιάζονται τα αποτελέσματα.

Κεφάλαιο 2

Βασικές σχέσεις ηλεκτρικού πεδίου – Πεπερασμένα στοιχεία

2.1 Ηλεκτρική αντίσταση

Η μέθοδος της ηλεκτρικής αντίστασης έχει ως σκοπό την εύρεση της κατανομής της γεωηλεκτρικής αντίστασης στο έδαφος. Αυτό επιτυγχάνεται με μετρήσεις διαφορών δυναμικού στην επιφάνεια λόγω διείσδυσης ηλεκτρικού ρεύματος στην γη. Η διαφορά αυτή του δυναμικού αντανακλά την δυσκολία ή μη ροής του ηλεκτρικού ρεύματος στο υπέδαφος, και χαρακτηρίζεται με το φυσικό μέγεθος της ειδικής ηλεκτρικής αντίστασης ρ. Η ηλεκτρική αντίσταση του υπεδάφους εξαρτάται από την λιθολογία της περιοχής και την ηλεκτρολυτική κατάσταση του. Έτσι η ειδική ηλεκτρική αντίσταση μιας κυλινδρικής περιοχής μήκους L επιφάνειας διατομής A και αντίστασης R, δίνεται από τη σχέση

$$\rho = \frac{R\,A}{L} \tag{2.1}$$

Όπου R σε ohm, L σε μέτρα και A σε τετραγωνικά μέτρα. Η μονάδα μέτρησης της ηλεκτρικής αντίστασης είναι σε ohm m.

Πρέπει να τονιστεί ότι δεν υπάρχει μονοσήμαντη αντιστοιχεία λιθολογίας και ηλεκτρικής αντίστασης. Το εύρος τιμών που μπορεί να πάρει ένας σχηματισμός είναι πολύ μεγάλο, όπως φαίνεται και από τον πίνακα 2.1, και εξαρτάται από τους εξής παράγοντες (Mc Neil 1980 και Tagg 1964)

α) Την κατανομή του υπογείου νερού, που εξαρτάται τόσο από το πέτρωμα όσο και από την εποχή των μετρήσεων

β) Χημική περιεκτικότητα του νερού σε άλατα

γ) Το ενεργό πορώδες του πετρώματος, καθώς και από την ύπαρξη πιθανών σχηματισμών

δ) Την θερμοκρασία και την πίεση

Τύπος Πετρώματος	***Εύρος αντιστάσεων***
Πυριγενές	10^{2} - 10^{6}
Ασβεστόλιθος	10^{2} - 10^{4}
Ψαμμίτης	10^{2} - 10^{3}
Έδαφος	10^{0} - 10^{1}
Ορυκτά	10^{-8} - 10^{0}

Πίνακας 2.1
Τυπικές τιμές για το εύρος αντιστάσεων
πετρωμάτων (Aitken 1974)

Αποτέλεσμα αυτού του γεγονότος είναι η δυσκολία της ερμηνείας, η οποία πρέπει να γίνεται πάντα σε σχέση με την γεωλογία της περιοχής.

2.2 Βασικές σχέσεις

Οι βασικές σχέσεις που διέπουν την ροή του ρεύματος στη γη είναι οι ακόλουθες

- Νόμος Ohm

$$J=\sigma E \tag{2.2}$$

όπου
J είναι η πυκνότητα του ρεύματος
σ είναι η αγωγιμότητα (1/ρ)
E είναι η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου

- Η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου είναι η βαθμίδα του δυναμικού V

$$E=-\nabla V \tag{2.3}$$

- Η απόκλιση της πυκνότητας ρεύματος J είναι μηδέν όταν δεν υπάρχουν πηγές στο χώρο, πράγμα που ισχύει για την γη

$$\nabla J=0 \tag{2.4}$$

Από τις σχέσεις 2.2 και 2,3

$$J=-\sigma\nabla V \tag{2.5}$$

Από τις σχέσεις 2.4 και 2.5

$$\nabla(-\sigma\nabla V)=0 \tag{2.6}$$

Η οποία μπορεί να ξαναγραφεί[1]

$$\nabla\sigma\nabla V+\sigma\nabla^{2}V=0 \tag{2.7}$$

1 Από την διανυσματική ανάλυση είναι γνωστό ότι για κάθε μονόμετρο πεδίο z και κάθε διανυσματικό πεδίο F, $\nabla(zF)=z\nabla F+\nabla zF$

Η σχέση 2.7 είναι η εξίσωση Poisson, που δείχνει την ροή ηλεκτρικού ρεύματος σε ανομοιογενή γη. Σε περίπτωση ομογενούς γη, το πρώτο μέρος της σχέσης 2.7 είναι μηδέν καθώς $\nabla \sigma = 0$, οπότε

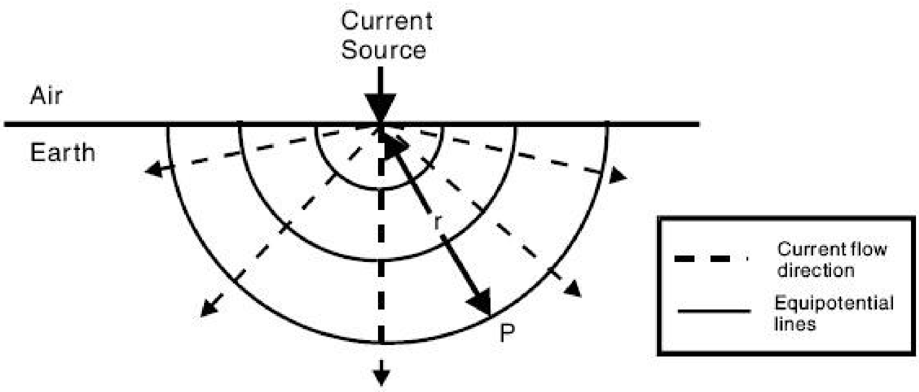
$$\nabla^2 V = 0 \tag{2.8}$$

όπου η σχέση 2.8 είναι η εξίσωση Laplace και ισχύει μόνο για ομογενή γη.

Η ίδια εξίσωση εκφρασμένη σε σφαιρικές συντεταγμένες γίνεται

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial V}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2 \sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta \frac{\partial V}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2 \sin^2\theta}\frac{\partial^2 V}{\partial \psi^2} = 0 \tag{2.9}$$

2.2.1 Ροή ρεύματος σε ομογενή γη λόγω ηλεκτροδίων στη στην επιφάνεια



Σχήμα 2.1
Ισοδυναμικές επιφάνειες και ροή
ηλεκτρικού ρεύματος λόγω
σημειακής πηγής (Tsourlos et al 1998)

Σημειακή πηγή ρεύματος βρίσκεται στην επιφάνεια ομογενούς γης αγωγιμότητας σ (σχήμα 2.1). Η εξίσωση του Laplace σε σφαιρικές συντεταγμένες μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να βρεθεί το δυναμικό σε κάθε σημείο P, σε σχέση με την απόσταση r αυτού από την πηγή. Λόγω συμμετρικότητας της ροής ρεύματος οι παράγωγοι ως προς θ και ψ μπορούν να εξαλειφθούν από την σχέση 2.9, οπότε γίνεται

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial V}{\partial r}\right) = 0 \tag{2.10}$$

Ολοκληρώνοντας την σχέση αυτή

$$\left(r^2 \frac{\partial V}{\partial r}\right) = C$$

ή

$$\frac{\partial V}{\partial r}=\frac{C}{r^2} \tag{2.11}$$

Με επιπλέον ολοκλήρωση η σχέση αυτή γίνεται

$$V=\int \frac{\partial V}{\partial r}dr=\int \frac{c}{r^2}dr=\frac{-C}{-r}+D \tag{2.12}$$

και όταν $r \rightarrow \infty$, *τότε* $V \rightarrow 0$, οπότε D γίνεται μηδέν. Η ροή του ρεύματος λόγω της ομοιογένειας γίνεται σαν ημισφαιρική επιφάνεια. Η συνολική πυκνότητα του ρεύματος J, λόγω έντασης I από σφαιρική επιφάνεια S, ακτίνας r δίνεται από J=I/S, δηλαδή :

$$J=\sigma E=\frac{I}{r^2}$$

καθώς

$$E=-\frac{\partial V}{\partial r}$$

$$\frac{\partial V}{\partial r}=-\frac{I}{2\pi\sigma r^2} \tag{2.13}$$

Από τις σχέσεις 2.10 και 2.12 η τιμή C μπορεί να βρεθεί

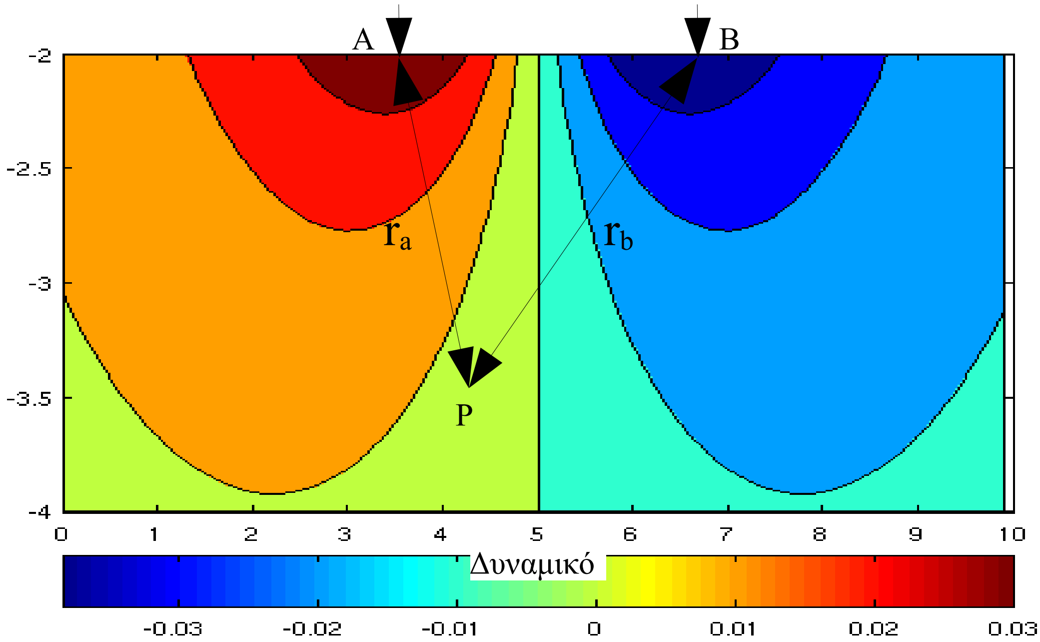
$$C=\frac{I}{2\pi\sigma} \tag{2.14}$$

Και αντικαθιστώντας την τιμή αυτή στην σχέση 2.11 καθώς και την αγωγιμότητα σ με την αντίσταση (σ=1/ρ) προκύπτει ότι το δυναμικό σε κάθε σημείο ομογενούς γη δίνεται από J=I/S, δηλαδή

$$V=\frac{I\rho}{2\pi r} \tag{2.15}$$

2.2.2 Περίπτωση δύο ηλεκτροδίων

Σε περίπτωση δύο ηλεκτροδίων (σχήμα 2.2) όπου το Ά ηλεκτρόδιο στέλνει ρεύμα (θετικός πόλος) και το ηλεκτρόδιο Β λαμβάνει ρεύμα (αρνητικός πόλος) (ή αλλιώς ένα κύκλωμα ρεύματος), το δυναμικό που μετράται σε ένα σημείο P που απέχει αποστάσεις r_A και r_B από τα ηλεκτρόδια A και B αντίστοιχα δίνεται από το αλγεβρικό άθροισμα των επιμέρους δυναμικών, καθώς το δυναμικό είναι μονόμετρο μέγεθος.



Σχήμα 2.2
Ισοδυναμικές επιφάνειες και ροή ηλεκτρικού ρεύματος λόγω δύο σημειακών πηγών

$$V_P = V_{PA} + V_{PB} = \frac{I\rho}{2\pi r_A} + \frac{-I\rho}{2\pi r_B}$$

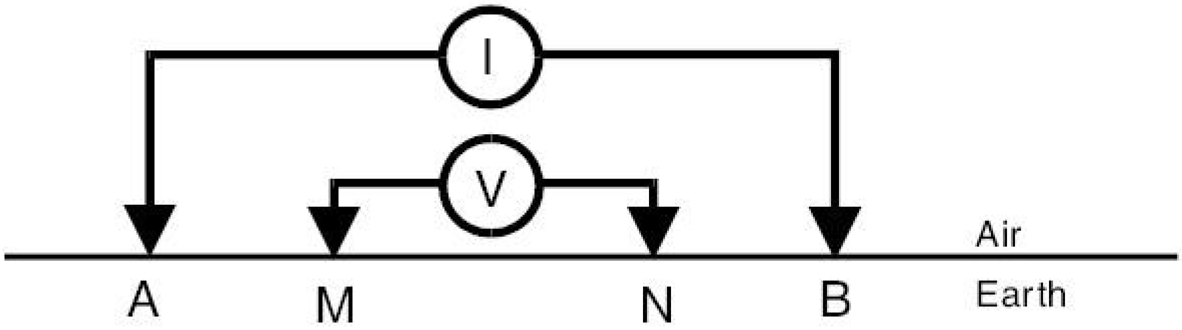
η αλλιώς

$$V_P = \frac{I\rho}{2\pi}\left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B}\right) \quad (2.16)$$

2.2.3 Φαινόμενη αντίσταση

Για την εισαγωγή ρεύματος στην γη χρειάζονται δύο ηλεκτρόδια, ώστε να υπάρχει κλειστό κύκλωμα. Τα ίδια όμως ηλεκτρόδια δεν μπορούν να χρησιμοποιηθούν ταυτόχρονα και για την μέτρηση της διαφορά δυναμικού. Για το λόγο αυτό χρησιμοποιούνται δύο ζεύγη ηλεκτροδίων:

Δύο ηλεκτρόδια ρεύματος A (I+) και B (I-) και δύο ηλεκτρόδια δυναμικού M (V+) και N (V-) , όπως φαίνεται στο σχήμα 2.3 . Το δυναμικό στα M και N λόγω ρεύματος στα A και B , για ομογενή γη μπορεί να βρεθεί από την σχέση 2.16



Σχήμα 2.3
Τυπική διάταξη τεσσάρων ηλεκτροδίων
(Tsourlos et al 1998)

$$V_M = \frac{I\rho}{2\pi}\left(\frac{1}{AM} - \frac{1}{BM}\right)$$

$$V_N = \frac{I\rho}{2\pi}\left(\frac{1}{AN} - \frac{1}{BN}\right)$$

Έτσι η διαφορά δυναμικού ΔV, θα είναι

$$\Delta V = V_M - V_N = \frac{I\rho}{2\pi}\left(\frac{1}{AM} - \frac{1}{BM} - \frac{1}{AN} + \frac{1}{BN}\right) = \frac{I\rho}{2\pi}G \qquad (2.17)$$

Λύνοντας την 2.17 ως προς ρ

$$\rho = 2\pi\frac{\Delta V}{I}\frac{1}{G} = 2\pi\frac{R}{G} \qquad (2.18)$$

Όπου

- ΔV η πτώση τάσης
- I η ένταση του εισαγόμενου ρεύματος
- R η μετρούμενη αντίσταση (R=ΔV/I)
- ρ η αντίσταση
- AM, BM, AN, BN η αποστάσεις μεταξύ των ηλεκτροδίων
- G ο γεωμετρικός παράγοντας

Σε περιπτώσεις ανομοιογενούς γης, η ρ που μετράται με την σχέση 2.18, δεν είναι η πραγματική, αλλά η φαινόμενη, δηλαδή ένα είδος μέσου όρου των αντιστάσεων της περιοχής που "αισθάνεται" η διάταξη ηλεκτροδίων.

2.3. Ευθύ πρόβλημα

Μη την έννοια της επίλυσης του ευθέος προβλήματος, περιγράφεται η διαδικασία κατά την οποία βρίσκονται οι διαφορές δυναμικού λόγω εισαγωγής ρεύματος σε υπέδαφος με γνωστή κατανομή αντιστάσεων. Με άλλα λόγια, το ευθύ πρόβλημα είναι η επίλυση των εξισώσεων ροής ηλεκτρικού ρεύματος σε ανομοιογενή γη, με αποτέλεσμα να μπορεί να υπολογιστεί η κατανομή του δυναμικού. Από την στιγμή που υπολογίζεται το δυναμικό, είναι δυνατόν να βρεθεί και η φαινόμενη αντίσταση. Υπάρχουν δύο τρόποι επίλυσης αυτών των εξισώσεων

Αναλυτική προσέγγιση : Σε αυτές τις μεθόδους, η λύση εξάγεται απευθείας από τις εξισώσεις πεδίου. Στην πράξη όμως, μόνο για λίγες δομές (πχ. θαμμένες σφαίρες) είναι γνωστή η λύση. Η χρησιμότητα αυτών των λύσεων βρίσκεται στον έλεγχο των αποτελεσμάτων που προκύπτουν από άλλες μεθόδους.

Αριθμητική προσέγγιση : Σε αυτές τις μεθόδους επιλύονται οι διαφορικές εξισώσεις που περιγράφουν τη ροή ρεύματος σε ανομοιογενή γη αριθμητικά. Είναι απαραίτητο να γίνει διακριτοποίηση του προβλήματος, ώστε να είναι δυνατή η εύρεση του δυναμικού σε καθορισμένες θέσεις. Η κατηγορία αυτή μπορεί να χωριστεί σε δύο μεγάλες υποκατηγορίες. Σε αυτές που βασίζονται σε μεθόδους ολοκλήρωσης (Keller 1970, Lee 1974, Furness 1992) και σε αυτές που βασίζονται σε μεθόδους διαφοροποίησης. Στις μεθόδους διαφοροποίησης υπάγονται οι μέθοδοι δικτύου αντιστάσεων RNAM (Madden 1965, Tripp et al 1984), μέθοδοι πεπερασμένων διαφορών FDM (Mufti 1976, Dey and Morisson 1979a,b) και μέθοδοι πεπερασμένων στοιχείων (Day and Morisson 1979, Zienkiewicz and Taylor 1989, Cogon 1971, Rijp 1974, Dittmet et al 1992, Burnett 1989, Tsourlos 1998).

Στην παρούσα διατριβή έγινε χρήση του αλγόριθμου δυόμιση διαστάσεων πεπερασμένων στοιχείων (Dittmer et al 1992), μετά τις τροποποιήσεις των Tsoulros (1998).

2.3.1 Σχηματισμός των εξισώσεων πεδίου

Με την παρουσία ηλεκτρικής πηγής η σχέση 2.6 δεν ισχύει. Αν J ή ένταση του ρεύματος τότε η σχέση 2.6 τροποποιείται

$$\nabla(-\sigma_{x,y,z}\nabla V_{x,y,z})=\nabla J \tag{2.19}$$

όπου το ∇ είναι τρισδιάστατος συντελεστής και ο όρος ∇J, περιγράφει την πηγή.

Στην πραγματικότητα το ρεύμα εισάγεται στην γη με χρήση ηλεκτροδίων πεπερασμένων διαστάσεων, αλλά για για τις ανάγκες τις μοντελοποίησης θεωρείται ότι εισάγεται από σημειακές πηγές. Οπότε ο όρος ∇J, μπορεί να περιγραφεί από μια συνάρτηση Dirac και ένα σημειακό ρεύμα I (Coggon, 1971). Αν x_s,y_s και z_s είναι οι συντεταγμένες της πηγής τότε

$$\nabla J = I\delta(x-x_s)\delta(y-y_s)\delta(z-z_s) \quad \text{ή}$$

$$\nabla(-\sigma_{x,z}\nabla V_{x,y,z})=I\delta(x-x_s)\delta(y-y_s)\delta(z-z_s) \tag{2.20}$$

Επειδή το δυναμικό πεδίο ακολουθεί τρισδιάστατη κατανομή στην δυόμιση διαστάσεων μοντελοποίηση ενώ οι αντιστάσεις επιτρέπεται να αλλάξουν μόνο κατά τις δύο διαστάσεις, ένας τρόπος επίλυσης της σχέσης (2.20) είναι ο μετασχηματισμός Fourier του δυναμικού της y διάστασης, στον κυματάριθμο χώρου (Coggon 1971). Λόγω της σταθερής αντίστασης στην κάθετη διάσταση το δυναμικό V(x,y,z) είναι περιττή συνάρτηση. Έτσι μπορεί να εφαρμοστεί ο συνιμητονοειδής μετασχηματισμός Fourier, δηλαδή

$$\tilde{V}(x,k,z)=\int_{0}^{\infty} V(x,y,z)\cos(ky)\,dy \qquad (2.21)$$

Έτσι η εξίσωση του πεδίου με την χρήση του μετασχηματισμένου δυναμικού γίνεται

$$\nabla(-\sigma_{x,z}\nabla\tilde{V}(x,k,z))=I\delta(x-x_s)\delta(z-z_s) \qquad (2.22)$$

2.3.2 Διακριτοποίηση

Η βασική ιδέα των πεπερασμένων στοιχείων είναι η διακριτοποίηση του χώρου σε υποπεριοχές οι οποίες ονομάζονται στοιχεία (elements), στις οποίες κάθε στοιχείο είναι σταθερό ομογενής και ισότροπο. Τα στοιχεία αυτά σχηματίζονται με τέτοιο τρόπο ώστε να δημιουργείται ένα πλέγμα (mesh) σχήμα 2.4.α και 2.4.β. Για κάθε στοιχείο e το άγνωστο δυναμικό $\tilde{V}$ (δοκιμαστική λύση) είναι είναι ένα άθροισμα συναρτήσεων της μορφής

$$\tilde{V}(x,k,z)=\sum_{i=1}^{N}\tilde{a}_i\varphi_i(x,z) \qquad (2.23)$$

Το χ αντιπροσωπεύει όλες τις ανεξάρτητες μεταβλητές του προβλήματος. Οι συναρτήσεις $\varphi_0(\chi)$, $\varphi_1(\chi)$,... είναι γνωστές και ονομάζονται δοκιμαστικές. Οι συναρτήσεις $\varphi_0(\chi)$,$\varphi_1(\chi)$,.... μπορούν να είναι οποιεσδήποτε συναρτήσεις. Για λόγους ευκολίας επίλυσης, συνήθως διαλέγονται κάποιες απλές, όπως κάποια απλά πολυώνυμα η τριγωνομετρικές συναρτήσεις.

Οι παράγοντες α_0,α_1,... είναι οι άγνωστοι του προβλήματος, που συχνά καλούνται και βαθμοί ελευθερίας και αποτελούν το μετασχηματισμένο δυναμικό. Μπορούμε γενικά να πούμε ότι η λύση U_a έχει N βαθμούς ελευθερίας. Η προσεγγιστική λύση αναζητείται στα συγκεκριμένα σημεία αυτά του στοιχείου, που ονομάζονται κόμβοι (nodes). Αναλόγως με την μορφή του στοιχείου υπάρχει και ο αντίστοιχο αριθμός κόμβων, ενώ για στοιχεία ιδίου τύπου οι εξισώσεις είναι αλγεβρικά όμοιες.

Έτσι με τη χρήση της δοκιμαστικής λύση (2.23) η σχέση 2.21 γίνεται

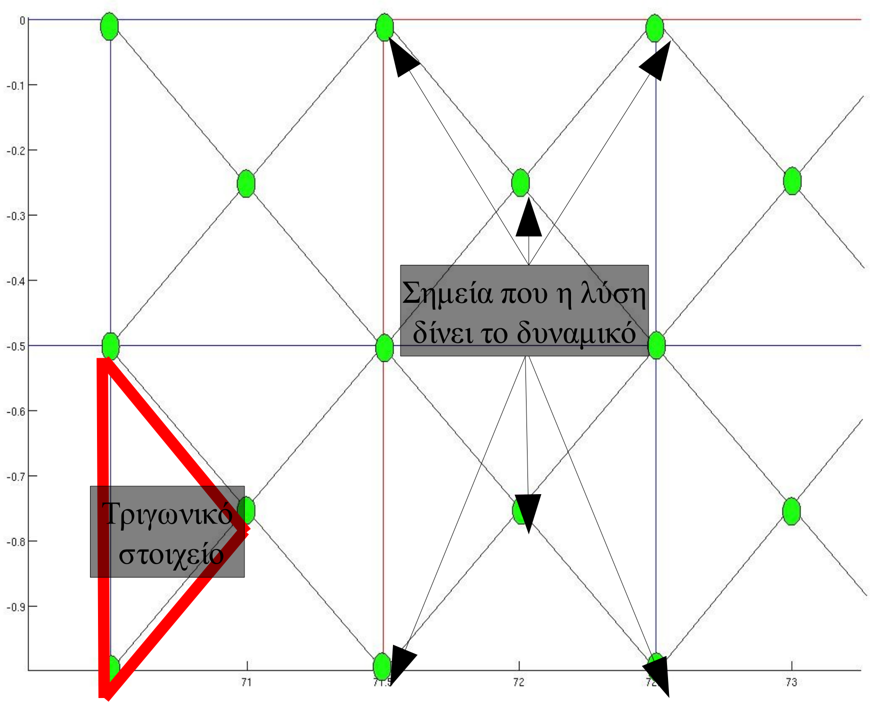
$$-\sigma_{x,z}\nabla^2\tilde{V}(x,y,z)=I\delta(x-x_s)\delta(z-z_s) \qquad (2.24)$$

Και χρησιμοποιώντας τις συνιμητονοειδής ιδιότητες Fourier[2] η σχέση 2.24 γίνεται

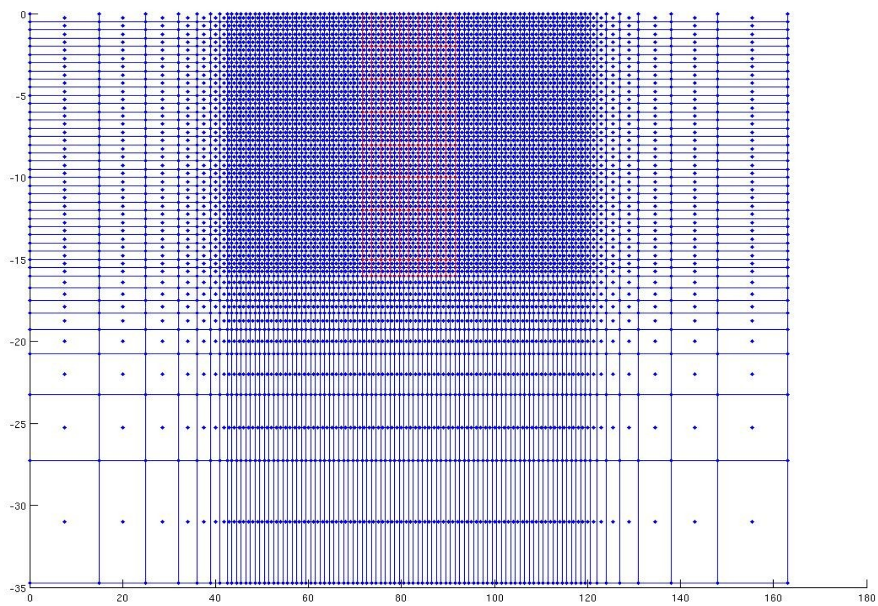
$$-\sigma_{x,z}\nabla^2\tilde{V}(x,y,z)+\sigma_{x,z}k^2\nabla\tilde{V}(x,y,z)=I\delta(x-x_s)\delta(z-z_s) \qquad (2.25)$$

(ο τελεστής ∇ είναι δισδιάστατος) . Η αρχική διαφορική εξίσωση, έχει μορφοποιηθεί σε μια εξίσωση τύπου Helmhotz στον κυματάριθμο χώρου, οπότε μπορεί να χρησιμοποιηθεί η γενική εξίσωση των πεπερασμένων στοιχείων.

2 Αν U_k είναι η μετασχηματισμένη συνάρτηση της U_y σε σχέση με το κ, μπορεί να δειχθεί ότι για την δεύτερη παράγωγο ισχύει (Kreyszig 1992) $U_k''=-k^2U_k$



Σχήμα 2.4.α
Παράδειγμα διακριτοποίησης FEM



Σχήμα 2.4.β
Τυπικό πλέγμα που χρησιμοποιήθηκε στην διατριβή

2.3.3 Κριτήριο βελτιστοποίησης

Η εφαρμογή ενός κριτηρίου βελτιστοποίησης στο στάδιο αυτό είναι ο απαραίτητο, καθώς γενικά το εύρος τιμών των α_n είναι απεριόριστο ($-\infty < a_i < \infty$). Η εφαρμογή του κριτηρίου αναζητά την καλύτερη λύση, υπό την έννοια να βρίσκεται όσο πιο κοντά στην πραγματική.

Η επιλογή του κριτηρίου Galerkin, που ανήκει στις μεθόδους παραγώγισης, αποτελεί τον ποιο διαδεδομένο και γενικό τρόπο επιλύσεως.

Στην γενική μορφή των εξισώσεων του πεδίου G(V)=F, αντικαθιστώντας την λύση V με την προσεγγιστική λύση V_a έχουμε $G(V_a) \approx F$. Οπότε το υπόλοιπο που προκύπτει από αυτήν την προσέγγιση είναι

$$R_a = G(V_a) - F$$

Σύμφωνα με την μέθοδο Galerkin για κάθε παράμετρο α_i πρέπει ο ζυγισμένος μέσος όρος της R_a να ελαχιστοποιείται. Δηλαδή

$$\begin{gathered}\int_1^2 R(x;a)\varphi_1(x)\,dx = 0\\ \int_1^2 R(x;a)\varphi_2(x)\,dx = 0\\ \dots\\ \int_1^2 R(x;a)\varphi_N(x)\,dx = 0\end{gathered} \tag{2.26}$$

Χρησιμοποιώντας τα υπόλοιπα της βελτιστοποίησης Galerkin για το στοιχείο e

$$\begin{gathered}-\sigma\int\int_e\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\tilde V}{\partial x}\right)\varphi_i+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial\tilde V}{\partial z}\right)\varphi_i\right]dx\,dz+\sigma\int\int_e k^2\tilde V\varphi_i\,dx\,dz\\ .=\int\int f\varphi_i\,dx\,dz \quad i=1,\dots N\end{gathered} \tag{2.27}$$

Οι όροι ανώτερης τάξης (διπλά ολοκληρώματα) μπορούν να γραφούν με την χρήση του κανόνα αλυσίδας[3] , οπότε η σχέση (2.27) γίνεται

$$\begin{gathered}\sigma\int\int_e\left[\frac{\partial\tilde V}{\partial x}\left(\frac{\partial\varphi_i}{\partial x}\right)+\frac{\partial\tilde V}{\partial z}\left(\frac{\partial\varphi_i}{\partial z}\right)\right]dx\,dz+\sigma\int\int_e k^2\tilde V\varphi_i\,dx\,dz\\ .=\int\int f\varphi_i\,dx\,dz+\sigma\int\int_e\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\tilde V}{\partial x}\varphi_i\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial\tilde V}{\partial z}\varphi_i\right)\right] \quad i=1,\dots N\end{gathered} \tag{2.28}$$

Ο τελευταίος όρος έχει παράγωγο. Χρησιμοποιώντας το θεώρημα Green ο όρος αυτός μπορεί να γραφεί

$$\sigma\int\int_e\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\tilde V}{\partial x}\varphi_i\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial\tilde V}{\partial z}\varphi_i\right)\right]=\oint_e\left[\sigma\frac{\partial\tilde V}{\partial x}\varphi_i n_x+\sigma\frac{\partial\tilde V}{\partial z}\varphi_i n_z\right]ds=\oint_e T_n\varphi_i\,ds \tag{2.29}$$

---

3 $\int\int_e\frac{\partial}{\partial l}\left(\frac{\partial\tilde V}{\partial l}\right)\varphi_i\,dx\,dz=\int\int_e\frac{\partial}{\partial l}\left(\frac{\partial\tilde V}{\partial l}\varphi_i\right)dx\,dz-\int\int_e\frac{\partial\tilde V}{\partial l}\frac{\partial\varphi_i}{\partial l}\,dx\,dz$

Τα σύμβολα n_n και n_y είναι τα x,y συστατικά της εξωτερικής μονάδας κάθετη στα όρια του στοιχείου. Ο όρος T_n μπορεί να περιγράφει την ενέργεια ροής στο σύστημα. Ο όρος αυτός αποτελεί την εφαρμογή των οριακών συνθηκών. Έτσι η σχέση (2.29) γίνεται

$$\begin{gathered}\sigma \int\int_e \left[\frac{\partial \tilde{V}}{\partial x}\left(\frac{\partial \tilde{\varphi}_i}{\partial x}\right)+\frac{\partial \tilde{V}}{\partial z}\left(\frac{\partial \tilde{\varphi}_i}{\partial z}\right)\right]+\sigma\int\int_e k^2 \varphi_i\, dx\, dz \\ .=\int\int_e f\,\varphi_i\, dx\, dz - \oint_e T_n \varphi_i\, ds \quad i=1...\mathrm{N}\end{gathered} \tag{2.30}$$

Χρησιμοποιώντας και την γενική μορφή της δοκιμαστικής λύσης (σχέση 2.23) η εξίσωση (2.30) γίνεται

$$\begin{gathered}\sum_{j=1}^{N}\sigma\left[\int\int_e \frac{\partial \varphi j}{\partial x}\frac{\partial \varphi i}{\partial x}dx\, dz+\int\int_e \frac{\partial \varphi j}{\partial z}\frac{\partial \varphi i}{\partial z}dx\, dz+\int\int_e k^2 \varphi_j \varphi_i\, dx\, dz\right]\tilde{\alpha}_j \\ \int\int_e f\,\varphi_i\, dx\, dz - \oint T_n \varphi_i\, ds \quad i=1...\mathrm{N}\end{gathered} \tag{2.31}$$

Αν αντικαταστήσουμε

$$K_{ij}^{E}=\sigma\int\int_e \frac{\partial \varphi j}{\partial x}\frac{\partial \varphi i}{\partial x}dx\, dz+\sigma\int\int_e \frac{\partial \varphi j}{\partial z}\frac{\partial \varphi i}{\partial z}dx\, dz+\sigma\int\int_e k^2 \varphi_j \varphi_i\, dx\, dz \tag{2.32}$$

και

$$F_i^e=\int\int_e f\,\varphi_i\, dx\, dz - \oint T_n \varphi_i\, ds \tag{2.33}$$

Το σύστημα των εξισώσεων (2.31) μπορεί να γραφεί με την μορφή πινάκων ως

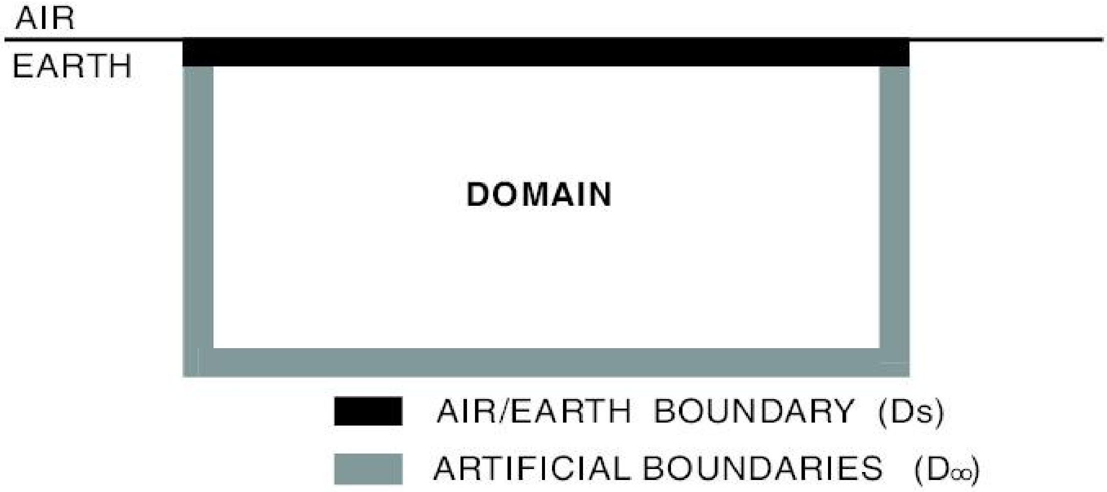
$$\begin{bmatrix} K_{11}^e & K_{12}^e & ... & K_{1\mathrm{N}}^e \\ K_{21}^e & K_{22}^e & ... & K_{2\mathrm{N}}^e \\ ... & ... & ... & ... \\ K_{N1}^e & K_{N2}^e & ... & K_{NN}^e \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \tilde{\alpha}_1^e \\ \tilde{\alpha}_2^e \\ ... \\ \tilde{\alpha}_N^e \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} F_1^e \\ F_2^e \\ ... \\ F_N^e \end{bmatrix} \tag{2.34}$$

η απλά με συμβολισμούς πινάκων $K^{\{e\}}\ A^{(e)} = F^{(e)}$.

2.3.4 Οριακές συνθήκες

Μετά τον σχηματισμό του πλήρους συστήματος πρέπει για την εύρεση μιας μοναδικής λύσης, πρέπει να ληφθούν υπόψιν οι οριακές συνθήκες. Υπάρχουν δύο τύποι οριακών συνθηκών, αυτές του χώρου και οι μεταξύ των στοιχείων συνθήκες.

Οι οριακές συνθήκες χώρου μπορούν να χωριστούν σε φυσικές, D_s, μεταξύ αέρα – εδάφους και τεχνητές, D_∞ , όπου εξομοιώνεται το δυναμικό σε άπειρη απόσταση από την πηγή (σχήμα 2.5).



Σχήμα 2.5
Οι οριακές συνθήκες χώρου
(Tsourlos 1998)

Δύο τύποι οριακών συνθηκών μπορούν να χρησιμοποιηθούν, η συνθήκη Dirichlet όπου ορίζεται μια τιμή δυναμικού σε κάποια σημεία του χώρου, και η συνθήκη Neumann όπου ορίζεται η πρώτη παράγωγος του δυναμικού σε κάποια σημεία του χώρου.

Στο όριο αέρα-εδάφους D_s, η ροή του ρεύματος γίνεται κάθετα στο όριο και είναι μηδέν (Neumann). Ο σχεδιασμός του πλέγματος γίνεται έτσι ώστε τα όρια του να είναι πολύ μακρυά από την πηγή D_∞, δηλαδή το δυναμικό να είναι μηδέν (Dirichlet).

Στις οριακές συνθήκες μεταξύ των στοιχείων οι εξισώσεις πρέπει να επαληθεύονται πλήρως ώστε να έχουμε μοναδική λύση. Έτσι στα προβλήματα αντίστασης, υπάρχει συνέχεια του δυναμικού στα συνορεύοντα στοιχεία, καθώς επίσης και συνέχεια μεταξύ της έντασης του ρεύματος. Για δύο στοιχεία (e) και (f) με αγωγιμότητες σ_e και σ_f αντίστοιχα, πού έχουν κοινό όριο IB και n είναι η μονάδα η κάθετη στο όριο αυτό, τότε για κάθε σημείο του ορίου θα ισχύει

$$\begin{gathered} V_{IB}^{e} = V_{IB}^{f} \\ \sigma_e \frac{\partial V_{IB}^{e}}{\partial n} = \sigma_f \frac{\partial V_{IB}^{f}}{\partial n} \end{gathered} \tag{2.35}$$

2.3.5 Δοκιμαστική λύση τριγωνικών στοιχείων

Υπάρχουν πολλών ειδών στοιχεία που χρησιμοποιούνται σε εφαρμογές FEM. Στα γεωφυσικά προβλήματα για λόγους τόσο απλότητας, όσο και πρακτικούς (τα τριγωνικά στοιχεία μπορούν να σχηματίσουν σχεδόν κάθε δομή της γης), χρησιμοποιούνται τα τριγωνικά.

Οπότε η γενική μορφή της δοκιμαστικής λύσης (σχέση 2.23) δίνεται από την σχέση

$$\tilde{V} = b + cx + dz \tag{2.36}$$

Αντί να εκφραστεί η λύση ως συνάρτηση των b,c,d, προτιμάται να εκφραστεί σε σχέση με τις τιμές της δοκιμαστικής λύσης στους κόμβους, ώστε να μπορούμε να διασφαλίσουμε ευκολότερα τις οριακές συνθήκες μεταξύ των στοιχείων. Πιο συγκεκριμένα, θεωρώντας δύο στοιχεία (e) και (f), με δύο κοινούς κόμβους (σχήμα 2.6,b). Καθώς και για τα δυο στοιχεία οι δοκιμαστικές λύσεις $\tilde{V}_e, \tilde{V}_f$ είναι γραμμικά πολυώνυμα, κατά μήκος των πλευρών τους, θα υπάρχουν ευθείες γραμμές. Η επίτευξη της συνέχειας μεταξύ των (e) και (f) θα γίνει αν αυτές οι γραμμές είναι ίδιες. Ένας τρόπος για να συμβεί αυτό, είναι η εκβίαση της λύσης στους κοινούς κόμβους να είναι η ίδια, διαδικασία που απαιτεί την έκφραση της δοκιμαστικής λύσης σε τιμές στους κόμβους αυτούς.

Αυτό μπορεί να γίνει ως εξής : αν 1,2,3 είναι οι κόμβοι του στοιχείου με (x_1,z_1), $(x_2,z_2)(x_3,z_3)$ οι αντίστοιχες συντεταγμένες και $\tilde{\alpha}_1, \tilde{\alpha}_2, \tilde{\alpha}_3$ οι αντίστοιχες λύσεις τότε από την σχέση (2.34)

$$\begin{aligned} b+cx_1+dz_1&=\tilde{\alpha}_1\\ b+cx_2+dz_2&=\tilde{\alpha}_2\\ b+cx_3+dz_3&=\tilde{\alpha}_3 \end{aligned} \tag{2.37}$$

Λύνοντας το παραπάνω σύστημα, και αντικαθιστώντας τις λύσεις στην σχέση 2.23 προκύπτει

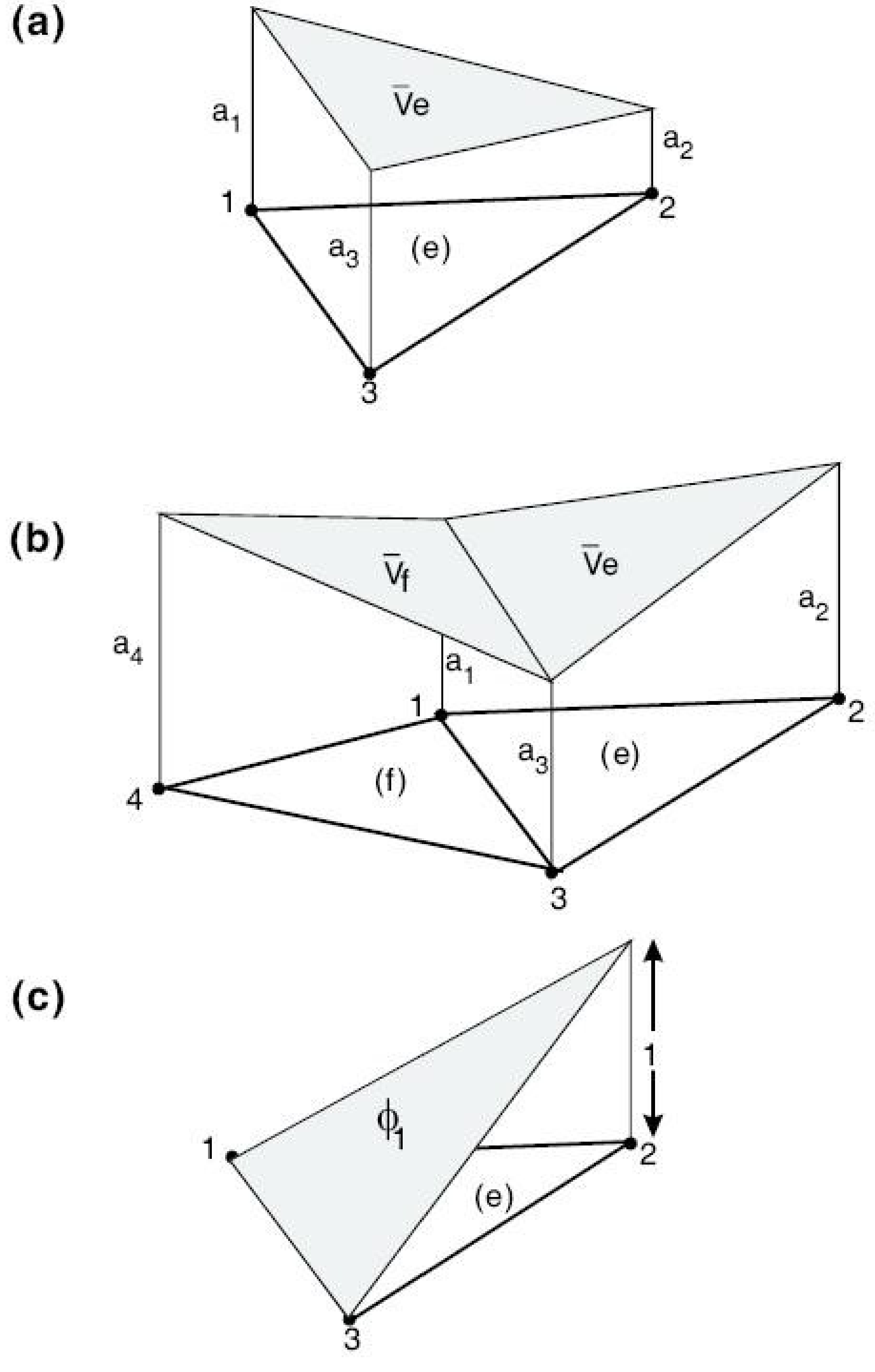
$$\tilde{V}=\sum_{i=1}^{3} \tilde{a}_i \varphi_j(x,z) \tag{2.38}$$

όπου,

$$\begin{gathered} \varphi_j=\frac{A_j+B_{jx}+C_{jz}}{2\Delta}\ j=1,2,3\\ \text{και}\\ A_j=x_k z_l - x_l z_k\\ B_j=z_k-z_l\\ C_j=x_l-x_k\\ \Delta=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}1 & x_1 & z_1\\ 1 & x_2 & z_2\\ 1 & x_3 & z_3\end{vmatrix}=\text{εμβαδό του στοιχείου} \end{gathered} \tag{2.39}$$

Οι δείκτες j,k,l έχουν τις τιμές 1,2,3 για το φ_1 και αλλάζουν κυκλικά για τα φ_2 και φ_3.

Από την σχέση αυτή, μπορεί να φανεί ότι η δοκιμαστική λύση φ_j για τους κόμβους είναι ίση με την μονάδα όταν $(x,z)=(x_j,z_j)$ και μηδέν για $(x,z)=(x_i,z_i)$ και $(x,z)=(x_k,z_k)$.



Σχήμα 2.6
a) Η δοκιμαστική λύση ενός στοιχείου b) η δοκιμαστική λύση δύο στοιχείων c) η δοκιμαστική λύση στον κόμβο 2 (Tsourlos 1998)

2.3.6 Αριθμητικοί υπολογισμοί

Οι όροι k_{ij} του συστήματος (2.32) μπορούν τώρα να υπολογιστούν, καθώς εξαρτώνται μόνο από τις συντεταγμένες των κόμβων.

$$K_{ij}^{E}=\sigma\int\int_{e}\frac{\partial\varphi j}{\partial x}\frac{\partial\varphi i}{\partial x}dx\,dz+\sigma\int\int_{e}\frac{\partial\varphi j}{\partial z}\frac{\partial\varphi i}{\partial z}dx\,dz+\sigma\int\int_{e}k^{2}\varphi_{j}\varphi_{i}dx\,dz \qquad (2.40)$$

Από την σχέση (2.39)

$$\begin{aligned}\partial\frac{\varphi_{j}}{\partial x}&=\frac{B_{j}}{2\Delta}\\ \partial\frac{\varphi_{j}}{\partial y}&=\frac{B_{j}}{2\Delta}\end{aligned} \qquad (2.41)$$

τα οποία είναι σταθερά. Άρα τα δυο πρώτα ολοκληρώματα του όρου K_{ij} γίνονται

$$\begin{aligned}&\sigma\int\int_{e}\frac{\partial\varphi j}{\partial x}\frac{\partial\varphi i}{\partial x}dx\,dz+\sigma\int\int_{e}\frac{\partial\varphi j}{\partial z}\frac{\partial\varphi i}{\partial z}dx\,dz\\ &.=\sigma\frac{B_{i}B_{j}}{4\Delta^{2}}\int\int_{e}dx\,dz+\sigma\frac{C_{i}C_{j}}{4\Delta^{2}}\int\int_{e}dx\,dz\\ &\frac{\sigma}{4\Delta}(B_{i}B_{j}+C_{i}C_{j})\quad i,j=1,2,3\end{aligned} \qquad (2.42)$$

Ο εναπομείναν όρος $\sigma\int\int_{e}k^{2}\varphi_{j}\varphi_{i}dx\,dz\; i,j=1,2,3$ (2.43), μπορεί να υπολογιστεί με την χρήση της τριγωνικής ολοκλήρωσης της ανάλυσης των πεπερασμένων στοιχείων (Rao, 1985). Ο τύπος χρησιμοποιεί το εμβαδόν (ή το βαρύκεντρο) ενός τριγώνου που είναι τρεις τοπικές συντεταγμένες που σχετίζονται με την τριγωνική συμμετρία. Αν f_1,f_2,f_3 είναι οι συντεταγμένες του τριγώνου με εμβαδόν Δ, υψωμένο στις δυνάμεις l,m,n τότε

$$\int\int_{e}f_{1}^{l}f_{2}^{m}f_{3}^{n}dx\,dz=\frac{l!\,m!\,n!}{(l+m+n+2)!}2\Delta \qquad (2.44)$$

Για το γραμμικό τρίγωνο οι συντεταγμένες του εμβαδού είναι όμοιες με αυτές τις δοκιμαστικής λύσης (Burnett 1989) με αποτέλεσμα ο τύπος ολοκλήρωσης να εφαρμόζεται άμεσα στον αριθμητικό υπολογισμό του ολοκληρώματος της σχέσης (2.43), οπότε

$$\sigma\int\int_{e}k^{2}\varphi_{j}\varphi_{i}dx\,dz=\left\{\begin{pmatrix}k^{2}\frac{\Delta}{6}i=j\\ k^{2}\frac{\Delta}{12}i\neq j\end{pmatrix}\right\} \qquad (2.45)$$

Ο όρος $F_i^e = \int\int_e f\varphi_i\, dx\, dz - \oint T_n \varphi_i\, ds$ (2.46), αποτελείται από δύο ολοκληρώματα. Το πρώτο αντιπροσωπεύει την ροή του ρεύματος σε ένα στοιχείο

$$\int\int_e f\varphi_i\, dx\, dz = \int\int_e I\delta(x-x_s)\,\delta(z-z_s)\varphi_i\, dx\, dz \quad i=1,2,3 \tag{2.47}$$

Αν υποτεθεί ότι η πηγή ρεύματος ταυτίζεται με ένα κόμβο, έτσι ώστε το ηλεκτρικό φορτίο να ανατεθεί μόνο στον κόμβο και όχι σε όλο το στοιχείο. Αν παραδείγματος χάρη το ρεύμα εισαχθεί στον κόμβο 1, τότε όπως αναπτύχθηκε στην προηγούμενη υποενότητα η τιμή της συνάρτησης σχήματος φ_1 στον κόμβο είναι ίση με ένα ($\varphi_1=1$) ενώ είναι μηδέν στους υπόλοιπους κόμβους ($\varphi_2=\varphi_3=0$) . Οπότε η σχέση (2.47) γίνεται (αν χ_1,z_1 οι συντεταγμένες του κόμβου 1)

$$\begin{gathered}\int\int_e f\varphi_1\, dx\, dz = \int\int_e I\delta(x-x_1)\,\delta(z-z_1)\varphi_i\, dx\, dz = 1\\ \int\int_e f\varphi_2\, dx\, dz = 0\\ \int\int_e f\varphi_3\, dx\, dz = 0\end{gathered} \tag{2.48}$$

Καθώς το ρεύμα εισάγεται σε ένα κόμβο, και οι κόμβοι είναι κοινοί για περισσότερα στοιχεία, το μέγεθος του ρεύματος πρέπει να μοιραστεί ίσα ανάμεσα σε αυτά τα στοιχεία. Αν θ η γωνία της κορυφής του στοιχείου που συμπίπτει με την πηγή το πραγματικό μέγεθος I_s θα δίνεται (Rijo 1974)

$$I_s = I\frac{\theta}{360} \tag{2.49}$$

επομένως η γενική μορφή της εξίσωσης (2.47) θα είναι

$$\int\int_e I\delta(x-x_s)\,\delta(z-z_s)\varphi_i\, dx\, dz = \left\{\begin{matrix} I_s\, i=s \\ i\neq s,\ \ i=1,2,3\end{matrix}\right\} \tag{2.50}$$

όπου s είναι ο κόμβος πηγή.

Το υπόλοιπο ολοκλήρωμα της σχέσης 2.46

$$\oint T_n \varphi_i\, ds \tag{2.51}$$

αντιπροσωπεύει εκφράσεις της βαθμίδας του δυναμικού στα όρια των στοιχείων. Αυτές οι εκφράσεις δεν χρειάζεται να υπολογιστούν καθώς θα αποδοθούν τιμές κατά την εφαρμογή των οριακών συνθηκών.

Παίρνοντας υπόψιν όλους τους προηγούμενους υπολογισμούς το σύστημα των εξισώσεων για δισδιάστατο πρόβλημα γίνεται

$$\left(\frac{\sigma}{4\Delta}\begin{bmatrix} B_iB_i+C_iC_i & B_iB_j+C_iC_j & B_iB_k+C_iC_k\\ B_jB_i+C_jC_i & B_jB_j+C_jC_j & B_jB_k+C_jC_k\\ B_kB_i+C_kC_i & B_kB_j+C_kC_j & B_kB_k+C_kC_k\end{bmatrix} + \frac{\sigma k^2\Delta}{12}\begin{bmatrix}2&1&1\\1&2&1\\1&1&2\end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix}\tilde{\alpha}_i\\ \tilde{\alpha}_j\\ \tilde{\alpha}_k\end{bmatrix} = I_s\begin{bmatrix}\delta_i+\beta_i\\ \delta_j+\beta_j\\ \delta_k+\beta_k\end{bmatrix} \tag{2.52}$$

όπου i,j,k δείχνουν τους κόμβους του στοιχείου, B,C είναι εκφράσεις των συντεταγμένων του στοιχείου (σχέση 2.39) Δ είναι το εμβαδόν του στοιχείου, I_s το ρεύμα της πηγής, δ_i είναι μονάδα όταν ο κόμβος i συμπίπτει με την προέλευση, και μηδέν αλλιώς (δ_j ,δ_k παίρνουν ανάλογες εκφράσεις για τους κόμβους j,k αντίστοιχα) και $\beta_{i,j,k}$ είναι οριακοί όροι που θα υπολογιστούν αργότερα.

2.3.7 Συνολικό σύστημα

Από την στιγμή που ο όρος k_{ij} έχει υπολογιστεί αριθμητικά για κάθε στοιχείο, οι εξισώσεις των στοιχείων σχηματίζουν απλές γραμμικές εξισώσεις, λαμβάνοντας υπόψιν το γεγονός ότι τα στοιχεία μοιράζονται κοινούς κόμβους και η δοκιμαστική λύση έχει σχεδιαστεί να είναι όμοια για τους ίδιους κόμβους.

Εάν το πλέγμα έχει M στοιχεία, τότε θα προκύψουν M εξισώσεις (Burnett 1989). O όρος k_{ij} του στοιχείου e θα προστεθεί στον όρο k_{ij} του συνολικού πίνακα K, και ομοίως ο όρος F_i^e θα προστεθεί στον όρο F_i του συνολικού πίνακα F. Το συνολικό σύστημα θα έχει την μορφή

$$\mathbf{K\,A = F}$$

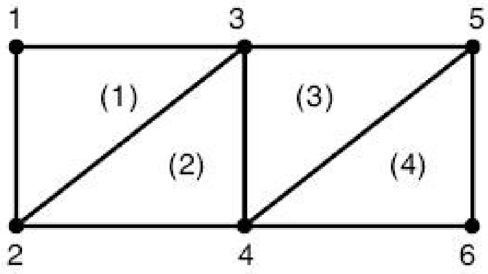
Αν το πλέγμα έχει N κόμβους ο πίνακας K θα είναι NxN διαστάσεων και θα είναι μερικώς συμμετρικός και οριοθετημένος καθώς μόνο άμεσα συνδεδεμένη κόμβοι θα βρίσκονται στην ίδια γραμμή. Ο πίνακας του μετασχηματισμένου δυναμικού έχει διαστάσεις N καθώς και ο πίνακας F.

Στο σχήμα (2.7) παρουσιάζεται η γενική μορφή των εξισώσεων σε ένα παράδειγμα 4 στοιχείων με 6 κόμβους. Παρατηρείται η συμμετρικότητα και οριοθέτηση του πίνακα K

2.3.8 Εφαρμογή των οριακών συνθηκών

Αφού το σύστημα σχηματιστεί, η εφαρμογή των οριακών συνθηκών είναι απλή διαδικασία. Αν η μία πλευρά ενός στοιχείου βρίσκεται στο όριο D_s τότε ο όρος $\frac{\partial U}{\partial z}$ της σχέσης 2.29 είναι μηδέν. Η εφαρμογή των οριακών συνθηκών για στοιχεία που έχουν κόμβους στο όριο D_∞ γίνεται με την απόδοση της τιμής μηδέν στους κόμβους αυτούς. Με αυτό τον τρόπο οι οριακές συνθήκες εισάγονται εμμέσως στο σύστημα των εξισώσεων.

Τέλος οι οριακές συνθήκες για τα στοιχεία με κοινούς κόμβους, γίνεται με εφαρμογή στον πίνακα F, καθώς μετά την εφαρμογή τα γραμμικά ολοκληρώματα της έντασης του ρεύματος (σχέση 2.29) δυο στοιχείων με το ίδιο όριο θα εμφανίζονται σαν ένα άθροισμα σε μια γραμμή του πίνακα F. Καθώς είναι ίσα (σχέση 2.35) και αντίθετου πρόσημου το αποτέλεσμα θα είναι μηδέν.



$$\begin{bmatrix} K_{11}^{(1)} & K_{12}^{(1)} & K_{13}^{(1)} & 0 & 0 & 0 \\ K_{21}^{(1)} & K_{22}^{(1)}+K_{22}^{(2)} & K_{23}^{(1)}+K_{23}^{(2)} & K_{24}^{(2)} & 0 & 0 \\ K_{31}^{(1)} & K_{32}^{(1)}+K_{32}^{(2)} & K_{33}^{(1)}+K_{33}^{(2)}+K_{33}^{(3)} & K_{34}^{(2)}+K_{34}^{(3)} & K_{35}^{(3)} & 0 \\ 0 & K_{42}^{(2)} & K_{43}^{(2)}+K_{43}^{(3)} & K_{44}^{(2)}+K_{44}^{(3)}+K_{44}^{(4)} & K_{45}^{(3)}+K_{45}^{(4)} & K_{46}^{(4)} \\ 0 & 0 & K_{53}^{(3)} & K_{54}^{(3)}+K_{54}^{(4)} & K_{55}^{(3)}+K_{55}^{(4)} & K_{56}^{(4)} \\ 0 & 0 & 0 & K_{64}^{(6)} & K_{65}^{(6)} & K_{66}^{(4)} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \\ a_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1^{(1)} \\ f_2^{(1)}+f_2^{(2)} \\ f_3^{(1)}+f_3^{(2)}+f_3^{(3)} \\ f_4^{(2)}+f_4^{(3)}+f_4^{(4)} \\ f_5^{(3)}+f_5^{(4)} \\ f_6^{(6)} \end{bmatrix}$$

Σχήμα 2.7
Ο πίνακας F σε ένα σύστημα 4 στοιχείων
(Tsourlos 1998)

2.3.9 Εξαγωγή του δυναμικού

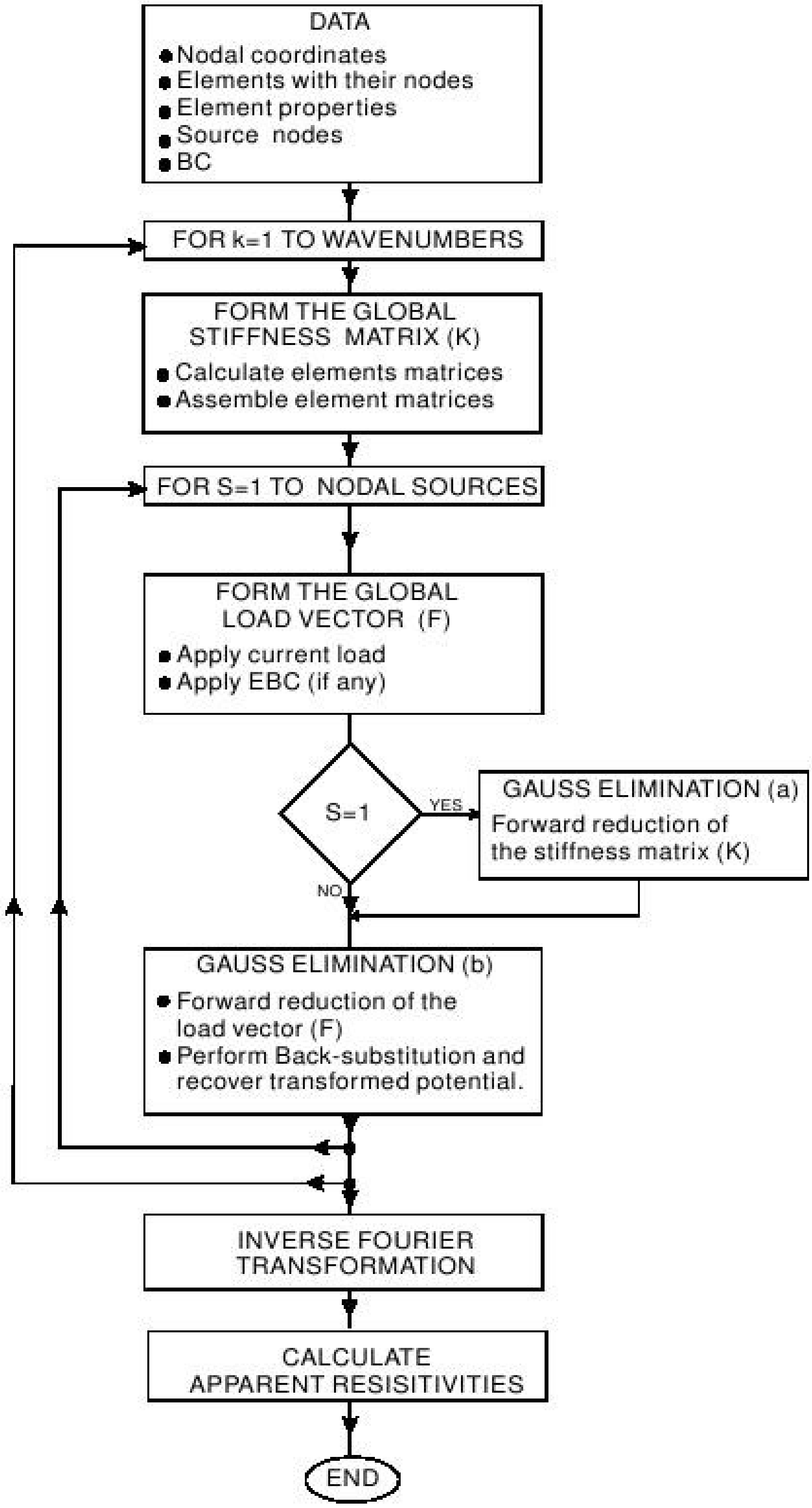
Μετά την εφαρμογή των οριακών συνθηκών το σύστημα μπορεί να λυθεί με διάφορες μεθόδους (σε αυτήν την διατριβή Gauss elimination). Η λύση θα δίνει το μετασχηματισμένο δυναμικό για διάφορες τιμές του κ.

Για να βρεθεί το δυναμικό $V_{(x,y,z)}$ εφαρμόζεται ο αντίστροφος μετασχηματισμένος fourier, δηλαδή

$$V_{(x,y,z)}=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\infty} \tilde{V}_{(x,k,z)}\cos(ky)\,dk \tag{2.53}$$

Αν το μετασχηματισμένο δυναμικό $\tilde{V}_{(x,k,z)}$, έχει βρεθεί για διάφορα κ, το δυναμικό $V_{(x,y,z)}$ μπορεί να βρεθεί με αριθμητικές μεθόδους ολοκλήρωσης της παραπάνω σχέσης.

Το διάγραμμα ροής του δυόμιση διαστάσεων ευθέος προβλήματος αλγόριθμου, παρουσιάζεται στο σχήμα 2.8 (Tsourlos 1998)



Σχήμα 2.8
Διάγραμμα ροής του αλγόριθμου
δυόμιση διαστάσεων ευθέος προβλήματος
(Tsourlos 1998)

Κεφάλαιο 3

Θεωρία αντιστροφής

3 Γενικά

Οι γεωφυσικές μέθοδοι συχνά απαιτούν τη συσχέτιση μεταξύ των φυσικών παραμέτρων που χαρακτηρίζουν ένα μοντέλο (m), και τς μετρήσεις που συλλέχθηκαν (d). Αν θεωρήσουμε γνωστές τις φυσικές σχέσεις που διέπουν το σύστημα, οι οποίες μπορούν να συνοψιστούν σε μια συνάρτηση G, τότε το πρόβλημα μπορεί να γραφτεί σαν

$$G(m)=d \tag{3.1}$$

Στην πράξη d μπορεί να είναι μια συνάρτηση χρόνου ή/και χώρου, ή όπως πολύ συχνά συμβαίνει διακριτές τιμές από μετρήσεις. Ένα πολύ σημαντικό θέμα είναι η ύπαρξη θορύβου που υπάρχει σχεδόν πάντα στις μετρήσεις, θόρυβος ο οποίος μπορεί να ωφελείται είτε σε σφάλμα του οργάνου είτε σε στρογγυλοποιήσεις. Μπορούμε να θεωρήσουμε σε αυτήν την περίπτωση ότι οι μετρήσεις προέρχονται από κάποιο τέλειο πείραμα συν τον θόρυβο n, οπότε η βασική σχέση τροποποιείται

$$\begin{aligned} d&=G(m_{true}) + n \\ &=d_{true} + n \end{aligned} \tag{3.2}$$

όπου d_{true} επαληθεύει την σχέση 3.1 για μοντέλο m ίδιο με το m_{true}. Έχει αποδειχθεί ότι η ύπαρξη του θορύβου δεν επηρεάζει σχεδόν καθόλου το μοντέλο m, με αποτέλεσμα να είναι πολύ κοντά στο m_{true}. Ένα ενδιαφέρον σημείο είναι ότι συχνά περισσότερα από ένα μοντέλα m_{true} μπορούν να ταιριάξουν με τα τέλεια δεδομένα d_{true}.

Το ευθύ πρόβλημα, είναι η εύρεση των δεδομένων d, αν γνωρίζουμε το μοντέλο m. Η διαδικασία αυτή, απαιτεί τον υπολογισμό της συνάρτησης G, η οποία αναλόγως με την μορφή του προβλήματος μπορεί να είναι συνήθης διαφορική εξίσωση (ODE), μερική διαφορική εξίσωση

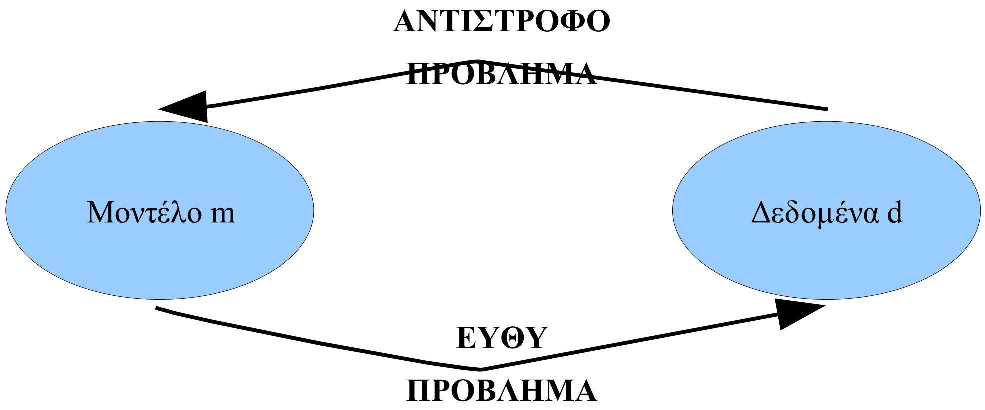
(PDE), γραμμικές η μη γραμμικές αλγεβρικές εξισώσεις. Στη μέθοδο της ηλεκτρικής αντίστασης αναζητείται η λύση της διαφορικής εξίσωσης του δυναμικού όπως παρουσιάστηκε στο κεφάλαιο 2.

Το αντίστροφο πρόβλημα είναι η εύρεση του μοντέλου m, αν έχουμε τα δεδομένα d που έχουν συλλεχθεί από κάποιο πείραμα. Η σχέση που ισχύει σε αυτήν την περίπτωση τροποποιείται και γίνεται

$$m=G^{-1}d \tag{3.3}$$

Αν τα δεδομένα είναι συναρτήσεις χρόνου η/και χώρου, τότε η εκτίμηση του m από το d, ονομάζεται συνεχές αντίστροφο πρόβλημα. Στα περισσότερα προβλήματα, γίνεται διακριτοποίηση των παραμέτρων με αποτέλεσμα να χρειάζεται η εύρεση τιμών των παραμέτρων σε συγκεκριμένες θέσεις.

Η σχηματική αναπαράσταση του ευθέος-αντίστροφου προβλήματος φαίνεται στο στο παρακάτω σχήμα 3.1



Σχήμα 3.1
Ευθύ-Αντίστροφο πρόβλημα

3.1 Δυσκολία των αντίστροφων προβλημάτων

Η δυσκολία των αντίστροφων προβλημάτων, μπορεί να συνοψιστεί στις παρακάτω τρεις συνθήκες.

α) *Ύπαρξη*. Είναι δυνατόν να μην υπάρχει κανένα μοντέλο που να επαληθεύει πλήρως τα δεδομένα. Αυτό μπορεί να οφείλεται στην προσεγγιστική μαθηματική λύση για την εύρεση του μοντέλου, στην ύπαρξη θορύβου στα δεδομένα και στο σφάλμα του μοντέλου.

β) *Μοναδικότητα*. Εάν υπάρχει λύση, αυτή μπορεί να μην είναι και η μοναδική. Μπορεί να υπάρχουν και άλλα μοντέλα εκτός του πραγματικού m_{true} που να επαληθεύουν την εξίσωση $G(m)=d_{true}$.

γ) *Αστάθεια*. Η διαδικασία επίλυσης των εξισώσεων σε ένα αντίστροφο πρόβλημα, είναι εξαιρετικά ασταθής, με αποτέλεσμα μια μικρή αλλαγή στα δεδομένα (που μπορεί να οφείλεται στον θόρυβο) μπορεί να προκαλέσει τεράστιες αλλαγές στην λύση του εκτιμώμενου μοντέλου. Τέτοια προβλήματα ονομάζονται ill-conditioned.

Τα περισσότερα γεωφυσικά προβλήματα, υποφέρουν από τις τρεις αυτές συνθήκες. Για το λόγο αυτό, έχουν αναπτυχθεί πολλές τεχνικές για την επίλυση αυτών. Στην παρούσα διατριβή, εξετάστηκαν οι κυριότερες τεχνικές, όπως θα παρουσιαστούν στις αντίστοιχες ενότητες.

3.2. Εισαγωγή

Σκεφτείτε ένα διακριτό γραμμικό πρόβλημα. Ξεκινώντας από ένα διάνυσμα δεδομένων d, με m παρατηρήσεις,και ένα διάνυσμα m με n παραμέτρους το οποίο πρέπει να υπολογιστεί.

Το αντίστροφο πρόβλημα, μπορεί να γραφεί σαν ένα σύστημα γραμμικών εξισώσεων

$$Gm=d \qquad (3.4)$$

Για το παρών παράδειγμα θα θεωρηθεί ότι η τάξη του πίνακα G είναι πλήρης (δηλαδή rank(G)=n). Έτσι σε αυτήν την περίπτωση είναι δυνατόν να μην υπάρχει κανένα διάνυσμα m που να ικανοποιεί την σχέση 3.4 επειδή η τάξη του πίνακα G είναι μικρότερη από m λόγω ύπαρξης θορύβου στο διάνυσμα d.

Μια χρήσιμη προσεγγιστική λύση, είναι η εύρεση κάποιου μοντέλου m, το οποίο να ελαχιστοποιεί μια διαφορά, την διαφορά μεταξύ των πραγματικών δεδομένων και του Gm. Ένα τέτοιο διάνυσμα ονομάζεται υπόλοιπο (residuals) και είναι

$$r=d-Gm \qquad (3.5)$$

Μια πολύ συχνά χρησιμοποιούμενη μέθοδος για την ελαχιστοποίηση αυτής της διαφοράς είναι η λύση ελαχίστων τετραγώνων (2-norm). Η συγκεκριμένη λύση παρουσιάζει αρκετά πλεονέκτημα, όπως η ευκολία στην μετέπειτα ανάλυση καθώς και, όπως μπορεί να αποδειχθεί, ότι είναι η πιο πιθανή λύση, αν ο θόρυβος ακολουθεί μια κανονική κατανομή (πράγμα κοινό στα περισσότερα γεωφυσικά προβλήματα).

Όπως μπορεί να δειχθεί, η λύση ελαχίστων τετραγώνων της σχέσης (3.5) είναι η ακόλουθη

$$m_{L2}=(G^TG)^{-1}G^Td \qquad (3.6)$$

Μπορεί να δειχθεί ότι αν ο πίνακας G είναι πλήρης τάξης τότε ο πίνακας $(G^TG)^{-1}$ υπάρχει.

Σε περιπτώσεις όπου τα σχετικά σφάλματα ακολουθούν την κανονική κατανομή και είναι ανεξάρτητα μπορεί να δειχθεί ότι η λύση των ελαχίστων τετραγώνων είναι και η βέλτιστη. Εάν ληφθεί υπόψιν και το σχετικό σφάλμα των δεδομένων (το σφάλμα για την i^{th} μέτρηση d_i είναι σ_i), τότε το σύστημα ζυγίζεται με τον πίνακα W, οπου W

$$W=diag(1/\sigma_1,1/\sigma_2,....,1/\sigma_m) \qquad (3.7)$$

Τότε

$$G_W=WG \qquad (3.8)$$

και

$$d_W=Wd \qquad (3.9)$$

Όποτε το νέο ζυγισμένο σύστημα εξισώσεων γίνεται

$$G_W m=d_w \tag{3.10}$$

Οπότε η εξίσωση 3.6 τροποποιείται και γίνεται

$$m_{L2}=(G_w^T G_w)^{-1} G_w^T d \tag{3.11}$$

Μπορεί να δειχθεί ότι εφόσον τα δεδομένα ακολουθούν κανονική κατανομή τότε και οι παράμετροι θα ακολουθούν την κανονική κατανομή, καθώς ο γραμμικός συνδυασμός κανονικά κατανεμημένων τυχαίων μεταβλητών είναι κανονικά κατανεμημένος.

Όπως μπορεί να δειχθεί, ο πίνακας συμεταβλητότητας σε αυτήν την περίπτωση γίνεται

$$Con(m_{L2})=(G_w^T G_w)^{-1} \tag{3.12}$$

Και στην περίπτωση όπου θεωρήσουμε ανεξάρτητα και ίδια τα σφάλματα ο πίνακας συμεταβλητότητας γίνεται

$$Con(m_{L2})=\sigma^2(G^T G)^{-1} \tag{3.13}$$

3.3 Άλλες τεχνικές

Υπάρχουν και άλλες τεχνικές για την ελαχιστοποίηση της σχέσης 3.5, μεταξύ των οποίων η L_1 που βρίσκει εφαρμογή σε μοντέλα με απότομες αλλαγές στην δομή, καθώς και η τεχνική του Monte Carlo Error Propagation. Η τελευταία χρησιμοποιείται σε μη γραμμικές λύσεις, όπου δεν υπάρχει εύκολος τρόπος για την αναπαραγωγή των αβεβαιοτήτων των παραμέτρων του μοντέλου από τα δεδομένα.

Στην παρούσα διατριβή, εξετάστηκε μόνο η λύση των ελαχίστων τετραγώνων (L_2) όπου η γκάμα εφαρμογής της είναι μεγαλύτερη και η λύση συνήθως πιο κοντά στην πραγματική.

3.4 Ill conditioned και ανάλυση SVD

Μια μέθοδος ανάλυσης και επίλυσης των ελαχίστων τετραγώνων με ιδιαίτερη έμφαση στα ασταθή προβλήματα είναι η Singular Value Decomposition ή SVD. Στην μέθοδο αυτή, ένας m X n πίνακας G μορφοποιείται ως εξής

$$G=USV^T \tag{3.14}$$

- U είναι ένας m X m ορθογώνιος πίνακας, με στήλες που είναι διανύσματα μοναδιαίας βάσης του διαστήματος των δεδομένων, R^m
- V είναι n X n είναι ορθογώνιος πίνακας, με στήλες που είναι διανύσματα βάσης του διαστήματος του μοντέλου, R^n
- S είναι πίνακας m X n διαγώνιος με τα διαγώνια στοιχεία τις ιδιοτιμές.

Μπορεί να αποδειχθεί ότι όλοι οι πίνακες μπορούν να αναλυθούν κατά SVD. Ο πίνακας S περιέχει τις ιδιοτιμές σε φθίνουσα σειρά $s_1 \geqslant s_2 \geqslant ... \geqslant s_{min}(m,n) \geqslant 0$. Είναι δυνατόν κάποιες ιδιοτιμές να είναι ακριβώς μηδέν. Σε αυτές τις περιπτώσεις αν μόνο οι πρώτες p ιδιοτιμές είναι μη μηδενικές ο πίνακας S χωρίζεται ως εξής

$$S = \begin{bmatrix} S_p & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{3.15}$$

,οπότε όπως μπορεί να αποδειχθεί ο πίνακας G γίνεται αντίστοιχα

$$G = [U_P, 0] \begin{bmatrix} S_p & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} [V_p, 0]^T \tag{3.16}$$

Η μέθοδος SVD, μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την παραγωγή του γενικευμένου αντίστροφου (ή όπως αλλιώς ονομάζεται ψευδοαντίστροφος) ο οποίος είναι

$$G^J = V_P S_p^{-1} U_p^T \tag{3.17}$$

Επομένως, χρησιμοποιώντας τον ψευδοαντίστροφο η λύση γίνεται

$$m_J = G^J d = V_p S_p^{-1} U_p^T d \tag{3.18}$$

Χρησιμοποιώντας την ανάλυση SVD, είναι δυνατόν να υπολογιστεί ο πίνακας συμεταβλητότητας για να διαπιστωθεί η πιστότητα των αποτελεσμάτων. Έτσι με την συμβολή της SVD, ο πίνακας είναι

$$Con(m_J) = \sigma^2 V_p S_p^{-2} V_p^T = \sigma^2 \sum_{i=1}^{p} \frac{V_{.,i} V_{.,i}^T}{s_i^2} \tag{3.19}$$

Όπως παρατηρείται η συμεταβλητότητα αυξάνεται όσο αυξάνεται το p. Δηλαδή, η κολοβωμένη (truncated) SVD, μειώνει την μεταβλητότητα.

Δυστυχώς, όπως προκύπτει, εκτός και αν p=n, η γενικευμένη λύση δεν είναι και αντικειμενική λύση. Αυτό συμβαίνει διότι η πραγματική λύση μπορεί να έχει μη μηδενικές προβολές στο διάνυσμα βάσης V, οι οποίες δεν χρησιμοποιούνται στη γενικευμένη λύση. Με άλλα λόγια οι ιδιοτιμές που απορρίφτηκαν μπορεί να επηρεάσουν την λύση και να την οδηγήσουν μακρυά από την πραγματική.

Μια ακόμη χρήσιμη ανάλυση είναι ο πίνακας ανάλυσης, που δείχνει την ποιότητα της λύσης. Ο πίνακας αυτός προκύπτει από την παρακάτω σχέση

$$R_m = G^j G = V_p V_p^T \tag{3.20}$$

Αν η λύση είναι τέλεια (τάξη πίνακα G είναι p=n), τότε ο πίνακας R_m είναι ο μοναδιαίος. Αλλιώς αν η λύση δεν είναι καλή, ο πίνακας παρουσιάζει τυχαίες τιμές.

Σε κάθε γεωφυσικό πρόβλημα, πρέπει να γίνεται πλήρη επεξεργασία της λύσης, ώστε να εξαχθούν και τα αντίστοιχα συμπεράσματα για την ποιότητα αυτής.

Αν θεωρήσουμε το διάνυσμα δεδομένων d και την γενικευμένη λύση $m_j=G^j d$. Για ένα άλλο διάνυσμα δεδομένων d' ελάχιστα διαφορετικό (πιθανών και λόγω θορύβου) και την γενικευμένη του λύση $m'_j=G^j d'$ τότε

$$m'-m'_j = G^J(d - d') \tag{3.21}$$

Μπορεί να αποδειχθεί ότι

$$\frac{\|m_j - m_j'\|_2}{\|m_j\|_2} \leqslant \frac{s_1}{s_p} \frac{\|d - d'\|_2}{\|d\|_2} \tag{3.22}$$

Όπου τα όρια των λύσεων εξαρτώνται από την τιμή p που θα χρησιμοποιήσουμε. Για μικρές τιμές του (δηλαδή κόβοντας τις μικρές ιδιοτιμές) η λύση γίνεται σταθερή. Αλλά το μειονέκτημα έγκειται στον επίσης περιορισμό του διαστήματος του R^n όπου βρίσκεται η λύση. Αποτέλεσμα αυτού είναι η απόκλιση του resolution matrix από τον μοναδιαίο.

Μια μέθοδος που εξασφαλίζει την σταθερότητα της λύσης και προκύπτει απευθείας από την σχέση 3,18 είναι η διακριτή συνθήκη piccard. Η συγκεκριμένη συνθήκη ισχύει όταν το εσωτερικό γινόμενο των στηλών του πίνακα U με το διάνυσμα δεδομένων d, ελαττώνεται και πλησιάζει το μηδέν πιο γρήγορα από ότι οι ιδιοτιμές s_i. Σε αυτήν την περίπτωση δεν αναμένεται αστάθεια της λύσης. Η συγκεκριμένη συνθήκη ελέγχεται με ένα διάγραμμα όπου στον ένα άξονα βρίσκονται οι λόγοι $U_i^T d$ προς d και στον άλλο άξονα όλο το φάσμα των ιδιοτιμών.

Σε περιπτώσεις όπου η συνθήκη piccard δεν ισχύει είναι δυνατόν να εξαχθεί χρήσιμη λύση χρησιμοποιώντας την Truncated SVD (TSVD). Στην συγκεκριμένη μέθοδο διαλέγεται ένας μεγαλύτερος όρος p'<p τέτοιος ώστε

$$\|G_w m - d_w\|_2 \leqslant \delta = \sqrt{(m)} \tag{3.23}$$

όπου το δ διαλέγεται επειδή κατά προσέγγιση ο μέσος όρος μιας κατανομής x^2 με m βαθμούς ελευθερίας είναι m.

3.5 Κανονικοποίηση κατά Tikhnov

Όπως είδαμε στην τρίτη ενότητα, η ανάλυση SVD, μπορεί να μας δώσει τη γενικευμένη λύση

$$m_J = V_p S_p^{-1} U_p^T d = \sum_{i=1}^{P} \frac{U_{.,i}^T d}{s_i} V_{.,i} \tag{3.24}$$

Από τη σχέση 3.24, παρατηρείται ότι η λύση είναι ασταθής για πολύ μικρές τιμές των ιδιοτιμών. Σε αυτήν την ενότητα, θα παρουσιαστεί η πιο συχνά χρησιμοποιούμενη μέθοδος επίλυσης τέτοιων ασταθών προβλημάτων, η κανονικοποίηση κατά Tikhnov, η οποία εκφράζεται πολύ εύκολα με την χρήση της SVD.

Δεδομένου ότι για ένα ελαχίστων τετραγώνων πρόβλημα είναι δυνατόν να υπάρχουν περισσότερες από μία λύση (ελαχίστων τετραγώνων) καθώς επίσης και την ύπαρξη θορύβου, συμπεραίνεται ότι οι δυνατές λύσεις που πληρούν την σχέση $\|Gm - d\|_2 \leqslant \delta$, είναι όλες πιθανές.

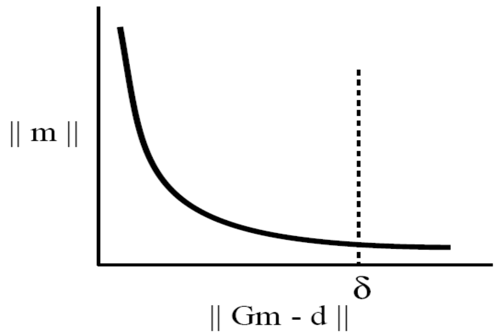
Κατά την κανονικοποίηση διαλέγονται όλες οι λύσεις που πληρούν την σχέση $\|Gm - d\|_2 \leqslant \delta$ και ταυτόχρονα ελαχιστοποιούν το μέτρο του διανύσματος m, δηλαδή το σύστημα γίνεται

$$min\|m\|_2$$

$$\|Gm-d\|_2 \leq \delta \tag{3.5.2}$$

Η επιλογή της λύσης που ελαχιστοποιεί το μέτρο του διανύσματος γίνεται διότι κάθε μη μηδενικό χαρακτηριστικό που εμφανίζεται στην λύση του μοντέλου (δηλαδή μεγάλες διαφορές σε γειτονικές παραμέτρους) μεγαλώνει το μέτρο αυτό. Όμως αυτές οι αυξήσεις στα χαρακτηριστικά των παραμέτρων εμφανίζονται διότι είναι απαραίτητες για να ταιριάξουν στα δεδομένα d. Έτσι με αυτόν τρόπο διασφαλίζεται ότι μεγάλες διαφορές στις παραμέτρους της λύσης δεν θα εμφανίζονται.

Παρατηρώντας το σύστημα, φαίνεται ότι όσο μεγαλώνει το δ, τα δυνατά μοντέλα αυξάνονται και ταυτόχρονα το ελάχιστο του $\|m\|_2$ μειώνεται. Μπορεί έτσι να σχηματιστεί μια καμπύλη με τις ελάχιστες τιμές του $\|m\|_2$ και το δ, όπως φαίνεται στο σχήμα 3.2

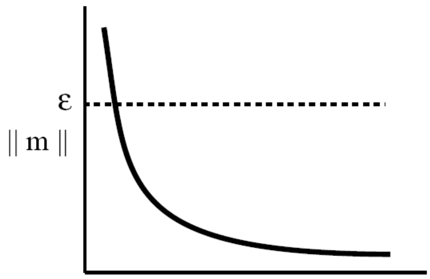


Σχήμα 3.2
Διάγραμμα του ελαχίστου $\delta = \|Gm-d\|_2$ *και του αντιστοίχου μέτρου διανύσματος m*

Τροποποιώντας το σύστημα των εξισώσεων ως εξής

$$\begin{gathered}\|m\|_2 \leq \varepsilon \\ min\|Gm-d\|_2\end{gathered} \tag{3.25}$$

Παρατηρείται ότι όσο ελαττώνεται το ε, οι δυνατές λύσεις ελαττώνεται ενώ το ελάχιστο $\|Gm-d\|_2$, μεγαλώνει. Σε ένα αντίστοιχό διάγραμμα είναι δυνατόν να σχηματιστεί η καμπύλη του σχήματος 3.3



Σχήμα 3.3
Ένα συγκεκριμένο ε και το αντίστοιχο ελάχιστο $\|Gm-d\|_2$

Μια τρίτη θεώρηση του συστήματος είναι η damped least squares

$min\|Gm-d\|_2^2+\alpha^2\|m\|_2^2$,όπου α ο πολλαπλασιαστής Lagrange.

Μπορεί να αποδειχθεί ότι για συγκεκριμένες τιμές δ,ε και α τα τρία συστήματα έχουν την ίδια λύση. Στην παρούσα διατριβή θα χρησιμοποιηθεί η τρίτη θεώρηση για την επίλυση των προβλημάτων. Οι άλλες δυο μπορούν να προκύψουν ρυθμίζοντας την τιμή α μέχρι να ικανοποιηθούν οι περιορισμοί.

Η damped least squares σχέση μπορεί να γραφεί με το επαυξημένο σύστημα ελαχίστων τετραγώνων με τον εξής τρόπο

$$min\left\|\begin{bmatrix}G\\ aI\end{bmatrix}m-\begin{bmatrix}d\\ 0\end{bmatrix}\right\|_2^2 \tag{3.26}$$

Η παραπάνω σχέση, μπορεί να γραφεί με την μορφή πινάκων σύμφωνα με τη σχέση

$$(G^TG + \alpha^2I)m=G^Td \tag{3.27}$$

Και χρησιμοποιώντας την ανάλυση SVD του πίνακα G, η λύση γίνεται

$$m_a=\sum_{i=1}^{k}\frac{s_i^2}{s_i^2+\alpha^2}\frac{U_{.,i}^T d}{s_i}V_{.,i} \tag{3.5.6}$$

Ο παράγοντας

$$f_i=\frac{s_i^2}{s_i^2+\alpha^2} \tag{3.28}$$

ονομάζεται παράγοντας φίλτρου. Για $s_i\gg\alpha\,,\,f_i\approx1\;και\;για\;s_i\ll\alpha\,,\,f_i\approx0$

Για ιδιοτιμές μεταξύ των δύο αυτών ακρότατων, όσο οι ιδιοτιμές ελαττώνονται ο παράγοντας φίλτρου παράγει μια μονότονα ελλατούμενη κατανομή των αντίστοιχων διανυσμάτων $V_{.,i}$

Ένας παρόμοιος παράγοντας (που ονομάζεται damped svd) είναι ο ακόλουθος

$$\hat{f}_i=\frac{s_i}{s_i+\alpha} \tag{3.29}$$

που παράγει παρόμοια κατανομή των ιδιοτιμών, αλλά με πιο μικρό ρυθμό ελάττωσης.

Χρησιμοποιώντας μορφή πινάκων, η λύση είναι

$$m_a=(G^TG+\alpha^2I)^{-1}G^Td \tag{3.30}$$

$$G^{\#}d \tag{3.31}$$

Οπότε και ο πίνακας ανάλυσης γίνεται

$$R_{m,a}=G^{\#}G \tag{3.32}$$

3.5.1 Κανονικοποίηση ανωτέρου βαθμού

Στην προηγούμενη ενότητα η λύση προήλθε από την ελαχιστοποίηση του $\|m\|_2$. Σε κάποια άλλα προβλήματα, είναι επιθυμητό η λύση να προέρχεται από την ελαχιστοποίηση κάποιας άλλης μέτρησης του m, όπως την πρώτη ή δευτέρου βαθμού παράγωγο.

Παραδείγματος χάρη, σε ένα διακριτό πρόβλημα που το μοντέλο έχει μονοδιάστατη κατανομή παραμέτρων, επιδιώκεται η ελαχιστοποίηση της πρώτης παραγώγου του μοντέλου , $\|Lm\|_2$ (σημείωση ότι είναι ημινόρμα, γιατί είναι 0 για κάθε σταθερό μοντέλο, και όχι μόνο για το m=0) , όπου L

$$L=\begin{bmatrix} -1 & 1 & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & -1 & 1 & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & -1 & 1 & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & -1 & 1 \end{bmatrix} \qquad (3.33)$$

Τέτοιοι πίνακες ονομάζονται και πίνακες εξομάλυνσης, καθώς τείνουν να εξομαλύνουν τις διαφορές στη λύση του μοντέλου. Έτσι το σύστημα επίλυσης γίνεται

$$min\|Gm-d\|_2^2+\alpha^2\|Lm\|_2^2 \qquad (3.34)$$

Σε δευτέρου βαθμού παράγωγο ως πίνακα εξομάλυνσης χρησιμοποιείται (για μονοδιάστατο μοντέλο)

$$L=\begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & -1 & 2 & 1 & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & -1 & 2 & 1 & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & -1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \qquad (3.35)$$

Η μηδενικού βαθμού παράγωγος (L=I), αναπτύχθηκε στην προηγούμενη ενότητα. Για την επίλυση του νέου συστήματος χρησιμοποιείται η γενικευμένη SVD (ή GSVD), σύμφωνα με τον παρακάτω ορισμό.

Θεωρώντας ότι ο πίνακας G είναι m X n, και L είναι p X n με $m \geqslant n \geqslant p$ (τάξη(L)=n και τα μηδενικά διαστήματα των G και L τέμνονται μόνο στην μηδενικό διάνυσμα) υπάρχουν οι πίνακες U,Λ,M και X με τις ακόλουθες ιδιότητες.

- U είναι m X n με ορθοκανονικές στήλες
- V είναι p X p και ορθογώνιος
- X είναι n X n και nonsingular
- Λ είναι p X p διαγώνιος πίνακας με
$$0 \leqslant \lambda_1 \leqslant \lambda_2 \ldots \leqslant \lambda_p \leqslant 1$$
- M είναι p X p διαγώνιος πίνακας με
$$1 \geqslant \mu_1 \geqslant \mu_2 \geqslant \ldots \geqslant \mu_p \geqslant 0$$
- Τα λ_i και μ_i και κανονικοποιούνται έτσι ώστε
$$\lambda_i^2 + \mu_i^2 = 1, \ i=1,2,\ldots,p$$

- Οι γενικευμένες ιδιοτιμές είναι

$$\gamma_i = \frac{\lambda_i}{\mu_i}$$
$$\text{και}\; 0 \leqslant \gamma_1 \leqslant \gamma_2 \ldots \leqslant \gamma_p$$

- $G = U \begin{bmatrix} \Lambda & 0 \\ 0 & I_{n-p} \end{bmatrix} X^{-1}$
- $L = V[M\; 0]X^{-1}$
- $X^T G^T G X = \begin{bmatrix} \Lambda^2 & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}$
- $X^T L^T L X = \begin{bmatrix} M^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$
- Όταν p < n ο πίνακας L θα έχει nontrivial κενό διάστημα στο οποίο τα διανύσματα $X_{.,p+1}$,$X_{.,p+2}$, ... $X_{.,n}$ θα σχηματίζουν μια βάση.

Οπότε η λύση που προκύπτει από την ανάλυση GSVD είναι

$$m_{a,L} = \sum_{i=1}^{P} \frac{\gamma_i^2}{\gamma_i^2 + \alpha^2} X_{.,i} + \sum_{i=p+1}^{n} (U_{.,i}^T d) X_{.,i} \tag{3.36}$$

όπου ο παράγοντας $\frac{\gamma_i^2}{\gamma_i^2 + \alpha^2}$ είναι ο παράγοντας φίλτρου για την GSVD.

Αντίστοιχα με μορφή πινάκων η λύση γίνεται

$$m_a = (G^T G + \alpha^2 L^T L)^{-1} G^T d \tag{3.37}$$

$$= \quad G^{\#} d \tag{3.38}$$

Και ο αντίστοιχος πίνακας ανάλυσης γίνεται πάλι

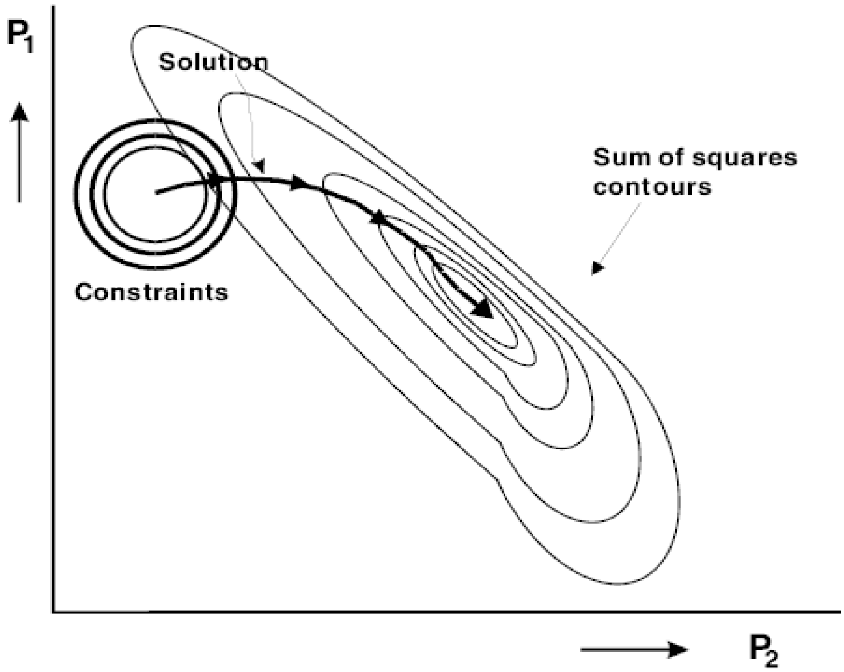
$$R_{m,a} = G^{\#} G \tag{3.39}$$

3.6 Εύρεση πολλαπλασιαστή Lagrange

Η εύρεση της τιμής του πολλαπλασιαστή Lagrange, είναι πολύ κρίσιμη για την τελική λύση του συστήματος των εξισώσεων της αντιστροφής. Από την σχέση 3.29 και 3.36, φαίνεται ότι μικρή τιμή του πολλαπλασιαστή μπορεί να οδηγήσει τη λύση σε αστάθεια, ενώ αντίθετα μεγάλη τιμή του δεν επιτρέπει διαφοροποίηση στις παραμέτρους m_a.

3.6.1 Υπολογισμός πολλαπλασιαστή Lagranian

Η συνηθέστερη μέθοδος που ακολουθείται είναι η αρχική υπόθεση μιας μεγάλης τιμής για να αποτραπεί η αστάθεια, και όσο η λύση πλησιάζει την πραγματική, την ελάττωση του πολλαπλασιαστή. Μια γεωμετρική αναπαράσταση της τεχνική αυτής (σχήμα 3.4), έγινε από τους Box και Kanemasu (1072) για δύο παραμέτρους p1 και p2. Έτσι η λύση των ελαχίστων τετραγώνων αναπαριστάται με μια σειρά από ελλειπτικές ισοϋψείς και η λύση στοχεύει στην ελαχιστοποίηση του αθροίσματος των τετραγώνων κάτω από κυκλικούς περιορισμούς των οποίων οι άξονες είναι παράλληλοι στον p1 και p2 άξονα Η λύση αυτή, συνήθως απαιτεί ένα πλήθος δοκιμών, καθώς δεν είναι δυνατή η εξαρχής γνώση της αρχικής τιμής.



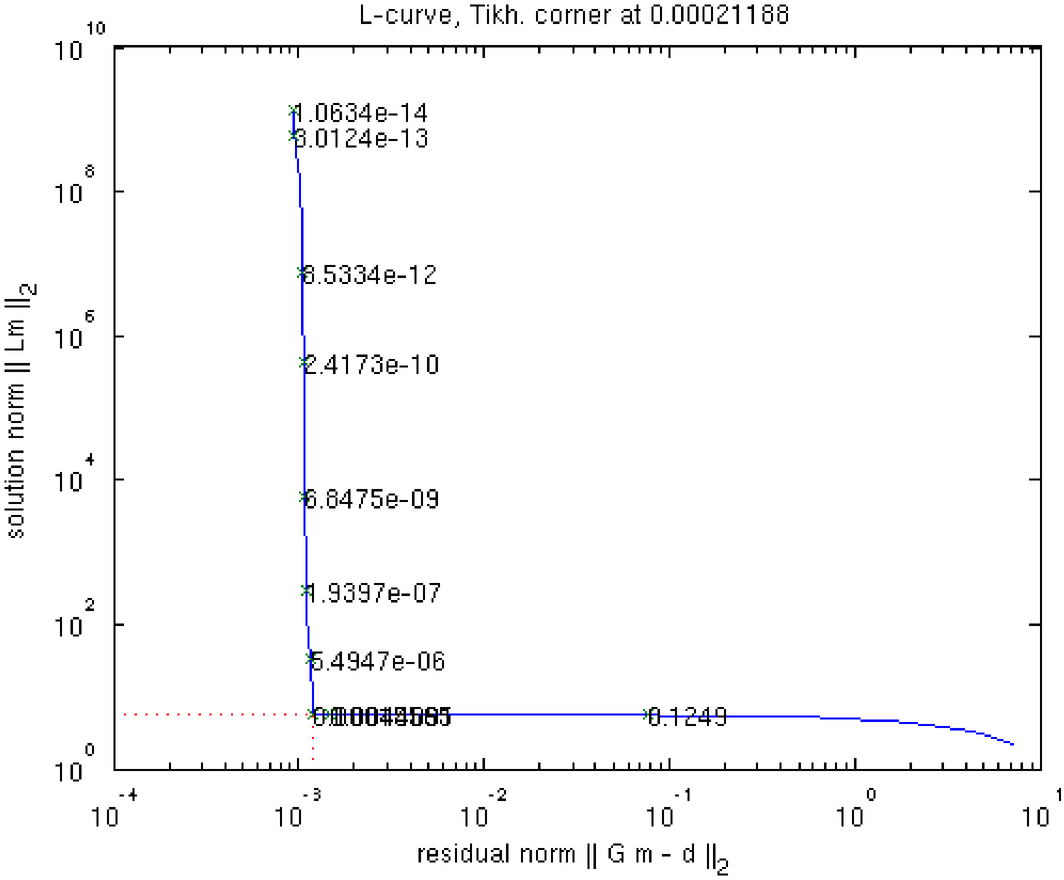
Σχήμα 3.4
Αναπαράσταση της λύσης
ελαχίστων τετραγώνων δύο
παραμέτρων p1 και p2
(Box and Kanemasu 1977)

3.6.2 Καμπύλη L

Ένα από τα πιο διαδεδομένα εργαλεία για την εύρεση του πολλαπλασιαστή, είναι η καμπύλη L. Όταν σε ένα διλογαριθμικό διάγραμμα, σχεδιαστούν τα $\|Lm\|_2$ και $\|Gm-d\|_2$ η καμπύλη που προκύπτει, συχνά, έχει την χαρακτηριστική μορφή L. Αυτό συμβαίνει διότι το $\|Lm\|_2$ είναι γνησίως φθίνουσα συνάρτηση του α ενώ το $\|Gm-d\|_2$ γνησίως αύξουσα συνάρτηση του α.

Σε αρκετά προβλήματα αυτή η χαρακτηριστική γωνία είναι και η βέλτιστη τιμή του πολλαπλασιαστή α της σχέσης .

Η καμπύλη L αποτελείται από δύο τμήματα, ένα οριζόντιο και ένα κατακόρυφο. Το οριζόντιο ορίζει την περιοχή που το σύστημα είναι ευαίσθητο στις αλλαγές του μέτρου της λύσης, οπότε αύξηση του πολλαπλασιαστή αυξάνει την διαφορά από τα πραγματικά δεδομένα. Το κατακόρυφο τμήμα ορίζει την περιοχή που το σύστημα είναι ευαίσθητο στις αλλαγές του μέτρου των υπολοίπων. Οποιαδήποτε περαιτέρω προσπάθεια βελτίωσης του σφάλματος, προκαλεί αύξηση του μέτρου της λύσης. Τα δυο αυτά τμήματα της καμπύλης, χωρίζονται από ένα σημείο καμπής, που είναι και η βέλτιστη τιμή για τον πολλαπλασιαστή.



Σχήμα 3.5
Χαρακτηριστική καμπύλη L, όπου
παρουσιάζεται και η χαρακτηριστική γωνία

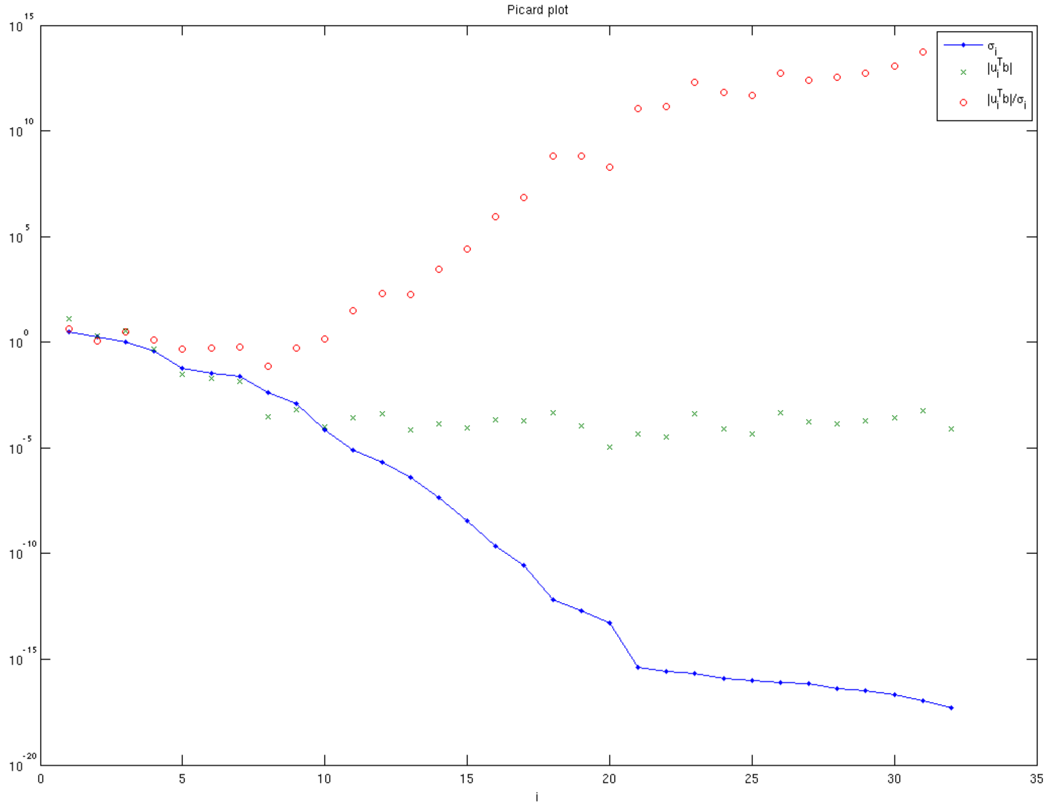
3.6.3 Συνθήκη Picard

Η τεχνική αυτή συνήθως γίνεται ταυτόχρονο με την καμπύλη L. Γίνεται διάγραμμα των μεγεθών :

α) Ιδιοτιμές S_i που προκύπτουν από την ανάλυση SVD
β) της ποσότητας $|U_i^T d|$
γ) και της ποσότητας $|U_i^T d|/S_i$
για τις διάφορες τιμές του i.

Η συνθήκη αυτή ορίζεται ως (Hansen 1990,2003) :

Αν d τα μη διαταραγμένα δεδομένα, τότε αυτά ικανοποιούν την συνθήκη Picard, αν και μόνο αν για κάθε μη μηδενική ιδιοτιμή S_i η αντίστοιχοι ποσότητα |UiTd| μειώνεται κατά μέσο όρο ταχύτερα από την S_i.



Σχήμα 3.6
Διάγραμμα συνθήκης Piccard

Από το διάγραμμα, φαίνεται ότι το |UiTd| φτάνει σε ένα όριο θορύβου περίπου 10^{-6} μετά την ιδιοτιμή i=11. Η ιδιοτιμές συνεχίζουν να μειώνονται, ενώ αντίθετα ο λόγος $U_i^T d|/S_i$ αυξάνει και μάλιστα με μεγάλο ρυθμό. Είναι σαφές ότι για ιδιοτιμές μετά την 11 δεν μπορούμε να έχουμε χρήσιμες πληροφορίες για την λύση. Η $11^η$ ιδιοτιμή έχει τιμή περίπου $5.1 * 10^{-5}$, που είναι συγκρίσιμη με την τιμή του πολλαπλασιαστή που υπολογίστηκε από την μέθοδο καμπύλης L ($\alpha=2.1 *10^{-5}$)

3.6.4 Ενεργά χωρικά μεταβαλλόμενος πολλαπλασιαστής (ACB)

Οι Myeong-Jong Yi et al 2003 πρότειναν την μέθοδο του ACB, με την εύρεση διαφορετικού πολλαπλασιαστή για κάθε παράμετρο, βασιζόμενοι σε ανάλυση του πίνακα ανάλυσης. Η μέθοδος αυτή βρίσκει πολύ καλή εφαρμογή σε μετρήσεις borehole-surface και crosshole-surface. Στην παρούσα διατριβή έγινε εφαρμογή της και σε μετρήσεις μόνο επιφανειακές.

Αναλυτικότερα ο πίνακας ανάλυσης είναι ο

$$R=J^+J \qquad (3.40)$$

όπου J^+ είναι ο ψευδοαντίστροφος ($J^+=[\, J^TJ + \lambda C^TC\,]^{-1}\, J^T$) (3.41)

Ο πίνακας ανάλυσης δείχνει το πόσο καλά μια παράμετρος είναι προσδιορισμένη. Αν μια παράμετρος είναι τέλεια προσδιορισμένη πρέπει η αντίστοιχη γραμμή του πίνακα ανάλυσης να έχει τιμή 1 για την παράμετρο αυτή και μηδέν σε όλες τις άλλες θέσεις. Αντίθετα αν μια παράμετρος δεν είναι καθόλου καλά προσδιορισμένη η αντίστοιχη γραμμή του πίνακα ανάλυσης, θα έχει τυχαίες τιμές χωρίς να παίρνει την τιμή 1 πουθενά.

Επομένως μια καλά προσδιορισμένη παράμετρος χρειάζεται μικρή τιμή του πολλαπλασιαστή, ενώ αντίθετα μια όχι καλά προσδιορισμένη παράμετρος απαιτεί μεγάλη τιμή του πολλαπλασιαστή. Η ποσοτικοποίηση της παραπάνω έκφρασης γίνεται με την Backus-Gilbert spread function (Menke, 1984) η οποία υπολογίζει την πλευρική κατανομή των γραμμών του πίνακα ανάλυσης. Μεγάλη τιμή της Spread function σημαίνει ότι η παράμετρος είναι φτωχά προσδιορισμένη και το αντίστροφο. Ο υπολογισμός του spread function για την i παράμετρο γίνεται ώς εξής

$$SP_i = \sum_{j=1}^{N} (W_{ij}(1-S_{ij}) R_{ij})^2 \qquad (3.42)$$

όπου N ο αριθμός των παραμέτρων W_{ij} παράγοντας βάρους, που υπολογίζεται από τις πλευρικές αποστάσεις των παραμέτρων i και j. Ο πίνακας S_{ij} χρησιμοποιείται ώστε να στον υπολογισμό να λαμβάνεται υπόψιν και ο πίνακας συνάφειας. S_{ij} είναι 1 όταν ο πίνακας συνάφειας C είναι μη μηδενικός και 0 σε όλες τις άλλες θέσεις.

Επομένως η βασική σχέση τροποποιείται και γίνεται

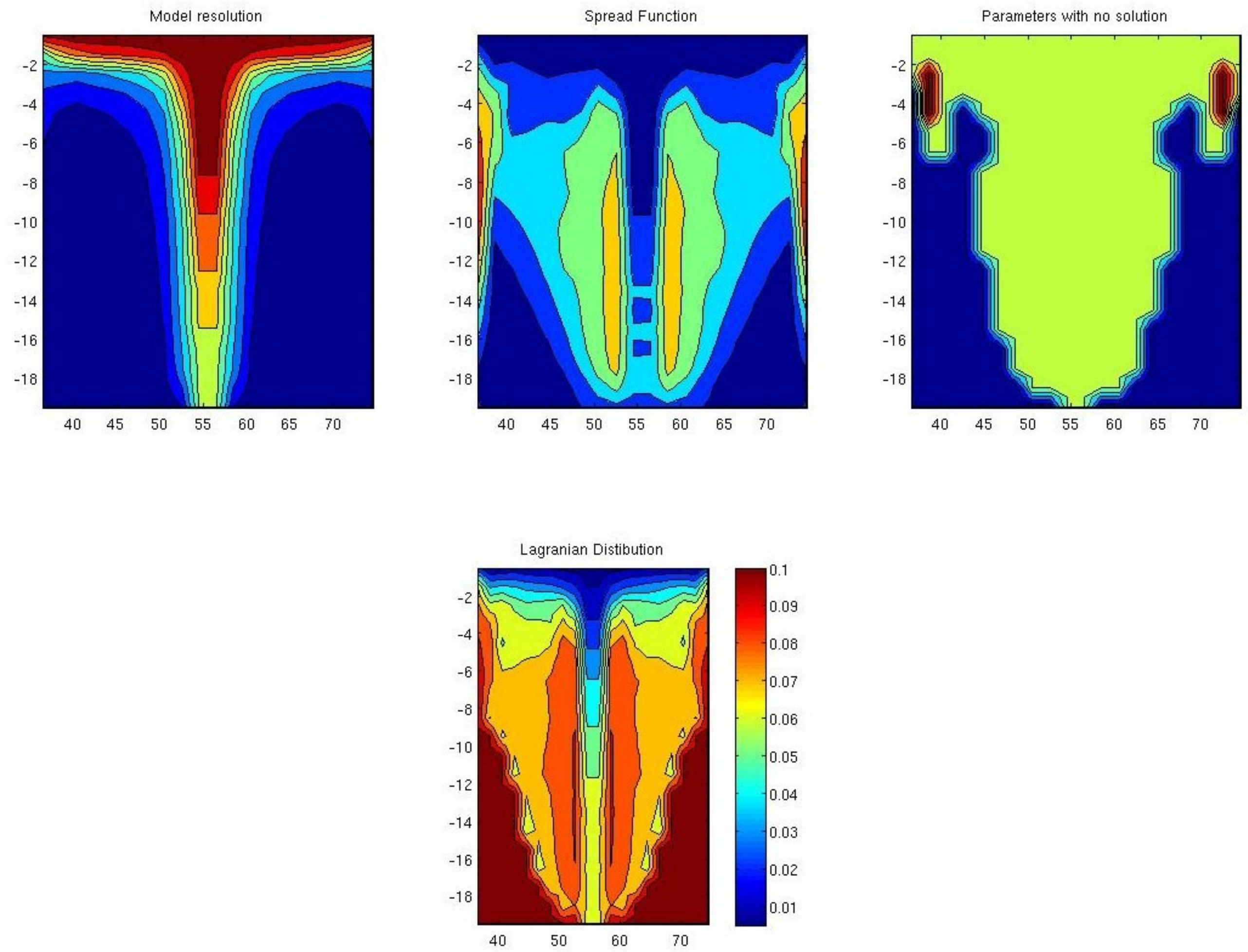
$$dx = [J^T J + C^T \Lambda C]^{-1} J^T dy \qquad (3.43)$$

Η διαδικασία υπολογισμού του πίνακα Λ γίνεται με ένα αρχικό υπολογισμό του Resolution matrix με κάποιο μικρό αρχικά πολλαπλασιαστή. Εν συνεχεία μετατρέπεται το spread function σε μεταβαλλόμενο πολλαπλασιαστή μεταξύ προαποφασισμένων ορίων, σε λογαριθμική κλίμακα σύμφωνα με τον παρακάτω αλγόριθμο (Myeong-Jong Yi et al 2003).

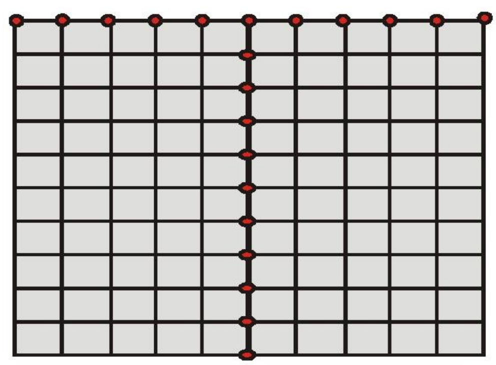
$$\log(\lambda_i) = \log(\lambda_{min}) + \frac{\log(\lambda_{max}) - \log(\lambda_{min})}{\log(SP_{max}) - \log(SP_{min})} * (\log(SP_i) - \log(SP_{min})) \qquad (3.44)$$

όπου λ_ι είναι ο πολλαπλασιαστής της παραμετρου i , SP_i είναι το spread function της παραμέτρου i, λ_{min} και λ_{max} τα κάτω και άνω όρια των πολλαπλασιαστών, και SP_{min} και SP_{max} το ελάχιστο και μέγιστο της spread function.

Μια εφαρμογή της μεθόδου παρουσιάζεται στο σχήμα 3.7 και αφορά μετρήσεις που συλλέγονται από borehole-surface (σχήμα 3.8)



Σχήμα 3.7
Χωρική κατανομή πολλαπλασιαστών σε ομογενή γη με μετρήσεις από borehole-surface. Με κόκκινο παρουσιάζονται μεγάλες τιμές του πολλαπλασιαστή, καθώς σε αυτές δεν έχουμε καλή λύση. Ενδιαφέρον βρίσκεται στα κάτω αριστερά και δεξιά άκρα του χώρου, όπου το Spread Function είναι μικρό αλλά εκεί δεν υπάρχει λύση.



Σχήμα 3.8
Διακριτοποίηση χώρου για μετρήσεις Borehole-surface. Με κόκκινο σημειώνονται οι θέσεις των ηλεκτροδίων

3.6.5 Αλγόριθμοι ελαχιστοποίησης

Μια κατηγορία εύρεσης των πολλαπλασιαστών αποτελεί η εύρεση εκείνου του πολλαπλασιαστή που ελαχιστοποιεί το τη διαφορά μεταξύ των πραγματικών και υπολογισμένων δεδομένων. Πρόκειται για μια επαναληπτική διαδικασία που απαιτεί την λύση του ευθέος προβλήματος για ένα σύνολο τιμών του πολλαπλασιαστή. Η αναλυτικότερη παρουσίαση της μεθόδου θα πραγματοποιηθεί στο επόμενο κεφάλαιο.

3.7 Μη γραμμικά προβλήματα – Αλγόριθμος Occam

Τα περισσότερα γεωφυσικά προβλήματα είναι μη γραμμικά. Για την επίλυση τέτοιων , προβλημάτων χρησιμοποιείται ο αλγόριθμος του Occam, που προϋποθέτει γραμμική την μεταβολή της διόρθωσης του μοντέλου. Πιο συγκεκριμένα δίνοντας ένα αρχικό μοντέλο m^k, και χρησιμοποιώντας το θεώρημα Taylor (οι όροι ανωτέρας τάξης παραλείπονται), έχουμε

$$G(m^k+\Delta m)\approx G(m^k)+J(m^k)\Delta m \qquad (3.45)$$

όπου $J(m^k)$ είναι ο ιακωβιανός.

$$J(m^k)=\begin{bmatrix} \partial\dfrac{G_1(m^K)}{\partial m_1} & \dots & \partial\dfrac{G_1(m^K)}{\partial m_n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \partial\dfrac{G_m(m^K)}{\partial m_1} & \dots & \partial\dfrac{G_n(m^K)}{\partial m_n} \end{bmatrix} \qquad (3.46)$$

Χρησιμοποιώντας την λύση damped ελαχίστων τετραγώνων το σύστημα γίνεται

$$min\|G(m^\kappa)+J(M^k)\Delta m-d\|_2^2+\alpha^2\|L(m+\Delta m)\|_2^2 \qquad (3.47),$$

όπου το Δm είναι η μεταβλητή και m^k σταθερό. Επιπλέον γνωρίζοντας ότι

$$m^{k+1}=m^k+\Delta m \qquad (3.48)$$

και ακόμα ότι

$$d(m^k) = d - G(m^k) + J(m^k)m^k \qquad (3.49)$$

Οπότε το τελικό σύστημα γίνεται

$$min\|J(m^\kappa)m^{k+1}\hat{d}(m^k)\|_2^2+\alpha^2\|L(m^{\kappa+1})\|_2^2 \qquad (3.50)$$

Επειδή $J(m^k0$ και $d(m^k)$ είναι σταθερές, η λύση με τη μορφή των ελαχίστων τετραγώνων γίνεται

$$m^{k+1}=m^k+\Delta m=(J(m^k)^T J(m^k)+\alpha^2 L^T L)^{-1} J(m^k)^T \hat{d}(m^k) \qquad (3.51)$$

Κεφάλαιο 4

Δισδιάστατη αντιστροφή αντιστάσεων και παχών

Εισαγωγή

Η συλλογή ηλεκτρικών δεδομένων με διατάξεις πολλαπλών ηλεκτρόδιων, είναι ιδιαίτερα διαδεδομένη στην διασκόπιση του υπεδάφους. Τα δεδομένα αυτά, έχουν μεγάλη πυκνότητα και μεγάλη επικάλυψη μεταξύ τους, με αποτέλεσμα να είναι εφικτή η δισδιάστατη ερμηνεία τους. Την τελευταία δεκαετία, έχουν αναπτυχθεί αρκετοί αλγόριθμοι δισδιάστατης ερμηνείας, όπως των Oldenburg and Li (1994), Loke and Barker (1996) και Tsourlos (1998). Αυτοί οι αλγόριθμοι παράγουν μοντέλα βασιζόμενοι σε εξομαλυσμένη αντιστροφή, (δηλαδή η αντιστροφή είναι L2-norm), με αποτέλεσμα απότομα όρια σχηματισμών να μην είναι εύκολα αναγνωρίσιμα. Έχουν παρουσιαστεί και μέθοδοι με L1-norm αντιστροφής , όπου τα όρια των παραμέτρων του μοντέλου έχουν πιο διακριτή μορφή. Με δεδομένο όμως ότι το πλέγμα των παραμέτρων παραμένει σταθερό, δεν είναι δυνατόν να προσδιοριστούν με ακρίβεια τα όρια των δομών.

Έτσι προέκυψε η ανάγκη για μια καινούρια κατηγορία αλγορίθμων που θεωρούν το πάχος των παραμέτρων μεταβλητό (Christiansen and Auken (2003,2004), Pujari et al (2000), Smith et al (1999), Gallardo and Meju (2003)).

Οι συγκεκριμένοι αλγόριθμοι βρίσκουν εφαρμογές σε συγκεκριμένες περιπτώσεις, όπου ο προσδιορισμός του ακριβούς πάχους ενός σχηματισμού είναι σημαντικός και έρχονται να συμπληρώσουν και όχι να αντικαταστήσουν τους πετυχημένους υπάρχοντες αλγορίθμους δισδιάστατης αντιστροφής.

Παρακάτω γίνεται ανάλυση των δύο τύπων αλγορίθμων αντιστροφής αντιστάσεων και παχών που υπάρχουν, ανάλογα με τον ρόλο του πάχος.

4.1 Ειδικοί αλγόριθμοι- πάχος ως δευτερεύουσα παράμετρος

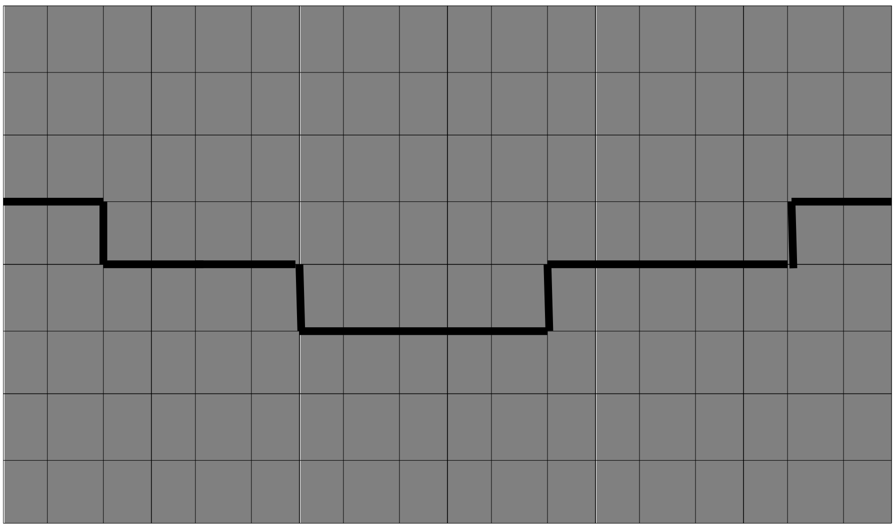
Σε αυτήν την κατηγορία υπάρχουν αλγόριθμοι που χρησιμοποιούν έμμεσες μεθόδους για τον προσδιορισμό των παραμέτρων του πάχους.

Σε αυτήν την περίπτωση οι αλγόριθμοι προϋποθέτουν ως γνωστή την κατανομή της αντίστασης στο χώρο και πραγματοποιείται πραγματοποιείται αντιστροφή για την έρευνα του αγνώστου πάχους των παραμέτρων. Η γνώση της κατανομής των αντιστάσεων μπορεί να βρεθεί από μια δισδιάστατη κοινή αντιστροφή ή από απευθείας παρατήρηση της περιοχής ενδιαφέροντος. Στόχος αυτών των μεθόδων είναι η καλύτερη αναπαράσταση της στρωματογραφίας μιας περιοχής. Στην ίδια κατηγορία βρίσκονται και αλγόριθμοι που μπορούν να αξιοποιήσουν δεδομένα που προκύπτουν από άλλες μεθόδους (joint inversion).

Τέλος έχουν αναπτυχθεί και αλγόριθμοι σε άλλων ειδών δεδομένα όπως μαγνητοτελουρικα, μαγνητικά σεισμικά κ.α., όπως παραδείγματος χάρη των Smith et al (1999) που έχουν αναπτύξει αλγόριθμο για δισδιάστατη αντιστροφή αντιστροφή μαγνητοτελλουρικών δεδομένων, με παραμέτρους μόνο τα πάχη ή πάχη και αντιστάσεις.

<u>Αναλυτικότερα :</u>

Ο αλγόριθμος των Pujari et al (2000), χρησιμοποιεί a-priori γνωστή την κατανομή των αντιστάσεων στο χώρο, και γίνεται μοντελοποίηση με παραμέτρους (αγνώστους) μόνο τα πάχη των στρωμάτων σε συγκεκριμένα σημεία κατά μήκος του προφίλ (σχήμα 4.1).



Σχήμα 4.1
Προσέγγιση
Pujari et al

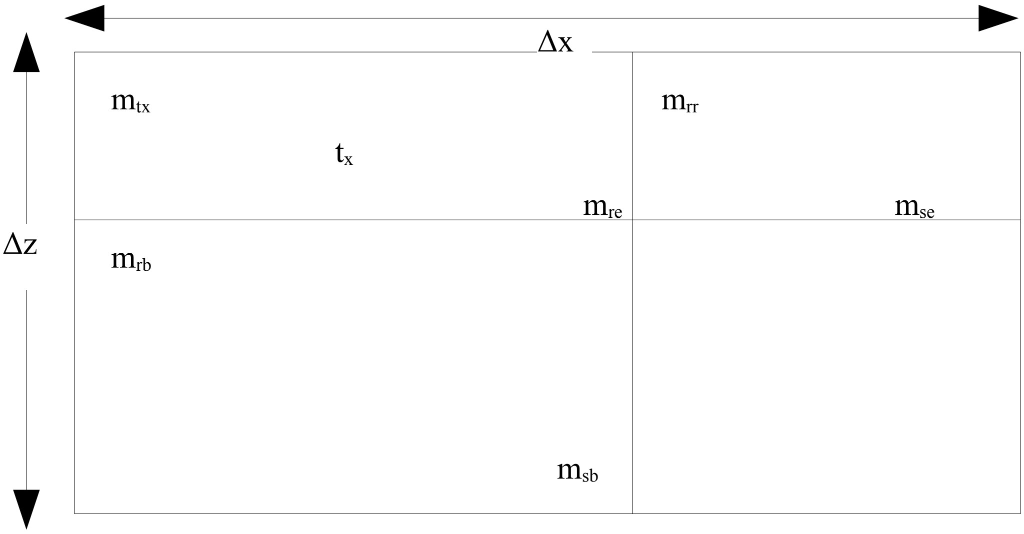
Έτσι το υπέδαφος χωρίζεται σε περιοχές (τετράγωνα) με γνωστή αντίσταση. Οι περιοχές αυτές ομαδοποιούνται, δημιουργούνται δηλαδή περιοχές που έχουν ίδια τιμής αντίστασης με αυτά που ανήκουν στο ίδιο στρώμα. Το πάχος του στρώματος υπολογίζεται κάτω από κάποια διακριτά σημεία. Για το ευθύ πρόβλημα χρησιμοποιείται ο αλγόριθμος των πεπερασμένων διαφορών των Dey and Morrison (1979), ενώ για εξομάλυνση ακολουθείται η πρώτου βαθμού κανονικοποίηση Tikhonov, και οι παράγωγοι υπολογίζονται με την μέθοδο των διαταραχών.

Οι Gallardo and Meju (2003), ακολούθησαν μια συνδυασμένη αντιστροφή σεισμικών και ηλεκτρικών δεδομένων, με την έννοια ότι η ύπαρξη μιας ασυνέχειας πρέπει να επηρεάζει με όμοιο τρόπο τις φυσικές ιδιότητες ταχύτητα και αντίσταση.

Ο συσχετισμός των δύο φυσικών ιδιοτήτων προκύπτει από το εξωτερικό γινόμενο των βαθμίδων αντιστάσεων και ταχυτήτων. $\vec{t}(x,y,z)=\nabla m_r(x,y,z)\, X\, \nabla m_s(x,y,z)$ (4.1), όπου m_r και m_s αναφέρονται στο μοντέλο των αντιστάσεων και ταχυτήτων αντίστοιχα. Η διακριτή εκδοχή της σχέσης (4.1) για ένα μοντέλο όπως του σχήματος 4.2 είναι

$$t \simeq \frac{4}{\Delta x\, \Delta z}\left(m_{rc}(m_{sb}-m_{sr})+m_{rr}(m_{sc}-m_{sb})+m_{rb}(msr-m_{sc})\right) \qquad (4.2)$$

Το μοντέλο της γης σχηματίζεται από ορθογώνια κελιά μεταβλητού σχήματος, με συγκεκριμένες τιμές αντιστάσεων και ταχυτήτων (σχήμα 4.2).



Σχήμα 4.2
Μοντέλο Gallardo and Meju

Οπότε η λύση αναζητείται στην ελαχιστοποίηση της

$$\Phi(m_r,m_s)=\left\|\begin{matrix} d_r - f_r(m_r) \\ d_s - f_s(m_s)\end{matrix}\right\|^2_{C_{dd}^{-1}} + \left\|\begin{matrix} a_r D m_r \\ a_s D m_s\end{matrix}\right\|^2 + \left\|\begin{matrix} m_r - m_{Rr} \\ m_s - m_{Rs}\end{matrix}\right\|^2_{C_{RR}^{-1}} \qquad (4.3)$$

και t(m)=0

- d είναι τα δεδομένα (d_r για τις αντιστάσεις και d_s για τους χρόνους διαδρομής)
- m είναι το μοντέλο (m_r για τις αντιστάσεις και m_s ταχυτήτων)
- f η επίλυση του ευθέως μοντέλου
- D ο πίνακας συνάφειας
- C_{DD} ο πίνακας συμεταβλητότητας με τα δεδομένα
- C_{RR} ο πίνακας συμεταβλητότητας με το a-priori μοντέλο
- a_r και a_s οι πολλαπλασιαστές lagranian

Γενικοί αλγόριθμοι – πάχος ως πρωτεύουσα παράμετρος

Σε αυτήν την κατηγορία υπάγονται αλγόριθμοι που το πάχος αποτελεί πρωταρχική μεταβλητή του του συστήματος, και γίνεται προσπάθεια εξαγωγής του κατευθείαν από τα δεδομένα της ηλεκτρικής τομογραφίας. Πρόκειται για ένα νέο τρόπο αντιστροφής, που συνδυάζονται ετερογενής παράμετροι (αντιστάσεις – πάχη), με σκοπό την εύρεση μιας κοινή λύσης. Κυριότεροι αλγόριθμοι σε αυτήν την κατηγορία είναι των Christiansen and Auken (2003,2004).

Οι Christiansen and Auken (2003,2004) έχουν προτείνει αλγόριθμους τόσο μονοδιάστατους όσο και δισδιάστατους. Η μοντελοποίησή τους ακολουθεί όμοιο τρόπο με την μοντελοποίησή που θα αναπτυχθεί σε αυτήν την διατριβή. Οι παράμετροι χωρίζονται σε πρωτογενείς (αντιστάσεις-πάχη) και δευτερογενείς (βάθη). Για το ευθύ πρόβλημα χρησιμοποιείται ο αλγόριθμος του McGillivray (1992) για πεπερασμένες διαφορές, ενώ οι παράγωγοι υπολογίζονται ως μονοδιάστατες διαταραχές.

Για τις πρωτογενείς παραμέτρους χρησιμοποιούνται μόνο πλευρικοί περιορισμοί για τον πίνακα συνάφειας R_P με την πρώτου βαθμού Tikhnov κανονικοποίηση.

Δηλαδή ο πίνακας είναι

$$\mathbf{R}_p = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & \vdots & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & -1 \end{bmatrix} \tag{4.4}$$

Εισάγονται ακόμα και a-priori πληροφορίες για τις πρωτογενείς παραμέτρους ως

$Im_{true}=m_{prior} + e_{prior}$

όπου I είναι ο μοναδιαίος πίνακας και e_{prior} σφάλμα του πραγματικού μοντέλου με αναμενόμενη τιμή το μηδέν.

Η εισαγωγή πληροφοριών a-priori γίνεται για τα βάθη (δευτερογενείς παράμετροι), και όχι για τα πάχη των παραμέτρων, ώστε τα στρώματα στο μοντέλο που θα προκύψει από την αντιστροφή να παρουσιάζουν πλευρική συνέχεια και να μην διακόπτονται. Σε αντίθετη περίπτωση, δηλαδή εισαγωγή a-priori πληροφοριών στα πάχη, επιτρέπει την μη συνέχεια των στρωμάτων π.χ. λόγω διακοπής αυτών από κάποιο ρήγμα.

Η εισαγωγή της a-priori πληροφορίας γίνεται σε σχέση με τις πρωτογενείς παραμέτρους ως εξής

$$P_h m_{true}=h_{prior} + e_{h\text{-}prior} \tag{4.5}$$

Όπου m_{true} οι παράμετροι της αντιστροφής, h_{prior} η a-priori πληροφορία για τα βάθη $e_{h\text{-}prior}$ το σφάλμα μεταξύ τους και. Ο συμβολισμός $h_{k,l}$ αφορά το βάθος του στρώματος και $t_{k,l}$ το παχος του συγκεκριμένου στρώματος.

Ο πίνακας P_h περιέχει τις παραγώγους των δευτερογενών παραμέτρων από τις πρωτογενείς και είναι μηδέν για τις παραγώγους ως προς τις αντιστάσεις και τις μορφής

$$\frac{\partial \log(h_{k,l})}{\partial \log(t_{i,j})} = \frac{t_{i,j}}{h_{k,l}} \cdot \frac{\partial h_{k,l}}{\partial t_{i,j}} = \frac{t_{i,j}}{h_{k,l}} \cdot \frac{\partial \sum_{s=1}^{l} t_{k,s}}{\partial t_{i,j}} = \begin{cases} \frac{t_{i,j}}{h_{i,j}} & \text{for } i = k \text{ and } j \leq l \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \tag{4.6}$$

οπότε ο πίνακας γίνεται

$$\mathbf{P}_h = \begin{bmatrix} \cdots & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots \\ \cdots & 0 & \cdots & 0 & \frac{t_{k,1}}{h_{k,2}} & \frac{t_{k,2}}{h_{k,2}} & 0 & \cdots & 0 & \cdots \\ & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & & \vdots & \\ \cdots & 0 & \cdots & 0 & \frac{t_{k,1}}{h_{k,n}} & \frac{t_{k,2}}{h_{k,n}} & \frac{t_{k,3}}{h_{k,n}} & \cdots & \frac{t_{k,n}}{h_{k,n}} & \cdots \end{bmatrix} \tag{4.7}$$

Τέλος υπολογίζονται οι παράγωγοι σε σχέση με τα βάθη για να σχηματιστεί ο πίνακας R_h

$$\begin{aligned}\frac{\partial(\log(h_{k,l})-\log(h_{k+1,l}))}{\partial\log(t_{i,j})} &= \frac{\partial\log(h_{k,l})}{\partial\log(t_{i,j})} - \frac{\log(h_{k+1,l})}{\partial\log(t_{i,j})} \\ &= \frac{t_{i,j}}{h_{k,l}}\cdot\frac{\partial\sum_{s=1}^{l}t_{k,s}}{\partial t_{i,j}} - \frac{t_{i,j}}{h_{k+1,l}}\cdot\frac{\partial\sum_{s=1}^{l}t_{k+1,s}}{\partial t_{i,j}} \\ &= \begin{cases}\dfrac{t_{i,j}}{h_{i,j}} - \dfrac{t_{i+1,j}}{h_{i+1,j}} & \text{for } i=k \text{ and } j\le l \\ 0 & \text{otherwise}\end{cases},\end{aligned} \tag{4.8}$$

οπότε ο πίνακας γίνεται

$$\mathbf{R}_h = \left[\begin{array}{ccccccccccccccccccccc} \cdots & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & \cdots & 0 & \cdots & 0 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots \\ \cdots & 0 & \cdots & 0 & \frac{t_{k,1}}{h_{k,2}} & \frac{t_{k,2}}{h_{k,2}} & 0 & \cdots & 0 & \cdots & \cdots & 0 & \cdots & 0 & -\frac{t_{k+1,1}}{h_{k+1,2}} & -\frac{t_{k+1,2}}{h_{k+1,2}} & 0 & \cdots & 0 & \cdots \\ & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & & \vdots & & & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & & \vdots & \\ \cdots & 0 & \cdots & 0 & \frac{t_{k,1}}{h_{k,n}} & \frac{t_{k,2}}{h_{k,n}} & \frac{t_{k,3}}{h_{k,n}} & \cdots & \frac{t_{k,n}}{h_{k,n}} & \cdots & \cdots & 0 & \cdots & 0 & -\frac{t_{k+1,1}}{h_{k+1,n}} & -\frac{t_{k+1,2}}{h_{k+1,n}} & -\frac{t_{k+1,3}}{h_{k+1,n}} & \cdots & -\frac{t_{k+1,n}}{h_{k+1,n}} & \cdots \end{array}\right]$$

Τελικά, το σύστημα που αντιστρέφεται γίνεται

$$\begin{bmatrix}\mathbf{G}\\ \mathbf{P}_p\\ \mathbf{P}_h\\ \mathbf{R}_p\\ \mathbf{R}_h\end{bmatrix}\cdot\delta\mathbf{m}_{true} = \begin{bmatrix}\delta\mathbf{d}_{obs}\\ \delta\mathbf{m}_{prior}\\ \delta\mathbf{m}_{h-prior}\\ \delta\mathbf{r}_p\\ \delta\mathbf{r}_h\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}\mathbf{e}_{obs}\\ \mathbf{e}_{prior}\\ \mathbf{e}_{h-prior}\\ \mathbf{e}_{rp}\\ \mathbf{e}_{rh}\end{bmatrix} \tag{4.9}$$

4.2 Βασική θεωρία

Στα προηγούμενα κεφάλαια παρουσιάστηκαν οι βασικές αρχές των πεπερασμένων στοιχείων καθώς και της θεωρίας της αντιστροφής.

Ο αλγόριθμος της μη γραμμικής εξομαλυσμένης αντιστροφής, μπορεί να συνοψιστεί στην παρακάτω επαναληπτική διαδικασία

Για i=1 μέχρι εκπλήρωση κριτηρίου σύγκλισης

$$dx_{i+1}=dx_i+[J^T J+\lambda * C^T C]^{-1} * J^T dy$$

Τέλος

Το κριτήριο σύγκλισης είναι η μη σημαντική βελτίωση του μέσου τετραγωνικού σφάλματος (RMS) μεταξύ των πραγματικών δεδομένων και αυτών που υπολογίστηκαν.

- **J** είναι ο ιακωβιανός, δηλαδή ο πίνακας των μερικών παραγώγων του δυναμικού ως προς τις παραμέτρους ή αλλιώς δείχνει τον τρόπο που επηρεάζει μια παράμετρος την μέτρηση. Η εύρεση αυτών των παραγώγων θα αναπτυχθεί στην ενότητα 4.5

- **C** είναι ο πίνακας που ορίζει τους περιορισμούς μεταξύ των παραμέτρων, ή αλλιώς τις σχέσεις συνάφειας μεταξύ των παραμέτρων. Η επιλογή του βέλτιστου πίνακα συνάφειας θα αναπτυχθεί στην ενότητα 4.6.

- **dx** είναι η διόρθωση του μοντέλου

- **dy** η διαφορά των πραγματικών δεδομένων με τα συνθετικά.

- **λ** πολλαπλασιαστής lagranian, που συσχετίζει την βαρύτητα του πίνακα συνάφειας.

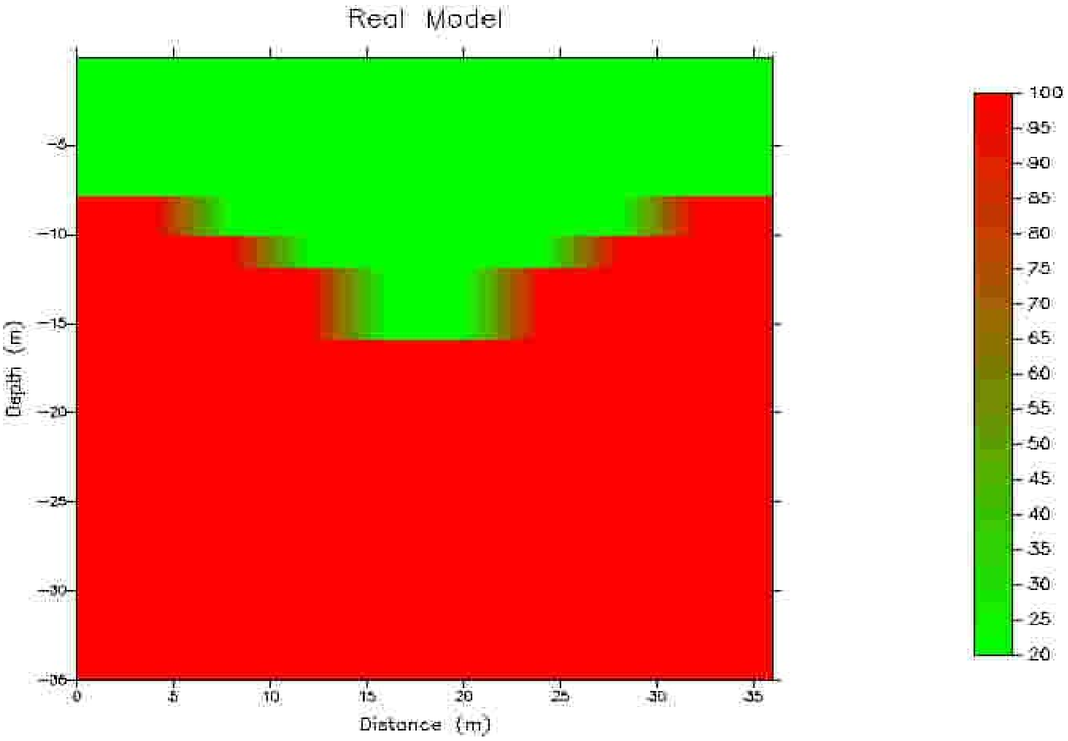
Σε κάθε διαδικασία αντιστροφής, ακολουθείται μια σειρά βημάτων, που απαιτείται για την επίλυση των εξισώσεων.

1) Μοντελοποίηση
2) Επίλυση ευθέος προβλήματος
3) Υπολογισμός παραγώγων
4) Επίλυση της σχέσης

Σε κάθε περίπτωση το ευθύ πρόβλημα λύθηκε σε δύο διαστάσεις, ενώ για τον υπολογισμό του ιακωβιανού πίνακα εξετάστηκαν δύο προσεγγίσεις

- Πρώτη, θεωρώντας την μεταβλητή του πάχος σαν μονοδιάστατη δηλαδή ότι η παράμετρος εκτείνεται άπειρα σε πλάτος ακριβώς όπως υπολογίζεται και σε μια μονοδιάστατη αντιστροφή
- Δεύτερη θεωρώντας την μεταβλητή του πάχους σαν δισδιάστατη, που είναι και ο θεωρητικά ορθός τρόπος. Όμως αυτή η προσέγγιση παρουσιάζει δυσκολίες στον ακριβή υπολογισμό του ιακωβιανού πίνακα, όπως θα συζητηθεί σε παρακάτω ενότητα.

Για τις δοκιμές συνθετικών μοντέλων που παρουσιάζονται θεωρήθηκαν 10 βυθοσκοπήσεις Wenner – Schlumberger με κέντρα σε ισόποσες αποστάσεις 4 μέτρων και αποστάσεις ηλεκτροδίων 2 μέτρα με μέγιστο n_{max} 10. Το μοντέλο που χρησιμοποιήθηκε αποτελείται από στρώμα και ημιχώρο και είναι το παρακάτω (σχήμα 4.3)



Σχήμα 4.3
Συνθετικό μοντέλο-παράδειγμα που χρησιμοποιήθηκε για τις δοκιμές των μεθόδων επίλυσης της αντιστροφής.

4.3 Μοντελοποίηση

Το πρώτο στάδιο σε ένα πρόβλημα αντιστροφής είναι η μοντελοποίηση-παραμετροποίηση. Ο αλγόριθμος βασίστηκε σε τροποποίηση υπάρχοντος αλγορίθμου δισδιάστατης αντιστροφής που ονομάζεται 2DINVS (Tsourlos 1998), με την προσθήκη του πάχους κάθε παραμέτρου στον πίνακα των μεταβλητών. Οι μετρήσεις θεωρήθηκε ότι συλλέγονται με τη μέθοδο του Wenner-Schlumberger, σαν συνεχόμενες βυθοσκοπήσεις με την χρήση πολλαπλών ηλεκτροδίων.

Κάθε βυθοσκόπηση αποτελεί ένα σημείο αναφοράς κατά μήκος του προφίλ και αποτελείται από ένα συγκεκριμένο αριθμό μετρήσεων. Κάτω από κάθε σημείο η γη διακριτοποιείται με ένα μοντέλο ν στρωμάτων με συγκεκριμένη αντίσταση ρ_ν και πάχος h_ν,

$$m_i = [\rho_{\iota 1}, \rho_{\iota 2}, \ldots, \rho_{\iota\nu}, h_{\iota 1}, h_{\iota 2}, \ldots, h_{\iota(\nu-1)}] \tag{4.10}$$

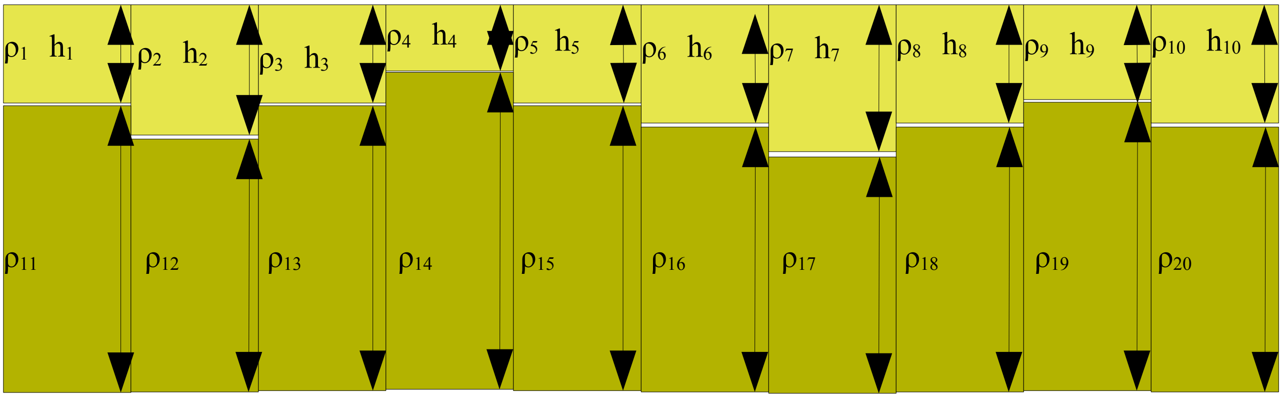
Εάν υποθέσουμε ότι οι μετρήσεις αποτελούνται από χ βυθοσκοπήσεις, οι συνολικοί παράμετροι του μοντέλου είναι

M=(αριθμός βυθοσκοπήσεων)*(2*αριθμός στρωμάτων -1)

Αρχικά απαιτείται η εισαγωγή κάποιου αρχικού μοντέλου,στον αλγόριθμο της αντιστροφής. Η σημαντικότερη παράμετρος που πρέπει να οριστεί είναι ο αριθμός των στρωμάτων, βάση του οποίου θα σχεδιαστεί το υπόλοιπο μοντέλο. Ο αριθμός των στρωμάτων αποτελεί μοναδικό χαρακτηριστικό, και δεν μπορεί να αλλάξει σε κανένα μεταγενέστερο στάδιο. Η επιλογή του λοιπόν, είναι προϊόν κατόπιν εκτεταμένης μελέτης της περιοχής του ενδιαφέροντος, όπως θα φανεί σε παρακάτω ανάλυση. Σε καμία περίπτωση δεν πρέπει να λαμβάνεται αρκετά μεγάλος αριθμός στρωμάτων (π.χ μεγαλύτερος των τεσσάρων), καθώς ο η βαρύτητα των παραμέτρων των παχών ελαττώνεται σημαντικά.

Ο σχεδιασμός του υπόλοιπου μοντέλου γίνεται με βάση τη γεωμετρία της διάταξης, με σημαντικότερες παραμέτρους τον αριθμό τον κέντρων βυθοσκοπήσεων και τις σχετικές αποστάσεις των ηλεκτροδίων. Κατόπιν σχεδιάζεται το πλέγμα των πεπερασμένων στοιχείων, με χρήση τριγωνικών στοιχείων όπως περιγράφεται στο κεφάλαιο 3.

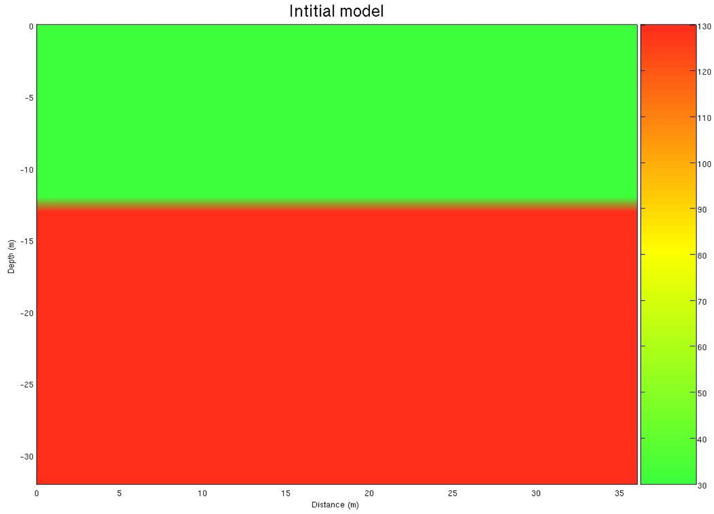
Έτσι για το μοντέλο που χρησιμοποιήθηκε για τα συνθετικά παραδείγματα (σχήμα 4.3), η παραμετροποίηση γίνεται όπως στο σχήμα 4.4.



Σχήμα 4.4
Τρόπος μοντελοποίησης της γης, και ορισμός των παραμέτρων. Στο σύνολο των 30 παραμέτρων που αποτελούν το πρόβλημα, οι 20 πρώτες αφορούν τις αντιστάσεις και οι επόμενες 10 τα πάχη.

Άρα υφίστανται 2χ10=20 παράμετροι για τις αντιστάσεις και 1χ10=10 παράμετροι για τα πάχη. Επομένως το σύστημα αποτελείται από 30 παραμέτρους, εκ των οποίων οι 20 πρώτες αφορούν τις αντιστάσεις και οι επόμενες 10 (δηλαδή 21 ως 30) τα πάχη. Οι παράμετροι που αναφέρονται στον ημιχώρο-υπόβαθρο θεωρούνται ότι έχουν άπειρο πάχος ,και σχεδιάζονται έμμεσα από τις διαστάσεις των υπερκείμενων παραμέτρων και το σχεδιασμό του πλέγματος. Σαν αρχικό πάχος των παραμέτρων μπορεί να θεωρηθεί ασφαλές σε αρκετές περιπτώσεις μια οριζόντια στρωματογραφία.

Σε όλα τα παραδείγματα που θα παρουσιαστούν στις επόμενες ενότητες σαν αρχικό μοντέλο χρησιμοποιήθηκε οριζόντια στρωματογραφία, δηλαδή στρώμα και ημιχώρος, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα 4.5. Σαν αρχικές τιμές αντιστάσεων μπορούν να χρησιμοποιηθούν τιμές που προκύπτουν από μια δισδιάστατη αντιστροφή αντιστροφή με σταθερά πάχη ή κατ' εκτίμηση τιμές που προκύπτουν από τα δεδομένα. Σε καμία όμως περίπτωση δεν είναι δυνατόν να χρησιμοποιηθεί ομογενής γη σαν αρχικό μοντέλο, διότι δεν νοήτε ασυνέχεια (δεν υπάρχουν διαφορετικά στρώματα, αφού όλες οι παράμτροι έχουν την ίδια τιμή αντίστασης). Επομένως, η επιλογή “σωστού” αρχικού μοντέλου είναι κρίσιμη για την επίλυση του συστήματος, και πρέπει να λαμβάνεται κατόπιν εκτεταμένης μελέτης της περιοχής ενδιαφέροντος.

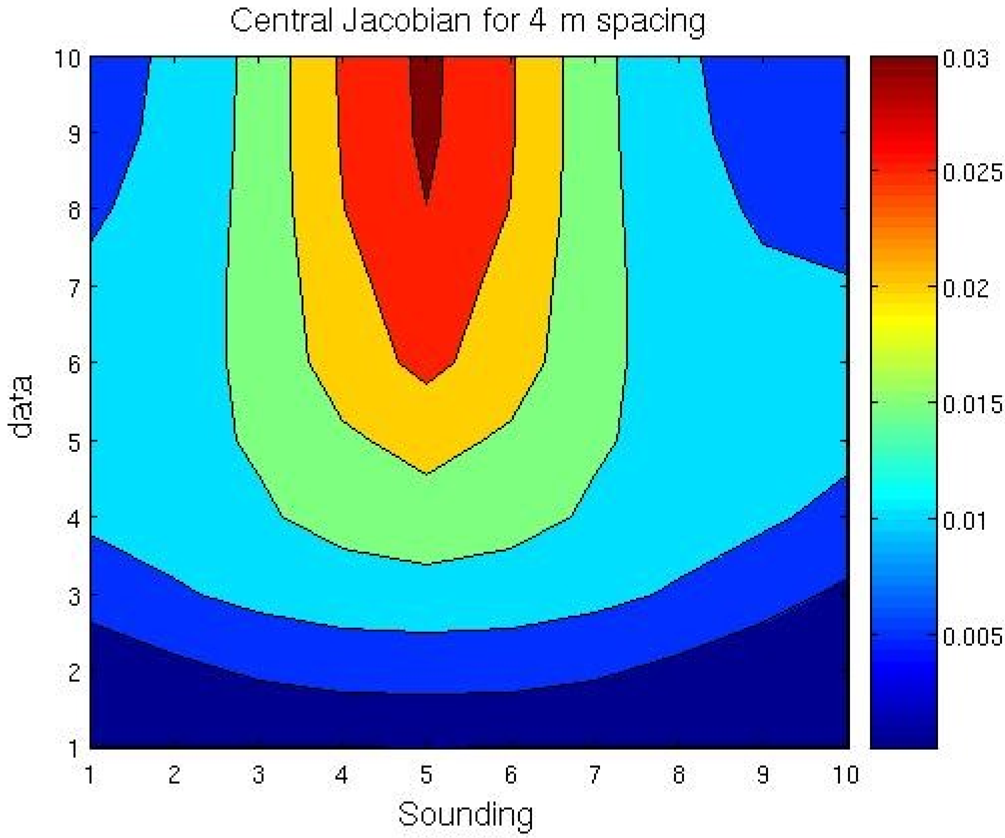


Σχήμα 4.5
Αρχικό μοντέλο που χρησιμοποιείται
σε όλα τα παραδείγματα των δοκιμών
επίλυσης των μεθόδων επίλυσης της αντιστροφής.

4.3.1 Αναγκαιότητα μονοδιάστατης ή δισδιάστατης αντιστροφής

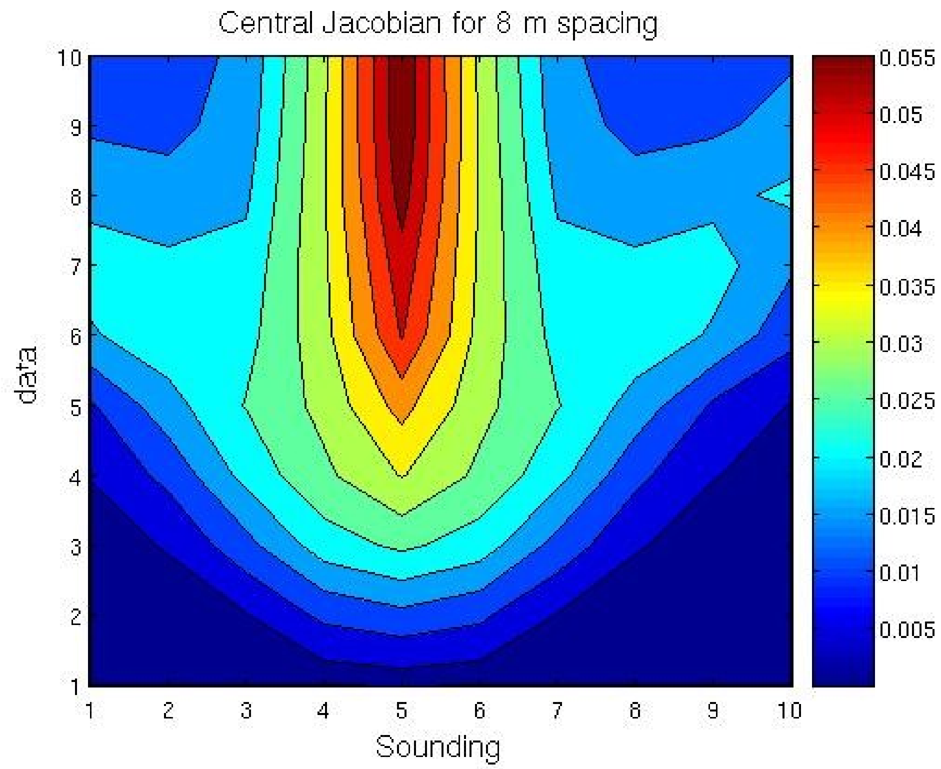
Κατά τη μοντελοποίηση είναι δυνατόν να εξαχθούν συμπεράσματα για την αναγκαιότητα ή μη της δισδιάστατης αντιστροφής. Ο καθοριστικός παράγοντας για την αναγκαιότητα της δισδιάστατης αντιστροφής είναι η απόσταση μεταξύ των βυθοσκοπήσεων. Σε ένα μοντέλο ενός στρώματος και ημιχώρου, που αποτελείται από 10 βυθοσκοπήσεις, με 10 μετρήσεις ανά βυθοσκόπηση (σύνολο 100 μετρήσεις) υπολογίζεται ο ιακωβιανός της 5 βυθοσκόπησης (δηλαδή περίπου της κεντρικής) για αποστάσεις 4, 8 και 12 μέτρων.

Στα παρακάτω διαγράμματα παρουσιάζονται οι παράγωγοι από το σύνολο των μετρήσεων, προς την παράμετρο του πάχους της κεντρικής βυθοσκόπησης. Αναμενόμενο οι μετρήσεις που αφορούν την συγκεκριμένη παράμετρο να επηρεάζονται περισσότερο (μεγαλύτερες τιμές ιακωβιανού) ενώ μετρήσεις που αφορούν βυθοσκοπήσεις εκατέρωθεν της κεντρικής να παρουσιάζουν μικρότερες τιμές. Για μετρήσεις που αφορούν βυθοσκοπήσεις αρκετά μακρυά από την κεντρική (π.χ. πρώτη ή τελευταία βυθοσκόπηση), οι τιμές βρίσκονται κοντά στο μηδέν, υποδηλώνοντας μικρή ευαισθησία, ή αλλιώς ότι οι μετρήσεις αυτές παραμένουν ανεπηρέαστες.

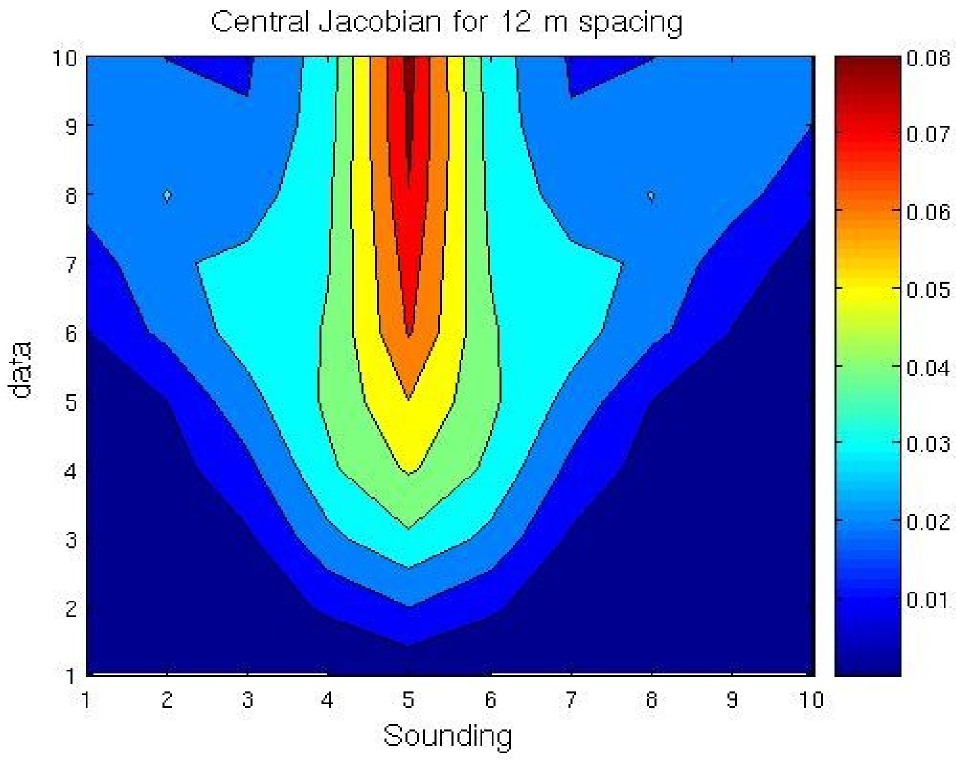


Σχήμα 4.6
Ιακωβιανός για μοντέλο
με απόσταση 4 μέτρων

Σε περιπτώσεις που οι μετρήσεις αποτελούνται από βυθοσκοπήσεις κοντά η μία στην άλλη, φαίνεται ότι σχεδόν όλες οι μετρήσεις είναι ευαίσθητες σε αλλαγές της παραμέτρου, με αποτέλεσμα ο δισδιάστατος υπολογισμός των παραγώγων να δίνει πληροφορίες από όλο το μοντέλο. Αντίθετα, όσο μεγαλώνει η απόσταση μεταξύ των βυθοσκοπήσεων, οι παράγωγοι των πιο απομακρυσμένων μετρήσεων επηρεάζουν λιγότερο το μοντέλο. Σε μεγάλες αποστάσεις ο ιακωβιανός, απόκτα μια μονοδιάστατη μορφή, δηλαδή να επηρεάζεται μόνο από τις μετρήσεις που ανήκουν στην ιδία βυθοσκόπηση. Σε αυτές τις περιπτώσεις, ο υπολογισμός των παραγώγων απευθείας από κάποιο μονοδιάστατο αλγόριθμο, θα οδηγήσει σε παρόμοια αποτελέσματα κερδίζοντας σε υπολογιστικό χρόνο. Σε κάθε άλλη περίπτωση, όμως, η επιλογή υπολογισμού των παραγωγών μονοδιάστατα πρέπει να γίνεται με επιφύλαξη.



Σχήμα 4.7
Ιακωβιανός για μοντέλο
με απόσταση 8 μέτρων



Σχήμα 4.8
Ιακωβιανός για μοντέλο
με απόσταση 12 μέτρων

4.4 Ευθύ πρόβλημα

Δεύτερο στάδιο στην διαδικασία της αντιστροφής, είναι η επίλυση του ευθέος προβλήματος. Ευθύ πρόβλημα είναι η διαδικασία με την οποία υπολογίζεται το δυναμικό στην επιφάνεια από ένα μοντέλο με γνωστή κατανομή αντιστάσεων στο υπέδαφος. Αλλιώς, με το ευθύ πρόβλημα, είναι δυνατόν να παρασταθεί η κατακόρυφη και πλευρική κατανομή της αντίστασης στο περιβάλλον.

Υπάρχουν διάφοροι τρόποι για την επίλυση αυτή, τόσο αναλυτικές όσο και αριθμητικές. Σε αυτήν την διατριβή χρησιμοποιήθηκε ο αλγόριθμος των πεπερασμένων στοιχείων του Gogon (1991) , με τις τροποποίησης από τον Tsourlos (1998), για επίλυση του ευθέος προβλήματος σε 2.5 διαστάσεις, όπως αναφέρεται στο κεφάλαιο 2.

4.5 Υπολογισμός παραγώγων – ιακωβιανός

Η κατανομή των αντιστάσεων σε σχέση με το μοντέλο, εκφράζεται με ένα σύνολο ομογενών περιοχών, τα οποία μπορούν να παίρνουν ένα σύνολο τιμών. Στην αντιστροφή, είναι απαραίτητο να γνωρίζουμε τις παραγώγους των δυναμικών προς τις περιοχές αυτές, δηλαδή τον ιακωβιανό πίνακα.

Στην παρούσα διατριβή, είναι απαραίτητος ο υπολογισμός των παραγώγων και για τα δύο είδη παραμέτρων, πάχη-αντιστάσεις. Ο υπολογισμός τους, γίνεται με διαφορετικό τρόπο και για αυτό θα αναπτυχθούν ξεχωριστά Ο ιακωβιανός για το κάθε είδος των παραμέτρων (πάχη-αντιστάσεις), υπολογίζεται με διαφορετική μέθοδο, αντικείμενο που δημιουργεί προβλήματα στην μετέπειτα κοινή λύση τους. Το κυριότερο πρόβλημα έχει να κάνει με την διαφορετική τάξη μεγέθους των δύο ιακωβιανών, με αποτέλεσμα να είναι επιβεβλημένη μια τροποποίηση των σχέσεων της λύσης, όπως θα παρουσιαστεί στις παρακάτω ενότητες.

4.5.1 Ιακωβιανός αντιστάσεων.

Για τον υπολογισμό των παραγώγων του δυναμικού ως προς τις αντιστάσεις έχουν προταθεί πολύ τρόποι, τόσο αριθμητικοί όσο και ημιαναλυτικοί. Οι αριθμητικοί υπολογίζονται με την μέθοδο της διαταραχής, με τον εξής τρόπο.

Για μια παράμετρο του μοντέλου με αντίσταση ρ_α διαταράσσουμε την τιμή αυτή κατά μια μικρή ποσότητα δρ και υπολογίζεται ο ιακωβιανός σύμφωνα με τον τύπο του Meju (1984)

$$J_{i,j} = \frac{log10\,\rho_{\rho+\delta\rho} - log10\,\rho_{\rho-\delta\rho}}{2\delta\rho} \tag{4.11}$$

Η ίδια διαδικασία ακολουθείται για όλες τις παραμέτρους του μοντέλου. Αυτή η μέθοδος απαιτεί τον επαναυπολογισμό του ευθέος μοντέλου, για κάθε μεταβολή δρ της αντίστασης και για κάθε παράμετρο του μοντέλου, με αποτέλεσμα να κοστίζει πολύ σε υπολογιστικό χρόνο.

Η μέθοδος εξίσωσης ευαισθησίας (Sasaki 1982,Smith and Vozof 1984) είναι η αναλυτική λύση του υπολογισμού των παραγώγων και αποτελεί μια συχνά χρησιμοποιούμενη μέθοδο σε διάφορους αλγόριθμους.

Από τη γενική λύση των πεπερασμένων η οποία με τη μορφή πινάκων εκφράζεται με την παρακάτω σχέση

$$\mathbf{K*A=F} \tag{4.12}$$

Έτσι, οι μερικοί παράγωγοι της γενικής λύσης ως προς τις αντιστάσεις παίρνουν τη μορφή

$$K\frac{\partial}{\partial\sigma_\rho}(K*A) = -A\frac{\partial F}{\partial\sigma_\rho} \tag{4.13}$$

Με τον κανόνα της αλυσίδας και δεδομένο ότι το διάνυσμα F είναι ανεξάρτητο της αντίστασης η λύση γίνεται

$$K\frac{\partial A}{\partial \sigma_\rho}=-A\frac{\partial K}{\partial \sigma_\rho} \tag{4.14}$$

Ο όρος αυτός, είναι εύκολα υπολογίσιμος καθώς από την λύση των πεπερασμένων στοιχείων ο πίνακας stifness K και ο πίνακας δυναμικού A έχουν ήδη υπολογιστεί. Επομένως ο όρος $\partial k/\partial \sigma_\rho$ μπορεί να υπολογιστεί άμεσα καθώς ο πίνακας K είναι συνάρτηση της αντίστασης, οπότε η παράγωγος μπορεί να υπολογιστεί

$$\frac{\partial K_{ij}^{(e)}}{\partial \sigma_p} = \begin{cases} K_{ij}^{(e)}\sigma_p & \text{if } e \in p_j \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \tag{4.15}$$

Στην μέθοδο της συζυγούς εξίσωσης η λύση αναζητάται από την εξίσωση του δυναμικού. Οι McGillivray and Oldenburg (1990) παρουσίασαν την αναλυτική λύση για το μετασχηματισμένο δυναμικό σε 2.5 διαστάσεις

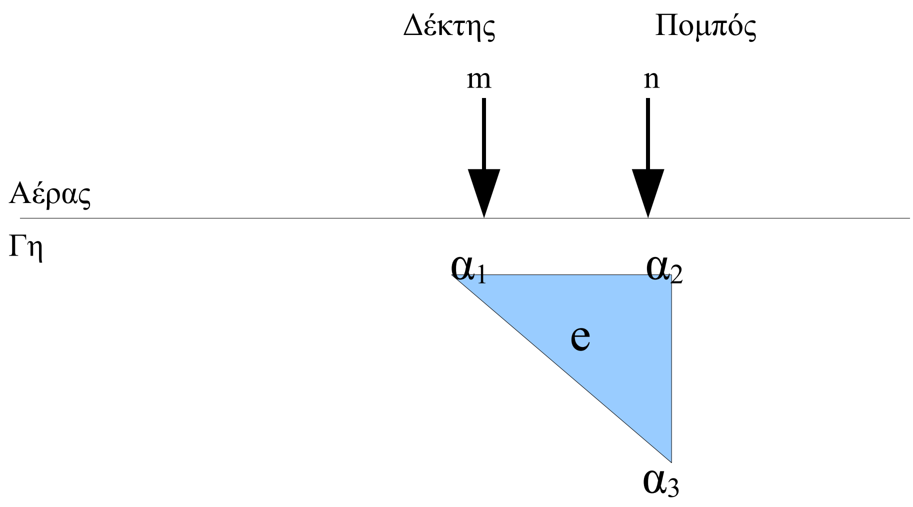
$$\frac{\partial V(x_o,k,z_o,x_s,z_s)}{\partial \sigma_j} = \int_D \left[k^2\psi_j V(x,k,z,x_s,z_s) - \psi_j\frac{\partial^2 V(x,k,z,x_s,z_s)}{\partial^2 x} - \psi_j\frac{\partial^2 V(x,k,z,x_s,z_s)}{\partial^2 z}\right] V(x,k,z,x_o,z_o)\, dxdz \tag{4.16}$$

$\partial V(x_0,k,z_0,x_s,z_s)/\partial \sigma_j$ Είναι η παράγωγος του δυναμικού για ένα σημείο με συντεταγμένες (x_0,k,z_0) όταν η πηγή βρίσκεται στην επιφάνεια με συντεταγμένες (x_s,z_s)

$V(x,k,z,x_s,z_s)$, $V(x,k,z,x_0,z_0)$ είναι τα μετασχηματισμένα σε σημείο (x,y,z) όταν η πηγή βρίσκεται στα σημεία (x_s,z_s) (x_0,z_0) αντοίστιχα.

ψ_j είναι 1 όταν τα (x,y) αποτελούν συντεταγμένες της συγκεκριμένης παραμέτρου και 0 για κάθε άλλη συντεταγμένη.

Ο Tsourlos (1998) υπολόγισε την λύση της, με τη βοήθεια των πεπερασμένων στοιχείων και τον τύπο υπολογισμού ολοκλήρωσης τριγωνικών στοιχείων (Zienkiewicz 2000),



Σχήμα 4.9
Υπολογισμός ιακωβιανού αντιστάσεων

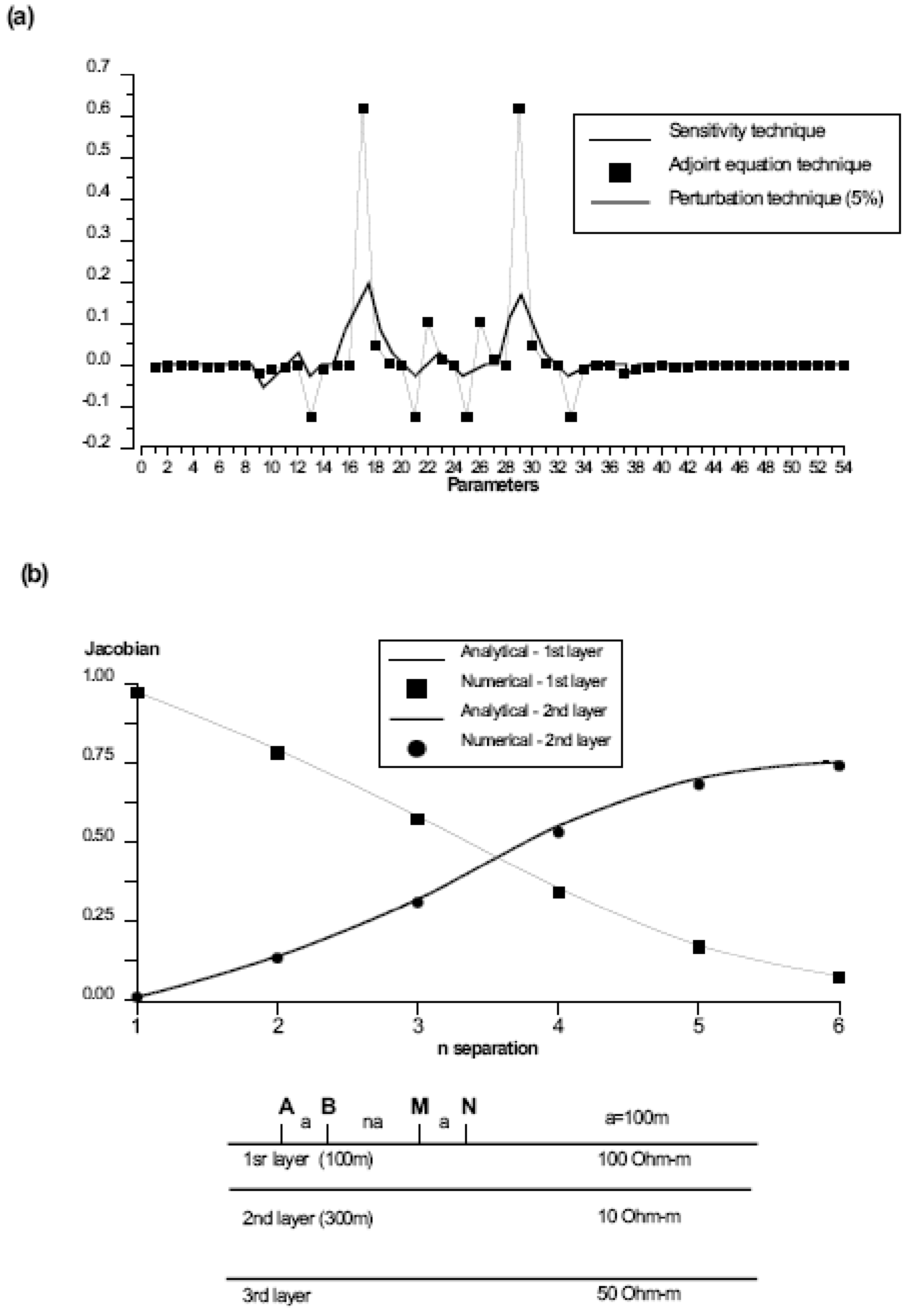
$$\frac{\partial V_{nm}}{\partial \sigma^{(e)}} = K^2 \Delta^{(e)} \frac{\sum_{j=1}^{3} a_{jm}^{(e)} \sum_{j=1}^{3} a_{jn}^{(e)} + a_{1m}^{(e)} a_{1n}^{(e)} + a_{2m}^{(e)} a_{2n}^{(e)} + a_{3m}^{(e)} a_{3n}^{(e)}}{12} + \frac{\sum_{j=1}^{3} a_{jm}^{(e)} B_j^{(e)} \sum_{j=1}^{3} a_{jn}^{(e)} B_j^{(e)} + \sum_{j=1}^{3} a_{jm}^{(e)} C_j^{(e)} \sum_{j=1}^{3} a_{jn}^{(e)} C_j^{(e)}}{4\Delta^{(e)}} \quad (4.17)$$

Όπου $\alpha_{1\text{-}3,m\text{-}n}$ το δυναμικό στα αντίστοιχα σημεία του πεπερασμένου στοιχείου, λόγω ρεύματος στην πηγή M ή N αντίστοιχα (σχήμα 4.9).

Επομένως η παράγωγος του δυναμικού για μια συγκεκριμένη παράμετρο βρίσκεται από το άθροισμα των επιμέρους μερικών παραγώγων των δυναμικών των πεπερασμένων στοιχείων ως εξής $\frac{\partial V}{\partial \sigma_p} = \sum_{i=1}^{q} \frac{\partial V}{\partial \sigma_i}$ (4.18), όπου q ο αριθμός των στοιχείων που αποτελούν την παράμετρο.

<u>Επιλογή μεθόδου</u>

Στην παρούσα διατριβή επιλέχθηκε ο υπολογισμός του ιακωβιανού με την μέθοδο adjoint επειδή από δοκιμές που έγιναν (Tsourlos 1998) φάνηκε ότι οι μέθοδοι της ευαισθησίας και adjoint παράγουν σχεδόν ίδια αποτελέσματα, αλλά η επιλεχθέντα μέθοδος πλεονεκτή σε υπολογιστικό χρόνο. Στο παρακάτω διάγραμμα 4.10 (Tsourlos 1998) φαίνονται σχηματικά οι ιακωβιανοί των τριών μεθόδων όπως υπολογίστηκαν με την μέθοδο dipole-dipole για ένα μοντέλο τριών στρωμάτων.



Σχημα 4.10
Σύγκριση των τριών
μεθόδων υπολογισμού ιακωβιανών
(Tsourlos 1998)

Η μη γραμμικότητα του προβλήματος απαιτεί την πλήρη ανάλυση των πινάκων. Στην παρούσα διατριβή, στις αναλύσεις του ιακωβιανού παρουσιάζονται γραφήματα που προκύπτουν από το μοντέλο του σχήματος 4.3, που αποτελείται από δέκα βυθοσκοπήσεις με απόσταση 4 μέτρων η μία από την άλλη.

Ο ιακωβιανός πίνακας αποτελείται από τις παραγώγους του δυναμικού προς τις αντιστάσεις, καθώς και από τις παραγώγους του δυναμικού προς τα πάχη, όπως φαίνεται στην σχέση

$$\mathbf{J} = [\ \mathbf{J}_{\mathbf{resistivity}}\ ,\ \mathbf{J}_{\mathbf{depths}}\ ] \tag{4.19}$$

Κατά την διάρκεια της ανάλυσης, είναι χρήσιμο για την εξαγωγή συμπερασμάτων ο ιακωβιανός να αντιμετωπιστεί ξεχωριστά για τις αντιστάσεις και τα πάχη, δηλαδή να θεωρηθεί ότι υπάρχουν δυο πίνακες.

Η ανάλυση του ιακωβιανού βασίζεται στην εύρεση των ιδιοτιμών με την μέθοδο SVD, καθώς και στην εύρεση του πίνακα συμεταβλητότητας ώστε να διασφαλιστεί και η ανεξαρτησία των παραμέτρων κατά τον υπολογισμό του (βλέπε κεφάλαιο 3).

Στην παρούσα διατριβή, όπως προαναφέρθηκε ο υπολογισμός του ιακωβιανού των αντιστάσεων, είναι ένα καλά μελετημένο πρόβλημα με γνωστή λύση. Σε όλα τα παραδείγματα, ανεξάρτητα της μεθόδου υπολογισμού του ιακωβιανού των παχών, ο υπολογισμός του ιακωβιανού των αντιστάσεων πραγματοποιήθηκε με την μέθοδο adjoint (Tsourlos 1998).

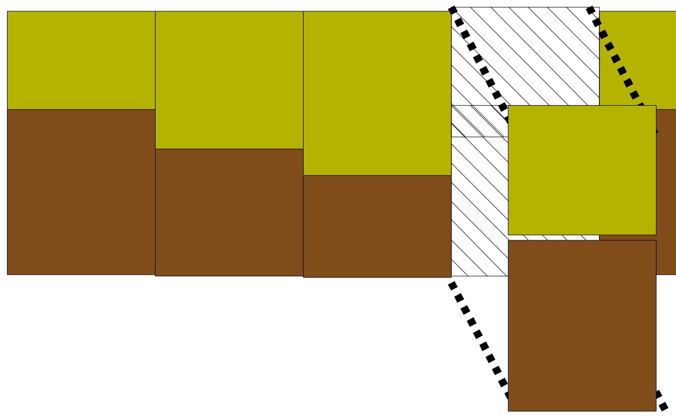
Παρατηρούνται πολύ μικρές τιμές για τις ιδιοτιμές που υποδηλώνουν αστάθεια στην εύρεση του αντιστρόφου που αντιμετωπίζονται τυπικά με τη χρήση μεθόδων σταθεροποίησης (βλέπε κεφάλαιο 3).

4.5.2 Ιακωβιανός παχών

Ο ιακωβιανός των παχών δεν έχει γνωστή λύση, και για το λόγο αυτό δοκιμάστηκαν διάφορες τεχνικές. Οι Christiansen and Auken (2003 και 2004) στον αλγόριθμο τους χρησιμοποίησαν μονοδιάστατο υπολογισμό χρησιμοποιώντας όμως και a-priori γνωστές τιμές για τα πάχη, ενώ εισήγαγαν και δευτερογενή παράμετρο το βάθος. Σε αυτήν την διατριβή ακολουθήθηκε διαφορετική προσέγγιση, με αποτέλεσμα ο δισδιάστατος υπολογισμός των παραγώγων να είναι απαραίτητος. Αρχικά εξετάστηκαν δύο περιπτώσεις, αναλόγως με την προσέγγιση της μεταβλητής του πάχους ως μονοδιάστατη μεταβλητή ή δισδιάστατη. Στην δισδιάστατη περίπτωση, δοκιμάστηκαν τρεις τεχνικές, όπως θα παρουσιαστούν στις παρακάτω ενότητες.

<u>α) Μέθοδος διαταραχής (petrubation) για μονοδιάστατο ευθύ πρόβλημα</u>

Σε αυτήν την περίπτωση ο ιακωβιανός των παχών υπολογίζεται με τον ίδιο ακριβώς τρόπο που θα υπολογιζόταν σε μία μονοδιάστατη αντιστροφή. Αναλυτικότερα, θεωρείται ότι το μοντέλο αποτελείται από μια σειρά συνεχόμενων βυθοσκοπήσεων ,με τη μία δίπλα στην άλλη. Απομονώνοντας κάθε φόρα μια “βυθοσκόπηση”και υπολογίζεται ο ιακωβιανός για κάθε παράμετρο πάχους και κάθε στρώμα με την ίδια διαδικασία που εφαρμόζεται στο μονοδιάστατο πρόβλημα. Με δεδομένη την δισδιάστατη δομή του μοντέλου είναι φανερό ότι η συγκεκριμένη προσέγγιση στερείτε ακρίβειας αφού θεωρείται ότι κάθε παράμετρος επηρεάζει ως προς τη μεταβολή του πάχους μόνο τις μετρήσεις της βυθοσκόπισης στην οποία ανήκει (σχήμα 4.11) και όχι τις γειτονικές. Αυτό είναι ρεαλιστικό μόνο όταν τα κέντρα των βυθοσκοπίσεων είναι μακρυά. (βλέπε παράγραφο 4.3.1).



Σχήμα 4.11
Σχηματική παρουσίαση προσέγγισης
ιακωβιανού ως 1D μεταβλητή

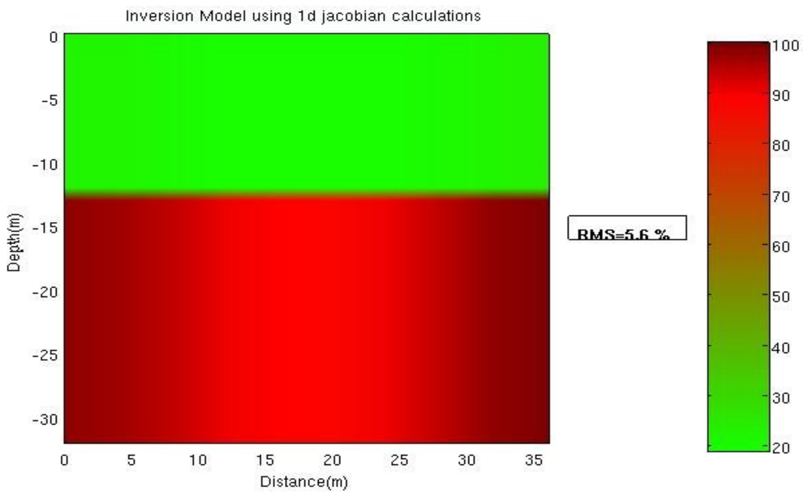
Για κάθε συγκεκριμένη παράμετρο που ανήκει στην βυθοσκόπηση, διαταράσσεται το κάτω όριο της παραμέτρου κατά μια μικρή ποσότητα dx. Ο ιακωβιανός για την παράμετρο i και μέτρηση j υπολογίζεται σύμφωνα με τη σχέση (Meju 1994)

$$J_{i,j} = \frac{\log 10\, V_{+j} - \log 10\, V_{-j}}{2\mathrm{dx}} \qquad (4.20)$$

, όπου V_{+j} και V_{-j} το δυναμικό που υπολογίζεται για την μέτρηση j μετά την διαταραχή της παραμέτρου κατά την ποσότητα dx.

Στην μέθοδο της διαταραχής απαιτείται ο επανυπολογισμός του ευθέος μοντέλου για κάθε αλλαγή της παραμέτρου του πάχους, με αποτέλεσμα η επιλογή της μεθόδου επίλυσης (ψηφιακά φίλτρα ή πλήρης λύση από πεπερασμένα στοιχεία) να είναι κρίσιμη για τον υπολογιστικό χρόνο.

Το αποτέλεσμα της αντιστροφής με την μέθοδο αυτή για το μοντέλο παράδειγμα του σχήματος 4.3, φαίνεται στο παρακάτω σχήμα 4.12. Ως αρχικό μοντέλο χρησιμοποιήθηκε το μοντέλο του σχήματος 4.5.



Σχήμα 4.12
Μοντέλο αντιστροφής

Παρατηρείται αδυναμία εύρεσης του πραγματικού μοντέλου, με μεγάλο σφάλμα 5.6 %. Συμπερασματικά, αυτός ο τρόπος υπολογισμού του ιακωβιανού, αδυνατεί να δώσει ικανοποιητικά αποτελέσματα.

β) Δισδιάστατο

Δοκιμάστηκαν διάφορες τεχνικές, που θα αναπτυχθούν ξεχωριστά σε κάθε υποενότητα. και οι παραγόμενες λύσεις συγκρίθηκαν με την μονοδιάστατη θεώρηση του προβλήματος..

ι) Διαταραχές από διαφορές ιακωβιανών

Χρησιμοποιώντας την αναλυτική λύση του ιακωβιανού των αντιστάσεων (Tsourlos 1998), υπολογίζεται για κάθε πάχος παραμέτρου ο ιακωβιανός με διαταραχή, με τον εξής τρόπο :

A) Υπολογίζεται ο ιακωβιανός της αντίστασης $\frac{\partial V_{plus}}{\partial \rho}$ μιας συγκεκριμένης παραμέτρου όταν αυξηθεί το πάχος της κατά μια θετική μικρή ποσότητα dh

B)Υπολογίζεται ο ιακωβιανός της αντίστασης $\frac{\partial V_{minus}}{\partial \rho}$ της ίδιας παραμέτρου όταν μειωθεί το πάχος κατά μικρή ποσότητα dh

Επομένως , ο ιακωβιανός των παχών γίνεται

$$A=\frac{\frac{\partial V_{plus}}{d\rho}-\frac{\partial V_{minus}}{d\rho}}{2\mathrm{dh}} \quad (4.21)$$

$$A=\frac{\partial}{\partial h}\frac{\partial V}{\partial \rho}=\frac{\partial}{\partial \rho}\frac{\partial V}{\partial h}$$

Επομένως, $$\int \frac{\partial}{\partial \rho}\frac{\partial V}{\partial h}d\rho=\int A\,d\rho \quad (4.22)$$

Άρα $$\frac{\partial V}{\partial h}=\int A\,d\rho \quad (4.23)$$

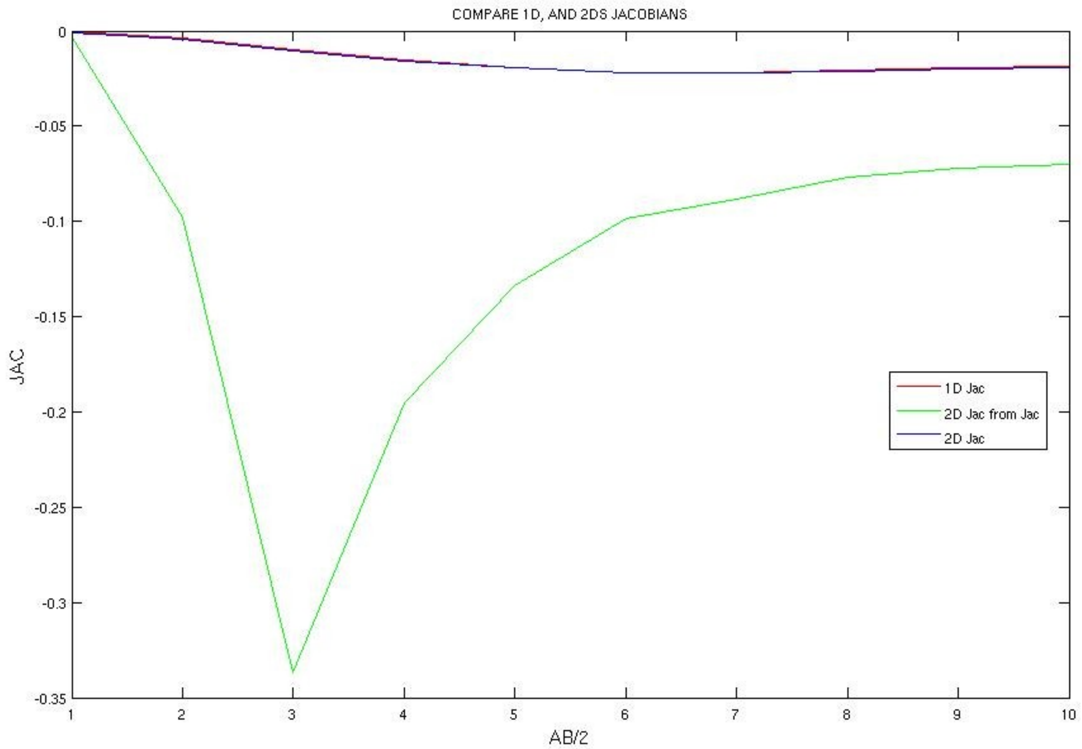
Όμως $$A=\frac{\partial V_{plus}}{d\rho}-\frac{\partial V_{minus}}{d\rho}=\alpha\in R \quad (4.24)$$

Τελικά $$\frac{\partial V}{\partial h}=\alpha\int d\rho=\alpha\,d\rho \quad (4.25)$$

Στο παρακάτω σχήμα 4.13, φαίνεται η σύγκριση του ιακωβιανού που υπολογίστηκε με αυτόν τον τρόπο, με τον ιακωβιανό που υπολογίστηκε με τις υπόλοιπες μεθόδους. Συγκεκριμένα στο παρακάτω διάγραμμα συγκρίνονται οι ιακωβιανοί για ένα μοντέλο με ένα στρώμα και ημιχώρο για το οποίο έχουν ληφθεί 5 βυθοσκοπήσεις. Συγκρίθηκε ο ιακωβιανός της κεντρικής βυθοσκόπησης, μόνο για τις μετρήσεις που αφορούν αυτή, παρόλο που το πρόβλημα αντιμετωπίζεται ως δισδιάστατο (δηλαδή η κάθε παράμετρος επηρεάζει όλες τις μετρήσεις). Αναλυτικότερα στο σχήμα παρουσιάζεται ο ιακωβιανός στις περιπτώσεις

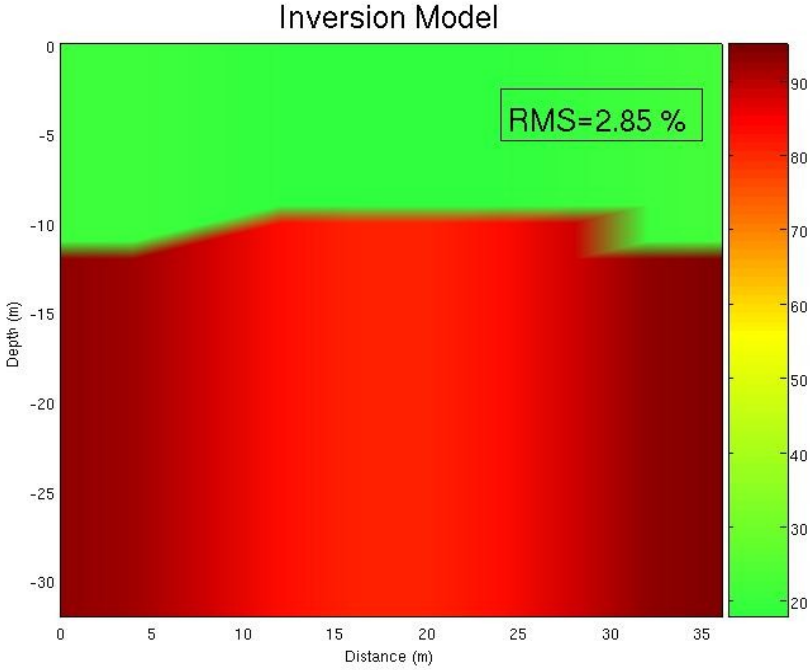
α) αλλαγής πάχους όλων των παραμέτρων, που όπως θα παρουσιαστεί στην επόμενη παράγραφο ταυτίζεται σχεδόν απόλυτα με τον αντίστοιχο μονοδιάστατο (μπλε γραμμή)

β) αλλαγής του πάχους μόνο της κεντρικής παραμέτρου, με το υπόλοιπο μοντέλο ανέπαφο (κόκκινη γραμμή)
γ) ο ιακωβιανός που υπολογίστηκε με την μέθοδο που περιγράφτηκε σε αυτήν την παράγραφο.
Παρατηρείται ασυμφωνία μεταξύ των ιακωβιανών.

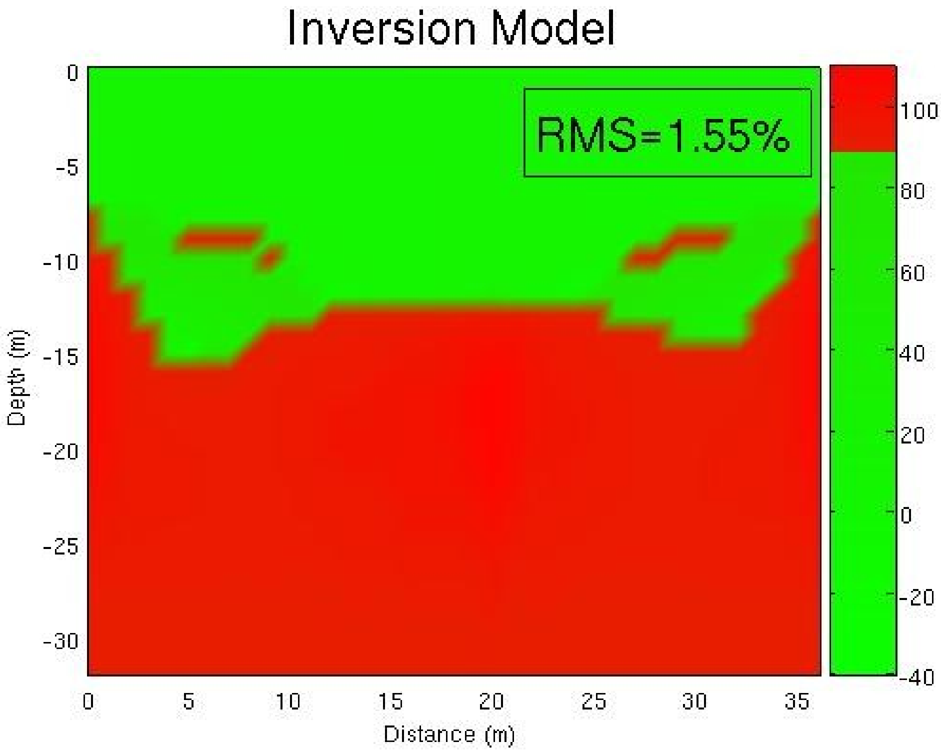


Σχήμα 4.13
Σύγκριση ιακωβιανών, με μονοδιάστατο τρόπο υπολογισμού από διαταραχές, δισδιάστατο τρόπο με διαταραχές και αναλυτικά.
Ο αναλυτικός τρόπος παρουσιάζει μεγάλη απόκλιση σε σχέση με τις δύο άλλες μεθόδους.

Το αποτέλεσμα της αντιστροφής, φαίνεται στα παρακάτω σχήματα 4.14 και 4.15.



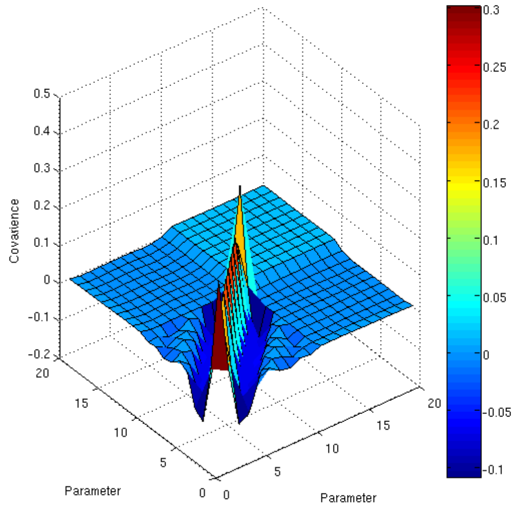
Σχήμα 4.14
Αποτέλεσμα αντιστροφής



Σχήμα 4.15
Αποτέλεσμα αντιστροφής (μέση τιμή)

Παρατηρείται αδυναμία εύρεσης πραγματικού μοντέλου.

Η ανάλυση του πίνακα παρουσιάζεται στα σχήματα 4.16



Σχήμα 4.16
Πίνακες συμεταβλητότητας για ιακωβιανούς παχών (παράμετροι 1 ως 10). Φαίνεται ότι δεν υπάρχει αλληλεξάρτηση μεταξύ των παραμέτρων.

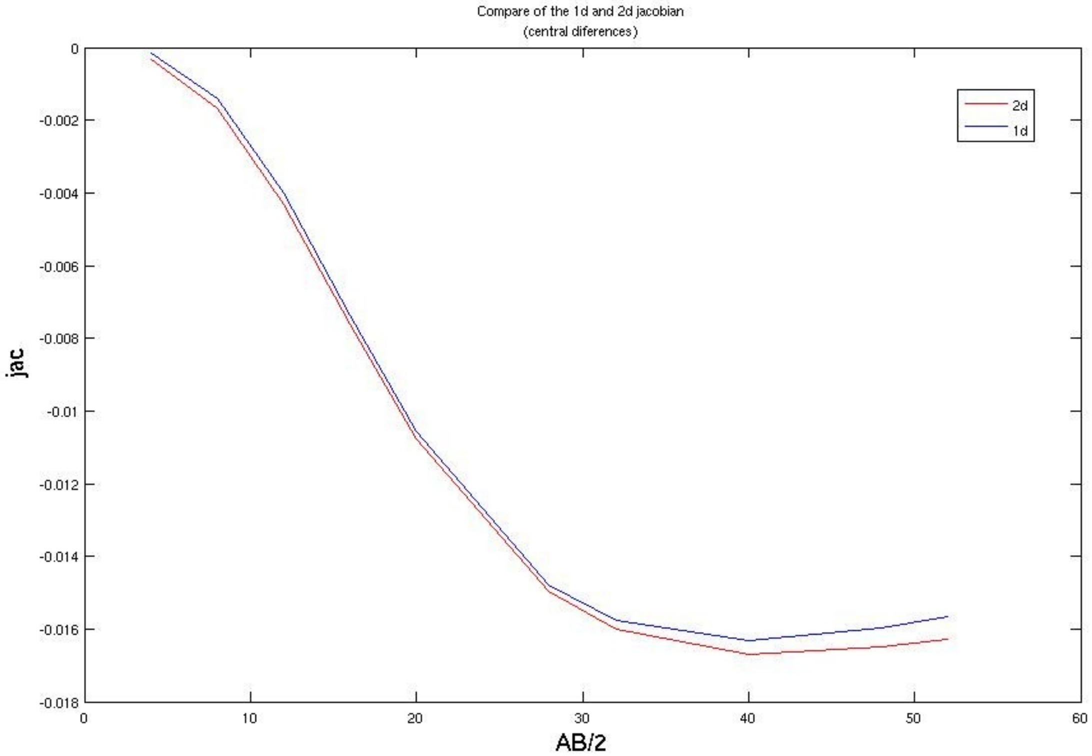
. Η ανάλυση του πίνακα συμεταβλητότητας δείχνει ότι δεν υπάρχει αλληλεξάρτηση μεταξύ των μεταβλητών(παράμετροι 1 ως 10). Ο παράγοντας δρ της σχέσης 4.25, φαίνεται ότι είναι καθοριστικός για τάξη μεγέθους του πίνακα, δημιουργώντας προβλήματα στην κοινή λύση του συστήματος.

ii) Διαταραχές από δισδιάστατο ευθύ πρόβλημα

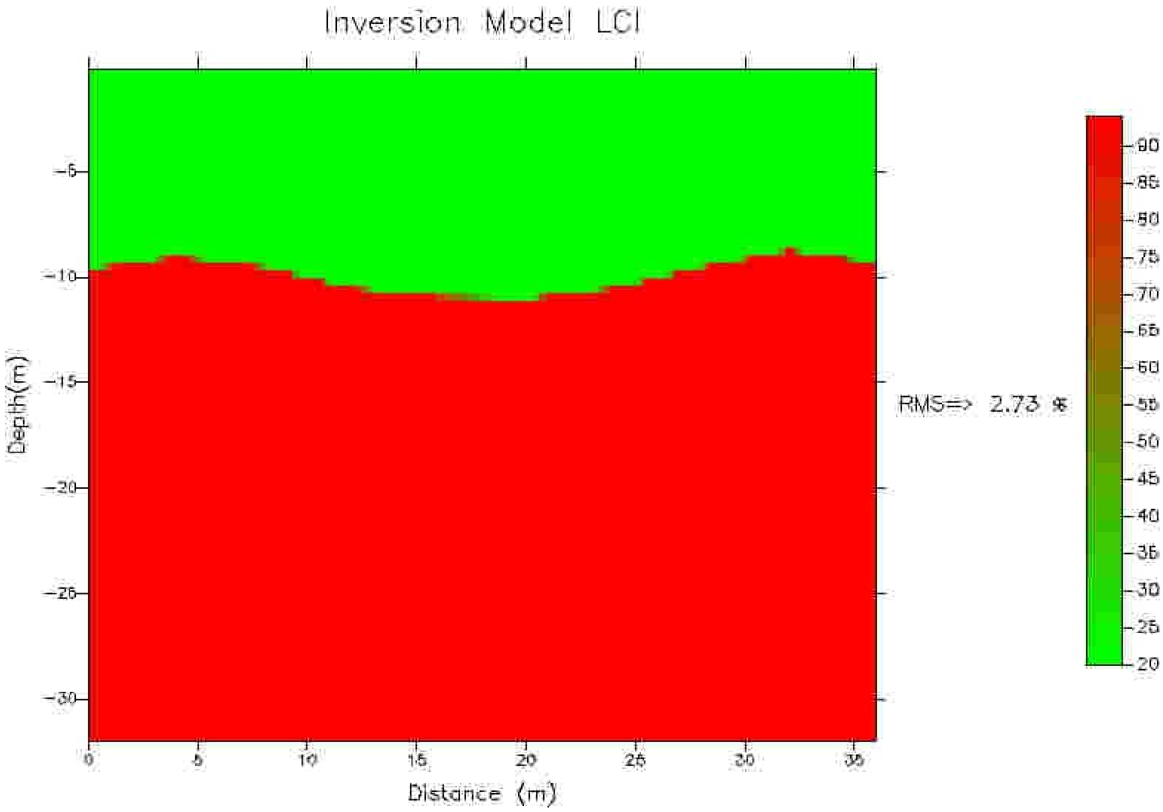
Η μέθοδος της δισδιάστατης διαταραχής μπορεί να εφαρμοστεί και στο δισδιάστατο πρόβλημα. Το πάχος κάθε παραμέτρου μεταβάλλεται και υπολογίζονται οι διαταραχές στις μετρήσεις. Αυτό σημαίνει ότι για τον υπολογισμό ενός στοιχείου του ιακωβιανού πίνακα απαιτούνται δύο υπολογισμοί του ευθέος προβλήματος, αντικείμενο που απαιτεί μεγάλο υπολογιστικό χρόνο. Ο ιακωβιανός υπολογίζεται, πάλι με τον ίδιο τύπο όπως και στην περίπτωση του μονοδιάστατου προβλήματος, δηλαδή

$$J_{i,j}=\frac{\log 10\, V_{+i}-\log 10\, V_{-i}}{2\mathrm{dx}} \tag{4.26}$$

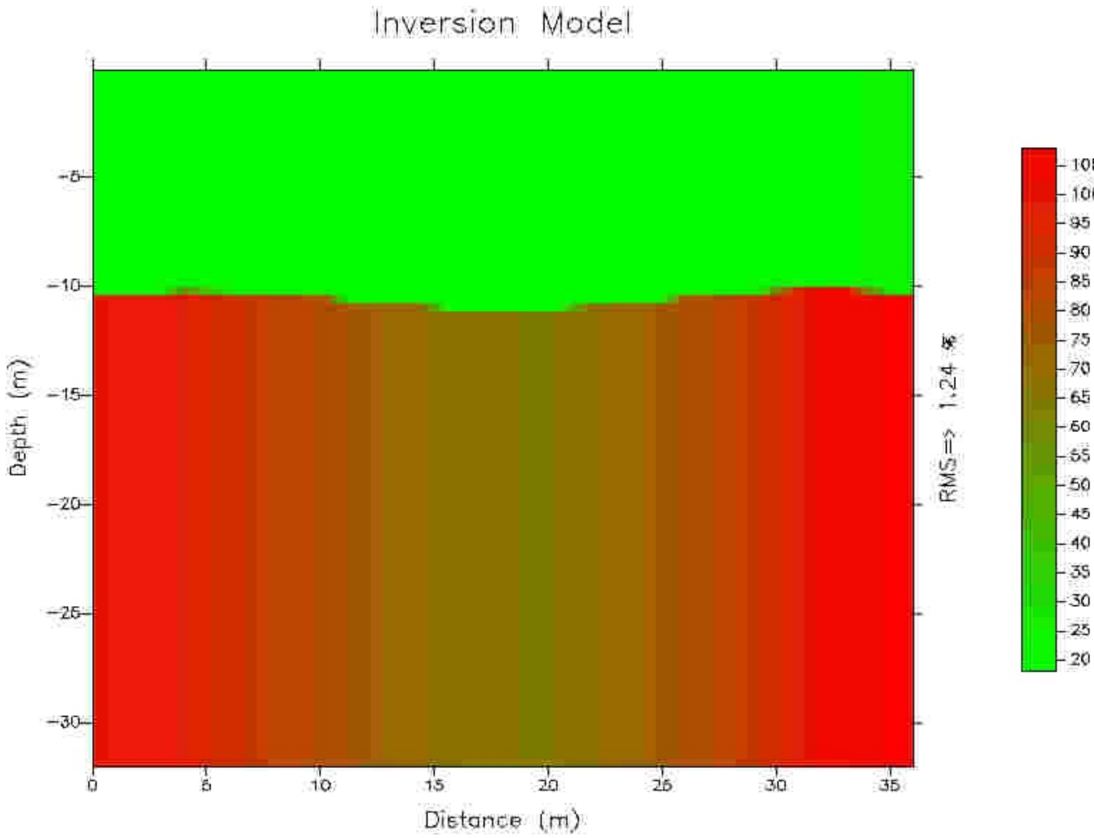
Στο παρακάτω διάγραμμα 4.17 παρουσιάζεται η σύγκριση των ιακωβιανών, στις περιπτώσεις υπολογισμού του ευθέως μοντέλου από τη μονοδιάστατη προσέγγιση, και στην περίπτωση μας όπου το ευθύ μοντέλο υπολογίζεται με την χρήση των πεπερασμένων στοιχείων για την περίπτωση όλων των παραμέτρων του στρώματος. Παρατηρείται, όπως αναμενόταν πολύ καλή συμφωνία στους δύο ιακωβιανούς.



Σχήμα 4.17
Σύγκριση ιακωβιανών από μονοδιάστατο και δισδιάστατο υπολογισμό. Παρατηρείτε (όπως ήταν αναμενόμενο) πολύ καλή ταύτιση των δύο πινάκων.



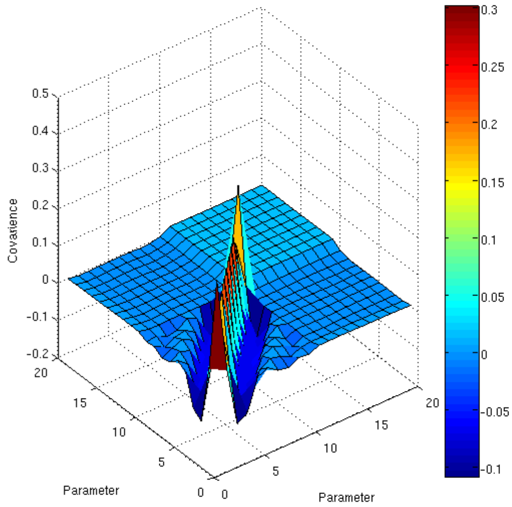
Σχήμα 4.18
Μοντέλο αντιστροφής



Σχήμα 4.19
Μοντέλο αντιστροφής (μέση τιμή)

Το μοντέλο που προέκυψε βρίσκεται σε καλή συμφωνία με το πραγματικό (σχήμα 4.18 και 4.19).

Η ανάλυση του πίνακα συμεταβλητότητας παρουσιάζεται στο σχήμα 4.20.



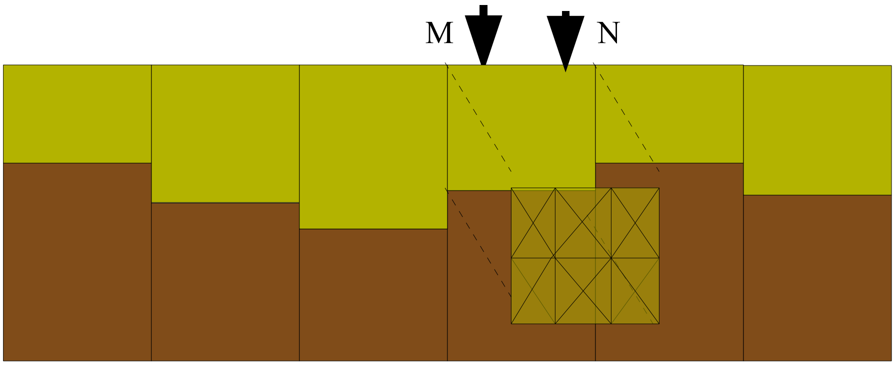
Σχήμα 4.20
Πίνακες συμεταβλητότητας για ιακωβιανούς παχών (παράμετροι 1 ως 10). Φαίνεται ότι δεν υπάρχει αλληλεξάρτηση μεταξύ των παραμέτρων.

Η ανάλυση του πίνακα συμεταβλητότητας δείχνει ότι δεν υπάρχει αλληλεξάρτηση μεταξύ των μεταβλητών.

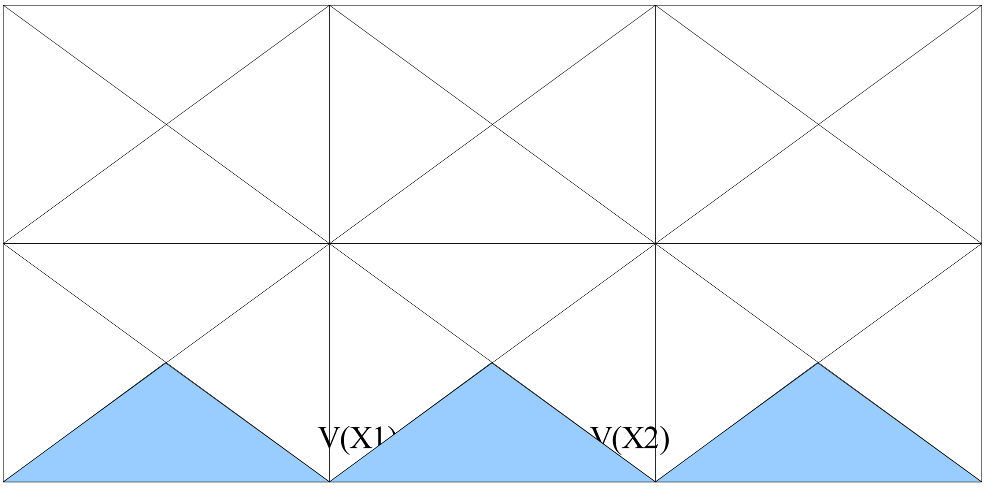
ιιι) Αναλυτική προσέγγιση

Χρησιμοποιώντας την αναλυτική λύση της παραγώγου του δυναμικού όπως προκύπτει με την βοήθεια των πεπερασμένων στοιχείων (Tsourlos 1998), ακολουθήθηκε η εξής διαδικασία:

Από το σύνολο των τριγωνικών στοιχείων που απαρτίζουν μία παράμετρο επιλέγονται αυτά που έχουν την μια τους πλευρά, πάνω στην ασυνέχεια. Σχηματικά, μεγεθύνοντας μια παράμετρο στο σχήμα 4.21, φαίνονται τα πεπερασμένα στοιχεία που συνορεύουν με την ασυνέχεια (σχήμα 4.22).



Σχήμα 4.21
Εύρεση πεπερασμένων στοιχείων
για αναλυτική λύση



Σχήμα 4.22
Μεγέθυνση σχήματος 4.21
για εύρεση πεπερασμένων στοιχείων
που συνορεύουν με την ασυνέχεια

Από την σχέση της παραγώγου του δυναμικού προς την αντίσταση (Tsourlos 199x)

$$\frac{\partial V_{nm}}{\partial \sigma^{(e)}}=\int_{D^{(e)}}[k^2 V_m^{(e)} V_m^{(e)}+\frac{\partial V_n^{(e)}}{\partial x}\frac{\partial V_m^{(e)}}{\partial x}+\frac{\partial V_n^{(e)}}{\partial z}\frac{\partial V_m^{(e)}}{\partial z}]dxdz \quad (4.27)$$

Υπολογίζεται η παράγωγος του δυναμικού προς το πάχος , δηλαδή

$$\frac{\partial V}{\partial z}=\frac{\frac{\partial V}{\partial \sigma}(\sigma_1-\sigma_2)}{dz}=(\sigma_1-\sigma_2)\int_{x_1}^{x2}[k^2 V_m^{(e)} V_m^{(e)}+\frac{\partial V_n^{(e)}}{\partial x}\frac{\partial V_m^{(e)}}{\partial x}+\frac{\partial V_n^{(e)}}{\partial z}\frac{\partial V_m^{(e)}}{\partial z}]dx \quad (4.28)$$

με την εξής διαδικασία:
Για το τριγωνικό στοιχείο που συνορεύει με την ασυνέχεια, βρίσκονται στα σημεία X1 και X2 τα δυναμικά V(X1) και V(X2) όπως προκύπτουν από την λύση των πεπερασμένων στοιχείων (όπου V_{x1}^{M} το δυναμικό στο σημείο X1 λόγω ρεύματος στο ηλεκτρόδιο M και V_{x1}^{N} το δυναμικό στο σημείο X1 λόγω ρεύματος στο ηλεκτρόδιο N. Αντίστοιχα είναι και τα δυναμικά στο σημείο X2. Έτσι στην σχέση (4.28) υπάρχουν τρεις όροι .

$$(\sigma_1-\sigma_2)\int_{x_1}^{x2}[k^2 V_m^{(e)} V_m^{(e)}]dx \quad k^2\int_{x_1}^{x_2}\sum_{j=1}^{2} V_j^N \varphi_j \sum_{j=1}^{2} V_j^M \varphi_j dx \quad (4.29)$$

$$(\sigma_1-\sigma_2)\int_{x_1}^{x2}[\frac{\partial V_n^{(e)}}{\partial z}\frac{\partial V_m^{(e)}}{\partial z}]dx=0 \quad (4.30)$$

διότι η λύση έχει μετατραπεί σε λύση πάνω στην ευθεία, δηλαδή έχει γίνει μιας διάστασης.

$$\int_{x_1}^{x2}[\frac{\partial V_n^{(e)}}{\partial x}\frac{\partial V_m^{(e)}}{\partial x}]dx=\frac{V_{x_1}^M-V_{x_2}^M}{x_1-x_2}\frac{V_{x_1}^N-V_{x_2}^N}{x_1-x_2}(x_1-x_2)=\frac{(V_{x_1}^M-V_{x_2}^M)(V_{x_1}^N-V_{x_2}^N)}{x_1-x_2} \quad (4.31)$$

Επομένως από (4.28) (4.29) (4.30)(4.31) η λύση γίνεται

$$k^2\int_{x_1}^{x_2}[V_{x_1}^M(\frac{x-x_2}{x_1-x_2})+V_{x_2}^M(\frac{x_1-x}{x_1-x_2})][V_{x_1}^N(\frac{x-x_2}{x_1-x_2})+V_{x_2}^N(\frac{x_1-x}{x_1-x_2})]dx \quad (4.32)$$

$$k^2\int_{x_1}^{x_2}(V_1^N V_1^M \varphi_1^2+V_2^N V_2^M \varphi_2^2+(V_1^N V_2^M+V_1^M V_2^N)\varphi_1\varphi_2)dx \quad (4.33)$$

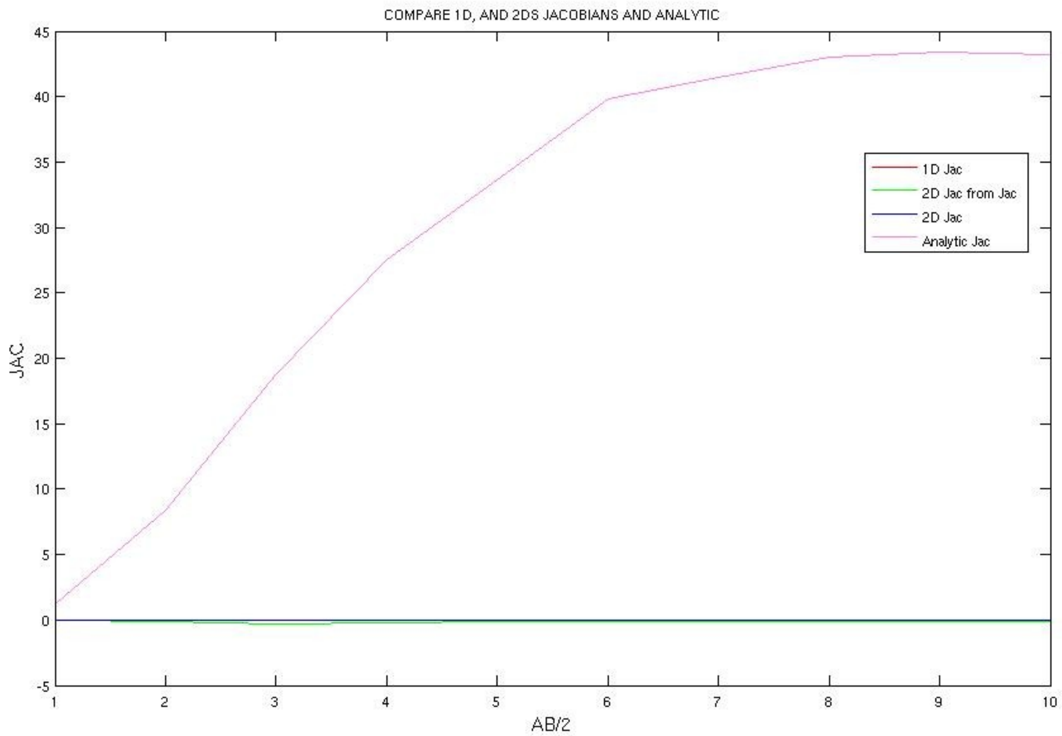
$$k^2(V_1^N V_1^M\frac{x_1-x_2}{3}+V_2^N V_2^M\frac{x_1-x_2}{3}+(V_1^N V_2^M+V_1^M V_2^N)\frac{x_1-x_2}{6}) \quad (4.34)$$

$$k^2(x_1-x_2)[\frac{1}{3}V_1^N V_1^M+\frac{1}{3}V_2^N V_2^M+\frac{1}{6}(V_1^N V_2^M+V_1^M V_2^N)] \quad (4.35)$$

Επομένως η συνολική λύση είναι

$$\frac{\partial V}{\partial z}=(\sigma_1-\sigma_2)[k^2(x_1-x_2)[\frac{1}{3}V_1^N V_1^M+\frac{1}{3}V_2^N V_2^M+\frac{1}{6}(V_1^N V_2^M+V_1^M V_2^N)]+\frac{(V_{x_1}^M-V_{x_2}^M)(V_{x_1}^N-V_{x_2}^N)}{x_1-x_2}] \quad (4.36)$$

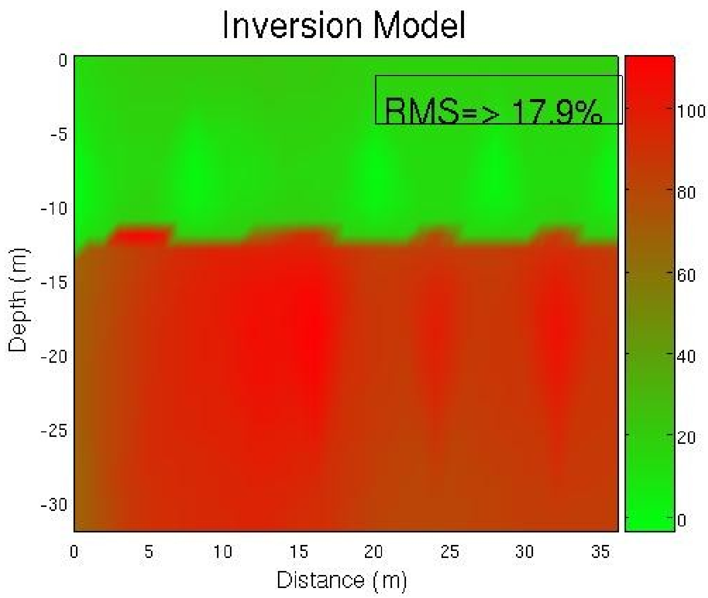
Η σύγκριση του ιακωβιανού με τις άλλες μεθόδους, φαίνεται στο σχήμα 4.23



Σχήμα 4.23
Σύγκριση όλων των ιακωβιανών
που υπολογίστηκαν στην διατριβή αυτή.
Ο ημιαναλυτικός τρόπος παρουσιάζει την
μεγαλύτερη διαφορά σε σχέση με τις άλλες τεχνικές.

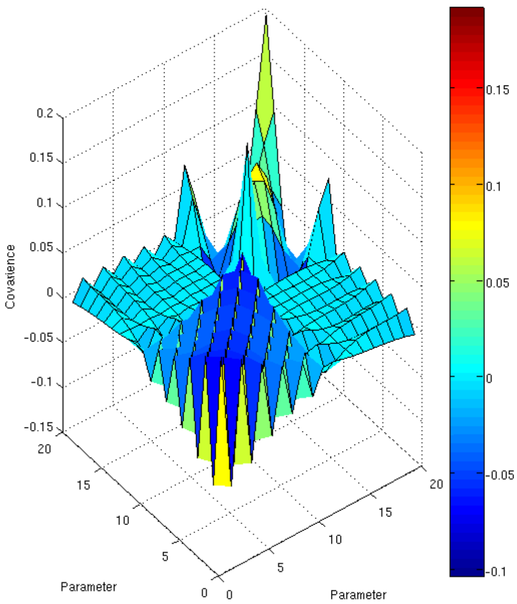
Στο σχήμα 4.23, φαίνεται ότι ο ιακωβιανός των παχών στην περίπτωση αυτή είναι πολύ διαφορετικός από τους αντίστοιχους που υπολογίστηκαν με τις άλλες μεθόδους (τάξεις μεγέθους μεγαλύτερος). Αυτό οφείλεται στο ότι ο παράγοντας (σ_1-σ_2) της σχέσης 4.36 ο οποίος είναι υπεύθυνος για το “μέγεθος” του ιακωβιανού επηρεάζει την κλίμακα δημιουργώντας ανομοιογένεια σε σχέση με τον ιακωβιανό των αντιστάσεων.

Το αποτέλεσμα της αντιστροφής φαίνεται στο παρακάτω σχήμα 4.24.



Σχήμα 4.24
Μοντέλο αντιστροφής

Η ανάλυση του πίνακα παρουσιάζεται στα σχήματα 4.25.



Σχήμα 4.25
Πίνακας συμεταβλητότητας ιακωβιανού παχών για την αναλυτική προσέγγιση. Φαίνεται ότι υπάρχει αλληλεξάρτηση μεταξύ των παραμέτρων των παχών, δείχνοντας αδυναμία της τεχνικής αυτής.

Η ανάλυση του πίνακα συμεταβλητότητας δείχνει ότι υπάρχει αλληλεξάρτηση μεταξύ των μεταβλητών του πάχους, υποδηλώνοντας και με αυτό τον τρόπο την αδυναμία αυτής της προσέγγισης.

Συμπεράσματα

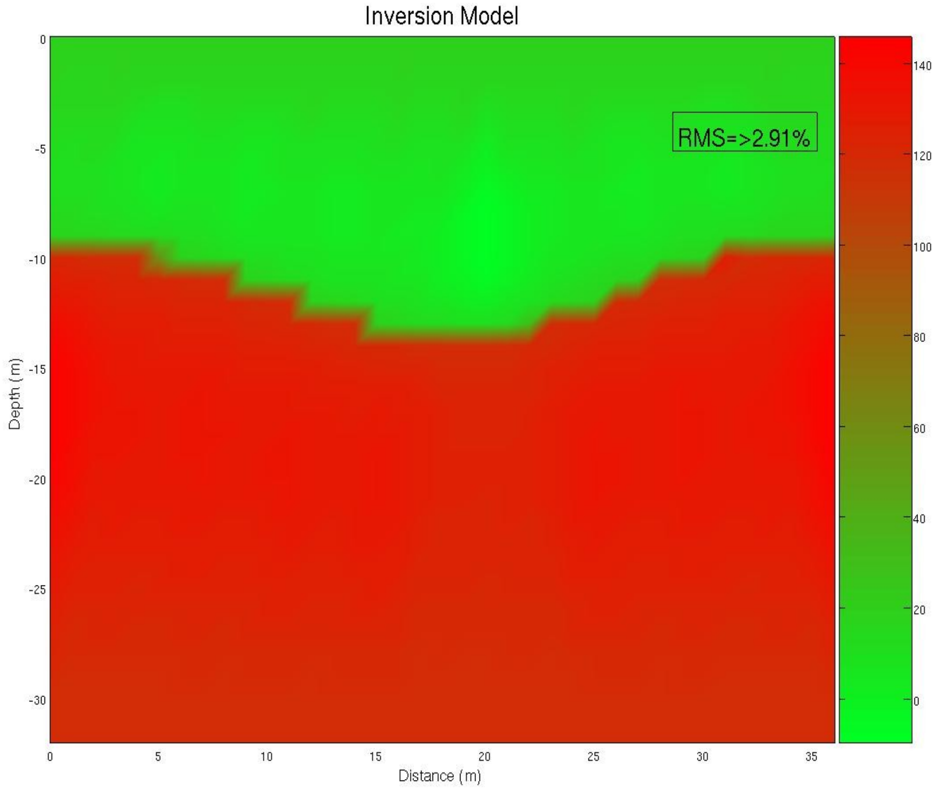
Από την μελέτη όλων των τεχνικών που αναπτύχθηκαν, φαίνεται ότι η τεχνική επίλυσης με χρήση δισδιάστατων διαταραχών έχει τα καλύτερα αποτελέσματα. Έχει το θεωρητικό πλεονέκτημα της ακρίβειας της λύσης σε σχέση με την αντίστοιχη μονοδιάστατη θεώρηση, καθώς εξάγονται συμπεράσματα από όλες τις μετρήσεις. Οι αναλυτικές λύσεις που χρησιμοποιήθηκαν στην διατριβή αυτή, αποτυγχάνουν να δώσουν λύση, με το κυριότερο πρόβλημα να εστιάζεται στην διαφορετική κλίμακα (τάξη μεγέθους), των δύο ετερογενών παραμέτρων, αντιστάσεων και παχών.

4.6 Πίνακας εξομάλυνσης

Η αστάθεια του προβλήματος κάνει αναγκαστική τη χρήση τεχνικών σταθεροποίησης, όπως τη χρήση πινάκων συνάφειας. Ο πίνακας αυτός ορίζει τις σχέσεις συνάφειας μεταξύ των παραμέτρων. όπως παρουσιάστηκαν στο κεφάλαιο 3. Μπορούν να οριστούν σχέσεις συνάφειας, τόσο πλευρικές όσο και κατακόρυφες. Εξετάστηκαν διάφορες σχέσεις συνάφειες (μηδενικής, πρώτης και δευτέρας παραγώγου), με σκοπό την εύρεση αυτής που προσεγγίζει καλύτερα το πραγματικό μοντέλο. Από τις δοκιμές προέκυψε ότι το καλύτερο αποτέλεσμα επιτυγχάνεται με το χωρισμό του πίνακα σε δύο τμήματα, μιας πρώτης τάξης παραγώγου πίνακα συνάφειας για τις αντιστάσεις, ώστε να εξασφαλίζεται η πλευρική συνέχεια των παραμέτρων που αποτελούν ένα στρώμα, και η χρήση μηδενικής τάξης (damping) για τις παραμέτρους των παχών (υβριδικός πίνακας). Αυτό έγινε με στόχο να εξασφαλιστεί η σταθερότητα της αντιστροφής χωρίς όμως να εισάγονται περιορισμοί στις μεταβολές που μπορεί να έχει η κάθε μία παράμετρος του πάχους ξεχωριστά. Δεύτερης παραγώγου τάξης πινάκων συνάφειας δεν κρίθηκαν σκόπιμο να χρησιμοποιηθούν (αν και εξετάστηκαν) για να είναι επιτρεπτές μεγάλες αλλαγές σε παραμέτρους που θεωρητικά ανήκουν σε διαφορετικά στρώματα. Ένα τέτοιος πίνακας παρουσιάζεται στη σχέση 4.37

$$c=\begin{array}{c}\left[\begin{array}{cccccccccccc}
-1 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots\\
0 & -1 & 1 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots\\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & 1 & 0 & 0 & \dots\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 & 1 & \dots\\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots
\end{array}\right]\\
\text{Τμήμα αντιστάσεων} \qquad\qquad \text{Τμήμα παχών}
\end{array} \tag{4.37}$$

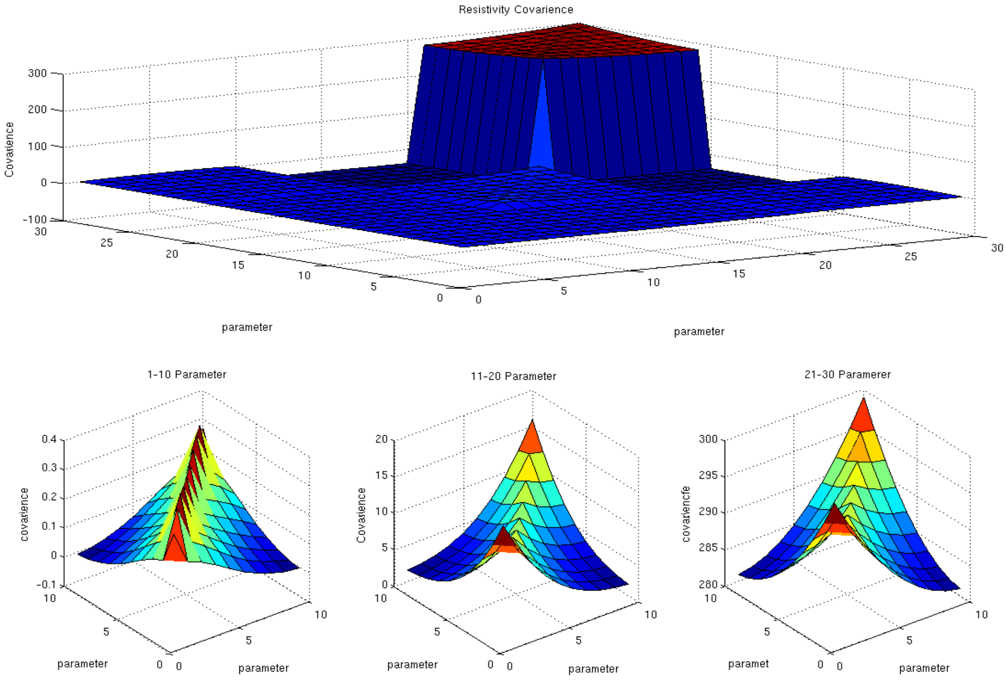
Η εφαρμογή αυτού του πίνακα συνάφειας στο μοντέλου του σχήματος φαίνεται στο σχήμα 4.26



Σχήμα 4.26
Μοντέλο αντιστροφής
που προκύπτει από τον υβριδικό
πίνακα συνάφειας

Το μοντέλο που προκύπτει, παρά το σχετικά μεγάλο σφάλμα (για συνθετικά δεδομένα), βρίσκεται σε καλή συμφωνία με το πραγματικό.

Στο σχήμα 4.27 , παρουσιάζεται οι πίνακες συμεταβλητότητας του ιακωβιανού για τις αντιστάσεις και πάχη. Λόγω των διαφορετικών τιμών του πίνακα για τις παραμέτρους των αντιστάσεων του τελευταίου στρώματος, ο πίνακας απεικονίζεται και τμηματικά για συγκεκριμένες παραμέτρους.



Σχήμα 4.27
Πίνακας συμεταβλητότητας
για των πίνακα των αντιστάσεων. Οι
παράμετροι 1-10 είναι οι αντιστάσεις του
πρώτου στρώματος, οι 11-20 οι αντιστάσεις του
δεύτερου στρώματος και οι 21-30 τα πάχη του στρώματος
(βλέπε και σχήμα 4.4 για την αρίθμηση των παραμέτρων)

Συμπεράσματα

Η επιλογή του κατάλληλου πίνακα συνάφειας είναι κρίσιμο στάδιο στην διαδικασία της αντιστροφής. Στην παρούσα διατριβή επιλέχθηκε ο υβριδικός πίνακας που αναφέρεται στην παρούσα ενότητα. Σε καμία όμως περίπτωση δεν είναι και ο βέλτιστος. Η εύρεση του καταλληλότερου πίνακα, είναι θέμα που απαιτεί περαιτέρω διερεύνηση.

4.7 Υπολογισμός πολλαπλασιαστή Lagranian

Η εύρεση του πολλαπλασιαστή λ, είναι κρίσιμη για την επίλυση της σχέσης

$$dx_{i+1} = dx_i + [J^T J + \lambda C^T C]^{-1} J^T dy \tag{4.38}$$

Η συνηθέστερη μέθοδος που ακολουθείται είναι η αρχική υπόθεση μιας μεγάλης τιμής, και όσο η λύση πλησιάζει την πραγματική, την ελάττωση του πολλαπλασιαστής (κεφάλαιο 3.6).

Μια πληρέστερη ανάλυση, όπως έχει αναφερθεί στο κεφάλαιο 3.6 είναι η L-CURVE και η ανάλυση piccard

Σε αυτή την διατριβή, λόγω της ανάμιξης ετερογενών δεδομένων (αντιστάσεις-πάχη), κρίθηκε απαραίτητο η χρήση δύο διαφορετικών πολλαπλασιαστών λ, για το κάθε είδος παραμέτρων, για τους εξής λόγους :

α) Η ανομοιογένεια των παραμέτρων

β) Η διαφορετική τάξη "μεγέθους" του πίνακα των παραγώγων.

γ) Η επιλογή για διαφορετική βαρύτητα στις παραμέτρους των παχών ή αντιστάσεων, ανάλογα με τα δεδομένα.

Έτσι η σχέση τροποποιείται και γίνεται

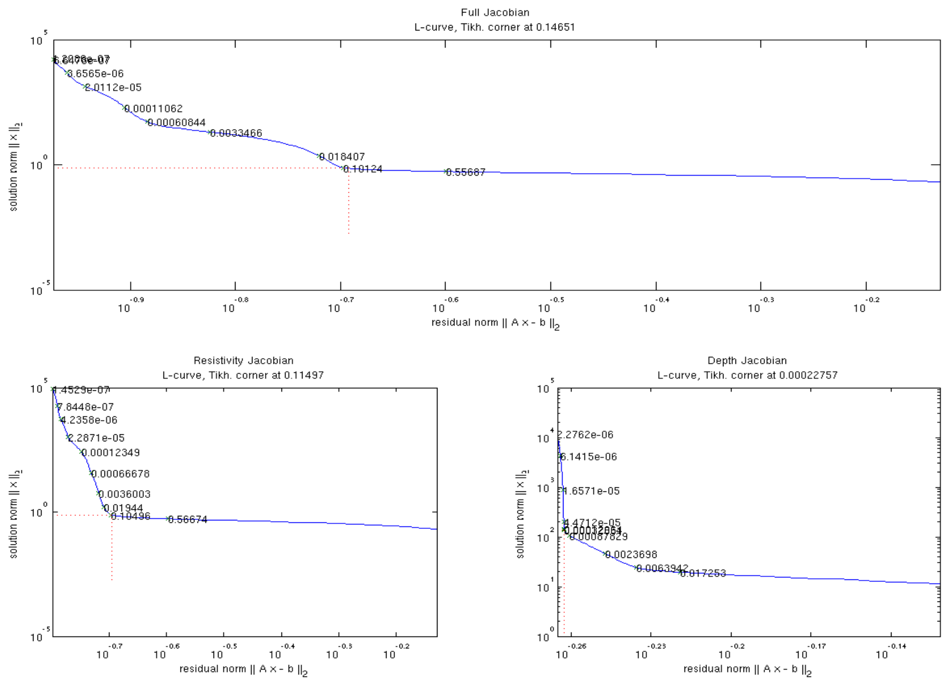
$$dx_{i+1} = dx_i + \left[J^T J + \begin{bmatrix}\lambda_1\\ \lambda_2\end{bmatrix} C^T C\right]^{-1} J^T dy \qquad (4.39)$$

Όπου λ_1 ο πολλαπλασιαστής που αφορά τις αντιστάσεις και λ_2 ο πολλαπλασιαστής που αφορά τα πάχη.

Δεν είναι δυνατή η εξ αρχής γνώση της σχέσης μεταξύ των δύο πολλαπλασιαστών, με αποτέλεσμα να εφαρμοστούν τεχνικές δοκιμής-λάθους ή μέθοδοι ελαχιστοποίησης και δοκιμές l-curve

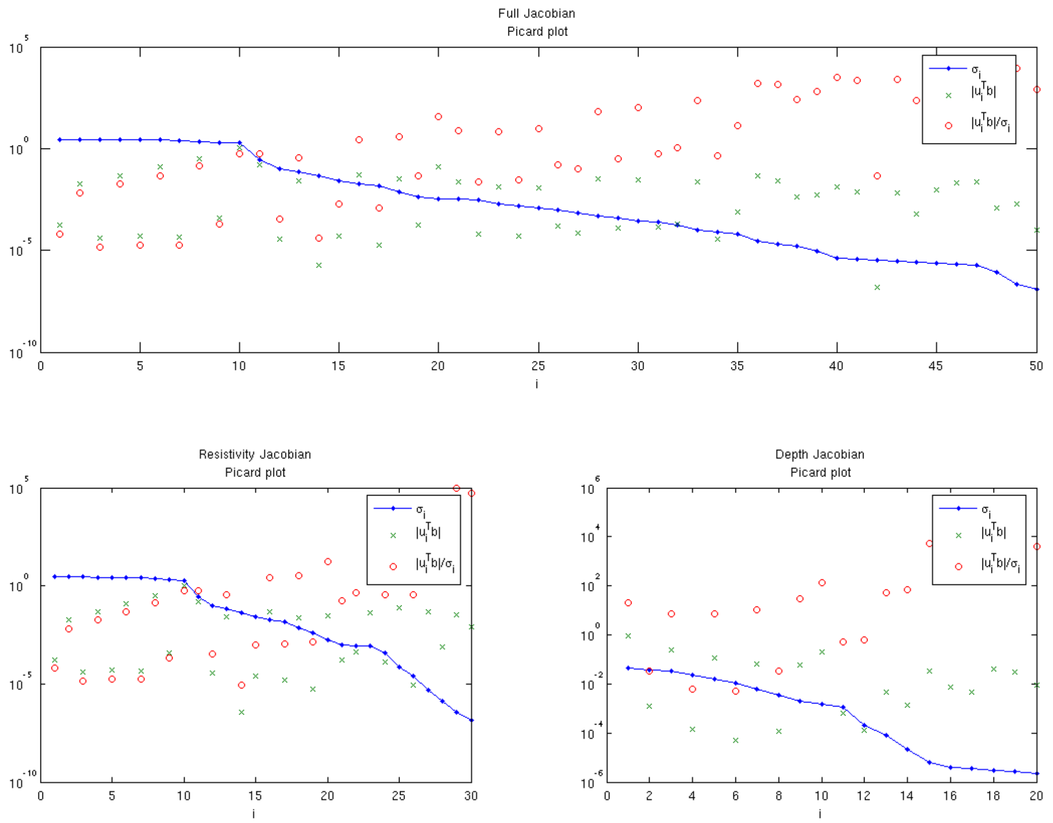
4.7.1 Καμπύλη L

Λόγω των ανομοιογενών μεγεθών των δυο ιακωβιανών (αντιστάσεων – παχών) δεν είναι δυνατή η εύρεση ενός πολλαπλασιαστή, όπως φαίνεται και από την ανάλυση L-CURVE και τη συνθήκη piccard (σχήμα 4.28 και 4.29)



Σχήμα 4.28
Ανάλυση l-curve του ιακωβιανού για όλο το σύστημα (4.28.α) και ξεχωριστά για τις αντιστάσεις (4.28.β) και πάχη (4.28.γ)

Στο σχήμα 4.29, παρουσιάζεται η συνθήκη picard για την ίδια ανάλυση



Σχήμα 4.29
Συνθήκη picard του ιακωβιανού για όλο το σύστημα (4.29.α)
και ξεχωριστά για τις αντιστάσεις (4.29.β) και πάχη (4.29.γ).
Παρατειρείτε ότι μετά την παράμετρο 10 (που αφορούν τις αντιστάσεις
του πρώτου στρώματος), δεν είναι δυνατό να εξαχθεί λύση για τις
υπόλοιπες. Ιδίως στο σχήμα 4.29.γ, φαίνεται ότι με την τεχνική αυτή,
ακόμα και όταν γίνει ξεχωριστεί ανάλυση στον ιακωβιανό των παχών,
δεν είναι δυνατόν να έξαχθεί λύση για καμία παράμετρο.

Εάν οι δύο ξεχωριστοί παράμετροι (πάχη - αντιστάσεις) αναλυθούν ξεχωριστά (σχήμα 4.28.β και σχήμα 4.28.γ) , παρατηρείται ότι οι τιμές των δύο πολλαπλασιαστών διαφέρουν πολύ μεταξύ αρκετές τάξεις μεγέθους. Αν η ανάλυση γίνει για όλον τον πίνακα η τιμή του πολλαπλασιαστή είναι παρόμοια με την τιμή του πολλαπλασιαστή που προκύπτει από την ανάλυση του ιακωβιανού των αντιστάσεων.

Έγιναν δύο δοκιμές, πρώτα δίνοντας τιμές για τους πολλαπλασιαστές ίδιες όπως προκύπτουν από την ανάλυση ολόκληρου του ιακωβιανού, και δεύτερο δίνοντας τιμές διαφορετικές όπως προκύπτουν από τις επι μέρους αναλύσεις. Σε καμία όμως από τις δύο περιπτώσεις η λύση δεν οδηγήθηκε σε σωστό αποτέλεσμα.Φαίνεται ότι η ανομοιογένεια των δεδομένων επηρεάζει την λύση και την ανάλυση του ιακωβιανού πίνακα, με αποτέλεσμα να μην είναι εφικτή η εύρεση του πολλαπλασιαστή. Αδυναμία ευρέσεως αναλυτικού τρόπου υπολογισμού του πολλαπλασιαστή οδηγεί σε μεθόδους ελαχιστοποίησης.

.

4.7.2 Ελαχιστοποίηση κατά την έννοια δύο διαστάσεων

Ως μέθοδος ελαχιστοποίησης χρησιμοποιήθηκε ο αλγόριθμος του powell από το Numerical recipes in C (1992).

Η αρχή λειτουργίας βασίζεται στην εξής διαδικασία (σχήμα 4.30)

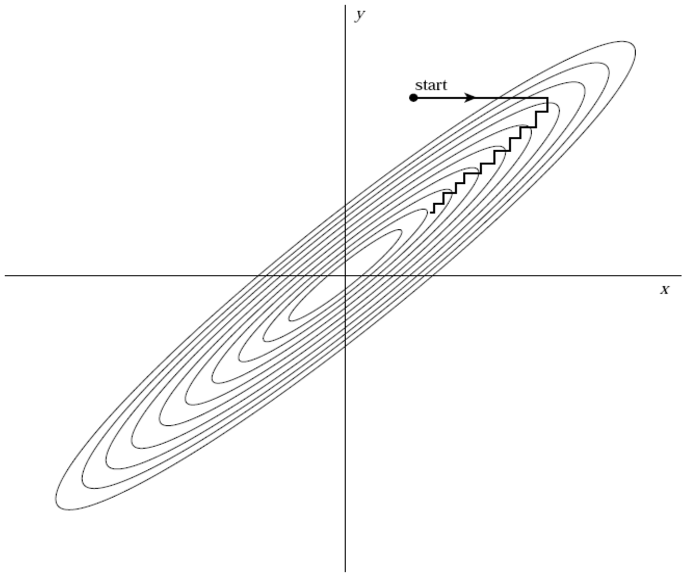
Υπέθεσε μια αρχική τιμή για τα λ_1, λ_2

Υπέθεσε ένα διάνυσμα κατεύθυνσης για τα λ_1 λ_2 που θα δείχνει την διεύθυνση ελαχιστοποίησης

Για I=1 μέχρι μέγιστο αριθμό επαναλήψεων

Ελαχιστοποίηση της συνάρτησης $F(\lambda_1,\lambda_2)$=RMS

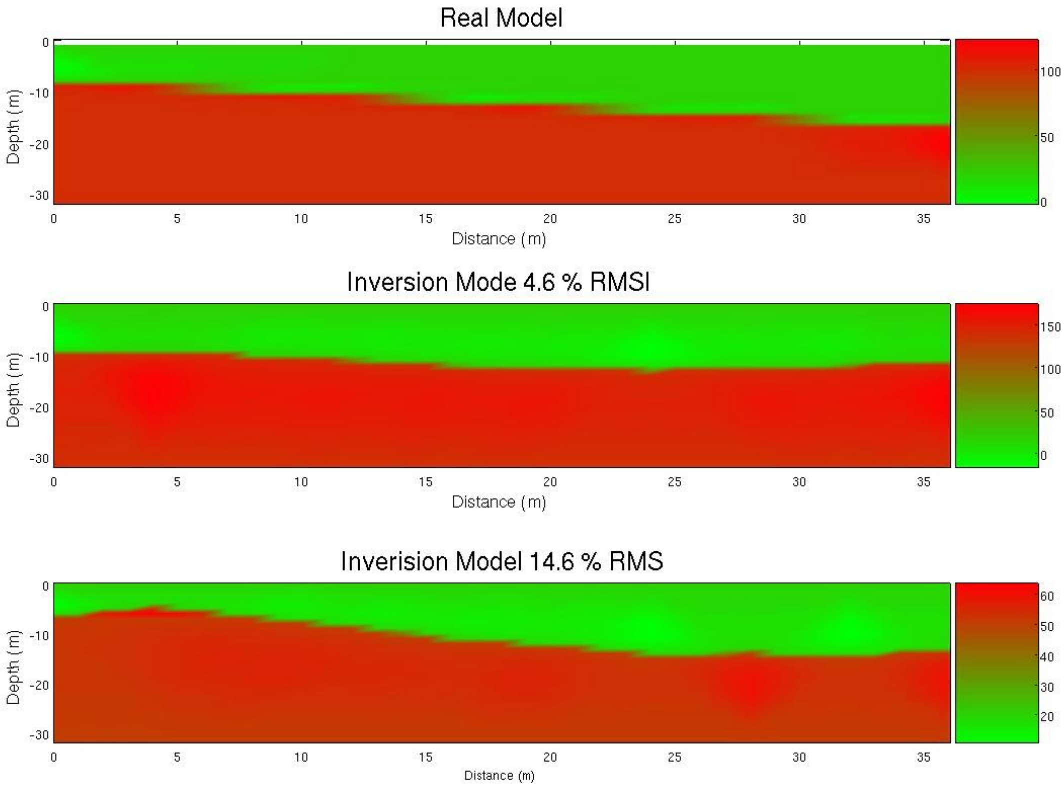
Τέλος



Σχήμα 4.30
Σχηματική αναπαράστασητης ελαχιστοποίησης κατά Powell (numerical recipes)

Το μειονέκτημα αυτής της μεθόδου, είναι το πολύ μεγάλο πλήθος ευθέων προβλημάτων που απαιτούνται για την εύρεση των λ_1 και λ_2 που δίνουν το το μικρότερο σφάλμα.

Ένα δεύτερο μειονέκτημα αυτής της μεθόδου, βρίσκεται στην αλληλεξάρτηση των μεταβλητών, με συνέπεια η ταυτόχρονη ελαχιστοποίηση των δύο πολλαπλασιαστών να μην είναι απαραίτητα η ιδανική. Ενδεικτικά παρουσιάζεται το παρακάτω παράδειγμα (σχήμα 4.31)



Σχήμα 4.31 (ι,ιι,ιιι)
Μειονεκτήματα μεθόδου
ελαχιστοποίησης

Στο σχήμα 4.31.ι παρουσιάζεται το πραγματικό μοντέλο,στο σχήμα 4.31.ιι το μοντέλο αντιστροφής τελικά που προκύπτει και στο σχήμα 4.31.ιιι κάποιο στάδιο στην διαδικασία της αντιστροφής. Η επιλογή των πολλαπλασιαστών στην περίπτωση ιι οδήγησε σε μια πιο καλή αναπαράσταση όσον αφορά τα πάχη, αλλά παρουσίασε αδυναμία της αναπαράστασης των αντιστάσεων. Αποτέλεσμα αυτού το μεγαλύτερο σχετικό σφάλμα, με αποτέλεσμα να απορριφθεί από τον αλγόριθμο.

4.7.3 Ελαχιστοποίηση κατά την έννοια μιας διάστασης

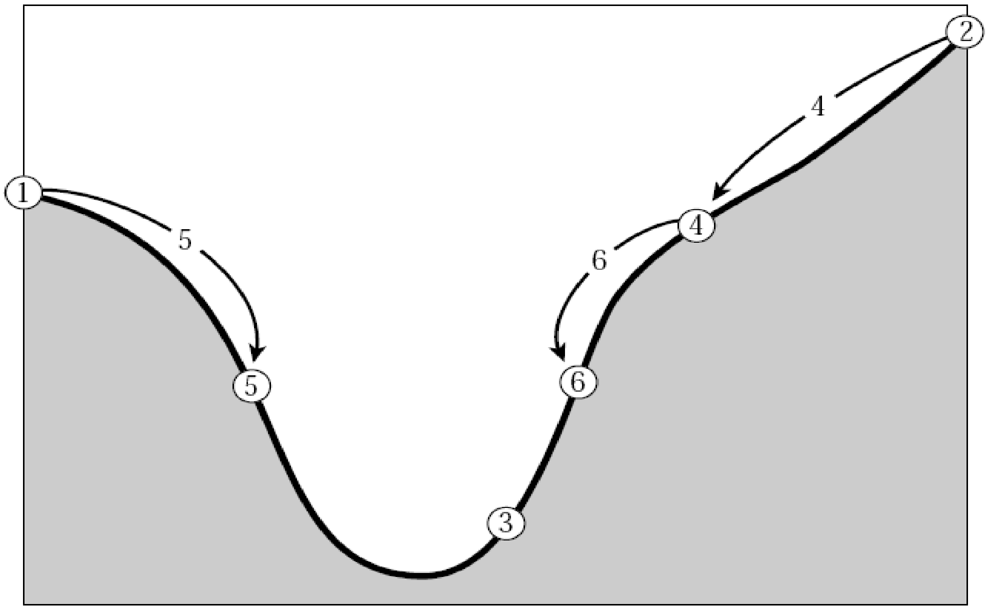
Ο αλγόριθμος Powell όπως προαναφέρθηκε απαιτεί πολύ μεγάλο αριθμό υπολογισμών του ευθέος προβλήματος, με αποτέλεσμα να απαιτεί πολύ υπολογιστικό χρόνο (χαρακτηριστικό είναι ότι σε κάποιες περιπτώσεις χρειάζεται περισσότερο από 50 λύσεις του ευθέος προβλήματος). Για το λόγο αυτό, έγινε προσπάθεια περιορισμού του υπολογιστικού χρόνου.

Με δοκιμές σε συνθετικά δεδομένα, φάνηκε ότι οι πολλαπλασιαστές ακολουθούν ένα σταθερό λόγο της τάξης 1/20 έως 1/30, χωρίς όμως να μην εμφανίζονται και διαφορετικές τιμές.

Επομένως η ελαχιστοποίηση υποβαθμίστηκε σε μια μιας διάστασης ελαχιστοποίηση, όπου ακολουθήθηκε ο αλγόριθμος Golden Search (Numericar recipes in C 1992).

Ο συγκεκριμένος αλγόριθμοι βασίζεται στην εύρεση κάποιού τοπικού ελαχίστου σε ένα διάστημα τιμών πολλαπλασιαστών. Ο αλγόριθμος μπορεί να συνοψιστεί ώς (σχήμα 4.33)

Υπέθεσε αρχικό διάστημα [1,2] για το λ_1 *(με* $\lambda_2=1/20 * \lambda_1$*)*
Για Ι=1 μέχρι μέγιστο αριθμό επαναλήψεων
Ελαχιστοποίηση της συνάρτησης $F(\lambda_1,\lambda_1/20)=RMS$
υπολόγισε νέο διάστημα [3,4] ….
Τέλος

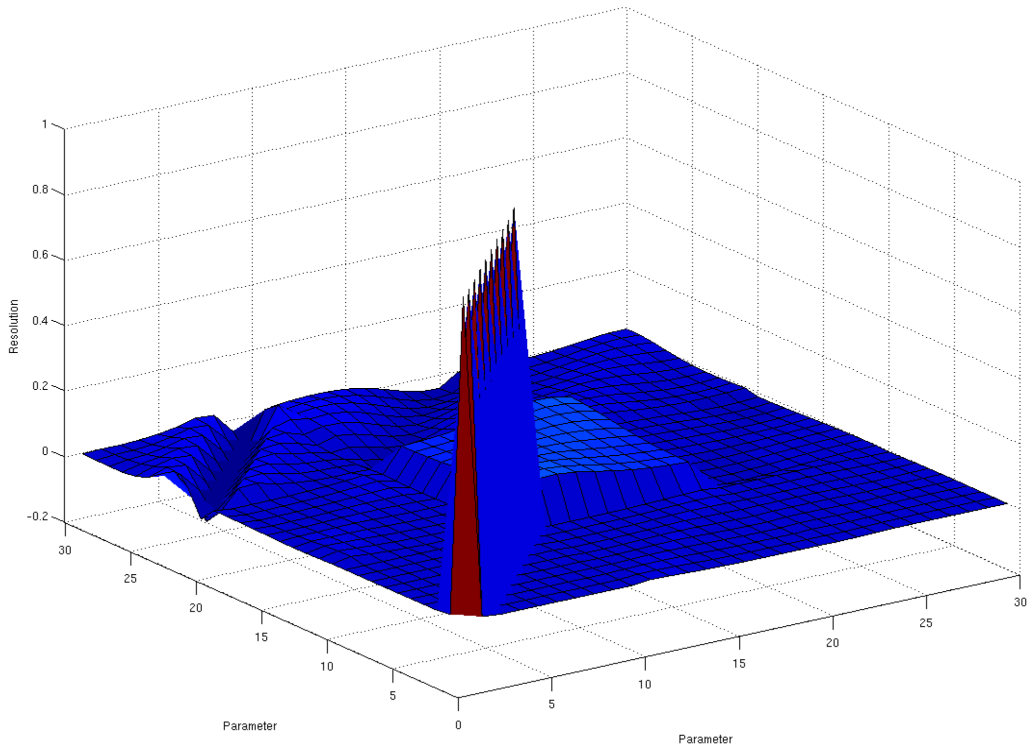


Σχήμα 4.33
Ο τρόπος λειτουργίας του
αλγόριθμου Golden Search
(numerical recipes)

4.7.4 Active constrained balancing

Η ανάλυση του πίνακα ανάλυσης στο σχήμα 4.34 δείχνει ότι οι παράμετροι 21 εώς 30 (βλέπε σχήμα 4.4) που αντιστοιχούν στο πάχος είναι πολύ κακώς προσδιορισμένοι, με αποτέλεσμα η μέθοδος να προτείνει μεγάλες τιμές του πολλαπλασιαστή. Αποτέλεσμα αυτού, η αναισθησία των παραμέτρων του πάχους σε κάθε επανάληψη. Αντίθετα οι παράμετροι που αντιστοιχούν στις αντιστάσεις και ιδίως του πρώτου στρώματος παρουσιάζονται πάρα πολύ καλά προσδιορισμένοι.

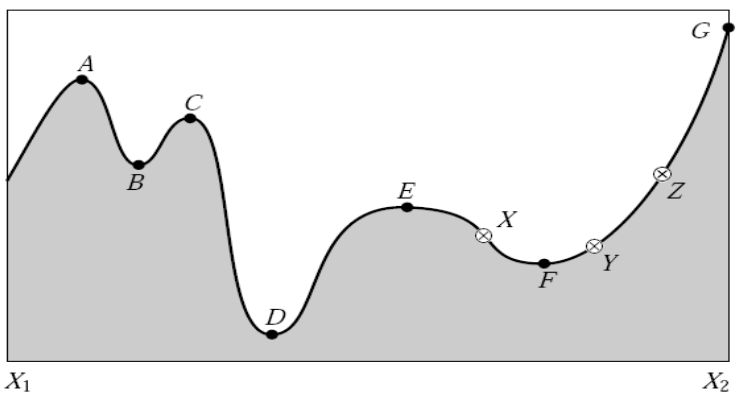
Συμπερασματικά, η μέθοδος αδυνατεί να δώσει ωφέλιμα αποτελέσματα, όχι λόγω αδυναμίας της μεθόδου, αλλά λόγω της δυσκολίας του προβλήματος.



Σχήμα 4.34
Πίνακας ανάλυσης

Συμπεράσματα

Η μέθοδος της ελαχιστοποίησης των πολλαπλασιαστών δίνει ικανοποιητικά αποτελέσματα για τις περισσότερες περιπτώσεις. Παρόλα αυτά, έχει και σημαντικά μειονεκτήματα. Απαιτούν πολύ υπολογιστικό χρόνο, και η εύρεση ενός ελαχίστου δεν είναι παρά ένα τοπικό ελάχιστο, όπως



φαίνεται και στο σχήμα 4.35.

Σχήμα 4.35
Τοπικά ολικά ελάχιστα (σημεία B και F) και ολικά ελάχιστα (σημείο D)
(numerical recipes)

Γενικά Συμπεράσματα

Η εφαρμογή της δισδιάστατης αντιστροφής με πάχη αποτελεί μια νέα προσέγγιση στην ερμηνεία των γεωηλεκτρικών δεδομένων. Η ανάπτυξη αυτού του αλγορίθμου έγινε με στόχο την καλύτερη αναπαράσταση της γεωμορφολογίας μιας περιοχής με ιδιαίτερη έμφαση στα όρια των γεωλογικών σχηματισμών πάντα σε σχέση με τους υπάρχοντες αλγορίθμους, Αναλυτικότερα η μεταβλητή διάσταση του πάχους μιας παραμέτρου πραγματοποιήθηκε με σκοπό την ακριβέστερη εύρεση ενός ορίου που πιθανόν να χωρίζει τους σχηματισμούς, χωρίζοντας έμμεσα με αυτό τον τρόπο περιοχές που ανήκουν σε διαφορετικά στρώματα. Η τυπική δισδιάστατη αντιστροφή, σε αρκετές περιπτώσεις, αδυνατεί να βρει το ακριβές όριο, παρουσιάζοντας περισσότερο μια ζώνη μετάβασης, που είναι και αποτέλεσμα των πολλών παραμέτρων αντιστάσεων. Την αδυναμία αυτή προσπαθεί να καλύψει η κατηγορία των αλγόριθμων της δισδιάστατης αντιστροφής με πάχη, όπου το πάχος ,όπως αναφέρθηκε στο 4ο κεφάλαιο, μπορεί να έχει άμεσο ή έμμεσο χαρακτήρα.

Όπως γίνεται εύκολα αντιληπτό, το εύρος εφαρμογής αυτής της μεθόδου είναι πιο περιορισμένο σε σχέση με τους τυπικούς αλγόριθμους, καθώς η ύπαρξη της στρωματογραφίας στην υπό μελέτη περιοχή πρέπει να είναι δεδομένη. Δεν μπορεί να γίνει εφαρμογή σε περιοχές όπου αναζητούνται συγκεκριμένες δομές στο υπέδαφος, όπως πχ αρχαιομετρικοί στόχοι ή ανθρωπογενείς στόχοι, καθώς επίσης και σε περιοχές με μεγάλη ανομοιογένεια σε γειτονικές παραμέτρους. Η πλευρική ανάπτυξη ενός στρώματος θεωρείται σημαντική για την εφαρμογή του αλγορίθμου, και έχει στόχο περισσότερο την εύρεση των ορίων μεταξύ των σχηματισμών παρά την πιστή αποτύπωση της κατανομής των αντιστάσεων. Πολύπλοκες δομές με ασαφή πλευρικά όρια σχηματισμών και ύπαρξη πολλών στρωμάτων στον υπό μελέτη χώρο, δεν είναι δυνατόν να ερμηνευτούν με την μέθοδο αυτή καθώς η αρχική υπόθεση του αριθμού των στρωμάτων καθώς και ο γενικότερος σχεδιασμός του μοντέλου είναι δεσμευτικός για την τελική ερμηνεία

Δυσκολίες

Η εισαγωγή του πάχος ως μεταβλητή στο πρόβλημα της αντιστροφής δημιουργεί την ανάγκη για υπολογισμό επιπλέον παραμέτρων για την επίλυση του προβλήματος, που δεν έχουν γνωστή λύση.

Ο κυριότερος παράγοντας είναι ο υπολογισμός του ιακωβιανού πίνακα, ο οποίος μπορεί να υπολογιστεί με πολλούς τρόπους και χωρίς να υπάρχει κάποια γνωστή λύση. Οι Christiansen and Auken (2003,2004) που παρουσιάζουν την μεγαλύτερη ομοιότητα με την διαδικασία που ακολουθήθηκε στην διατριβή αυτή, υπολόγισαν τον πίνακα αυτό με την μέθοδο των μονοδιάστατων διαταραχών, προσέγγιση που εξετάστηκε και στην διατριβή αυτή. Η σύγκριση του με τον αντίστοιχο δισδιάστατο οδηγεί στο συμπέρασμα ότι για μεγάλες αποστάσεις βυθοσκοπήσεων οι δύο πίνακες είναι όμοιοι, με αποτέλεσμα, ο μικρότερος υπολογιστικός χρόνος που απαιτεί ο μονοδιάστατος, να κάνει την επιλογή του βέλτιστη. Όμως για μικρές αποστάσεις βυθοσκοπήσεων, οι πληροφορίες που μπορούν να εξαχθούν από τον δισδιάστατο πίνακα είναι σημαντικές και η επιλογή του υπολογισμού του ως μονοδιάστατο πίνακα θα πρέπει να γίνει με επιφύλαξη.

Μια επιπλέον δυσκολία βρίσκεται στην επιλογή της μεθόδου υπολογισμού του πίνακα. Στην παρούσα διατριβή εξετάστηκαν τόσο προσεγγιστικές μέθοδοι, όσο και ημιαναλυτικές. Παρόλο το θεωρητικό πλεονέκτημα των ημιαναλυτικών μεθόδων, από τα αποτελέσματα που παρουσιάστηκαν στο 4ο κεφάλαιο φάνηκε ότι ο δισδιάστατος υπολογισμός του ιακωβιανού με διαταραχές δίνει την καλύτερη λύση με αποτέλεσμα την επιλογή αυτής της μεθόδου.

Ένα ακόμα σημείο προσοχής αποτελεί η επιλογή του πίνακα εξομάλυνσης. Από διάφορους συνδυασμούς που δοκιμάστηκαν, όπως παρουσιάστηκαν στο 4 κεφάλαιο, φαίνεται ότι δεν υπάρχει κάποιος βέλτιστος, αλλά η επιλογή θα πρέπει να γίνεται ανάλογα του μοντέλου και της επιθυμητής σχέσης συνάφειας που αναζητούνται στο τελικό μοντέλο.

Έναν ακόμα κρίσιμο παράγοντα, αποτελεί και η εύρεση του πολλαπλασιαστή lagranian. Από δοκιμές που εφαρμόστηκαν τόσο με σταθερές τιμές του πολλαπλασιαστή όσο και με χωρικά μεταβαλλόμενες τιμές του, φάνηκε ότι σε καμία περίπτωση η επιλογή ενός κοινού πολλαπλασιαστή για τα δύο είδη παραμέτρων (πάχη – αντιστάσεις) δεν είναι δυνατόν να οδηγήσει σε χρήσιμη λύση. Από την ανάλυση των πινάκων του προβλήματος φαίνεται ότι η ανομοιογένεια των παραμέτρων καθώς και η διαφορετική τάξη μεγέθους του ιακωβιανού πίνακα υιοθετεί την ανάγκη χρήσης δύο διαφορετικών πολλαπλασιαστών, έναν για τις αντιστάσεις και έναν για τα πάχη. Σε διαφορετική περίπτωση οι παράμετροι των παχών και συνεπώς η στρωματογραφία της περιοχής δεν επηρεάζεται κατά την διάρκεια των επαναλήψεων της αντιστροφής. Αποτέλεσμα της ιδιομορφίας αυτής είναι και ο αντίστοιχος επανασχεδιασμός των μεθόδων για χρήση δύο πολλαπλασιαστών, είτε πρόκειται για μεθόδους ελαχιστοποίησης είτε για καμπύλες L.

Τέλος, ένας σημαντικός παράγοντας της επίλυσης του προβλήματος της δισδιάστατης αντιστροφής με πάχη εξάγεται με την ανάλυση του πίνακα ανάλυσης. Όπως προκύπτει, ενώ οι παράμετροι των αντιστάσεων είναι καλά προσιορισμένες, οι αντίστοιχες των παχών δεν είναι. Αποτελέσματα αυτού είναι η γενικότερη αστάθεια του προβλήματος, όσο αφορά τα πάχη με αποτέλεσμα την υιοθέτηση σχετικά μεγάλων τιμών του πολλαπλασιαστή lagranian, δηλαδή την μη επιτρεπτή μεγάλη αλλαγή των παχών σε κάθε επανάληψη της αντιστροφής.

Κεφάλαιο 5

Εφαρμογή αλγορίθμου

5.1 Εισαγωγή

Στο παρόν κεφάλαιο θα εξετασθεί ο αλγόριθμος σε διάφορα συνθετικά μοντέλα Για κάθε μοντέλο θα γίνεται και σύγκριση με τον αλγόριθμο 2DINVS (Tsourlos 1998), στον οποίο βασίστηκε ο συγκεκριμένος. Κατά την υλοποίηση του, λήφθηκε υπόψιν η κατ επιλογήν χρήση των παραμέτρων των παχών για την εύρεση του μοντέλου. Έτσι η χρήση των παχών ως παράμετροι για την εύρεση του μοντέλου γίνεται κατ επιλογή του χρήστη, πάντα σε σχέση με την πολυπλοκότητα του μοντέλου.

Η διαφορά των δύο αλγόριθμων έγκειται στον σχεδιασμό των αρχικών μοντέλων, με αποτέλεσμα φυσικά και το διαφορετικό μοντέλο αντιστροφής. Η αδυναμία κάποιας πρότερης γνώσης του αρχικού μοντέλου σε συνυπολογισμό με τη σταθερών διαστάσεων παραμέτρων, απαιτεί την χρήση “αρκετών” παραμέτρων κατά το σχεδιασμό του αρχικού μοντέλου. Αντίθετα ο αλγόριθμος που αναπτύχθηκε σε αυτήν την διατριβή, έχοντας την δυνατότητα των μεταβλητών σε διαστάσεις παραμέτρων, απαιτεί κατά τον σχεδιασμό του σαφώς μικρότερο αριθμό αυτών.

5.2. Περιγραφή του αλγορίθμου

Στο σχήμα 5.2 περιγράφεται το διάγραμμα ροής του αλγορίθμου για την επίλυση της δισδιάστατης αντιστροφής με πάχη.

ΑΡΧΙΚΟ ΣΤΑΔΙΟ

Για την έναρξη του αλγορίθμου αντιστροφής είναι απαραίτητη η εισαγωγή ενός αρχικού μοντέλου m_0. Στο μοντέλο αυτό προσδιορίζονται οι αρχικές τιμές για τις αντιστάσεις των παραμέτρων, καθώς και το εκτιμώμενο πάχος τους. Ως αρχικές τιμές, μπορούν να ληφθούν τιμές που προκύπτουν από μια τυπική δισδιάστατη αντιστροφή.

Εν συνεχεία εισάγονται στον αλγόριθμο το αρχείο με τα δεδομένα των μετρήσεων y. Το αρχείο αυτό περιέχει το σύνολο των μετρήσεων που απαρτίζουν το πρόβλημα, και περιέχει τις συντεταγμένες των θέσεων των τεσσάρων ηλεκτροδίων (δύο ηλεκτρόδια ρεύματος και δύο ηλεκτρόδια δυναμικού), καθώς και την φαινόμενη αντίσταση που μετρήθηκε.

Στο αρχικό στάδιο ακόμα, γίνεται επιλογή της μεθόδου του υπολογισμού του ιακωβιανού πίνακα των παχών (μονοδιάστατο ή δισδιάστατο), καθώς και η τεχνική εύρεσης του πολλαπλασιαστή Lagranian (μονοδιάστατη ή δισδιάστατη ελαχιστοποίηση). Τέλος εισάγεται και ο μέγιστος αριθμός επαναλήψεων.

Με βάση την γεωμετρία των μετρήσεων και τον αρχικό σχεδιασμό των παραμέτρων, σχεδιάζεται το πλέγμα των πεπερασμένων στοιχείων που θα χρησιμοποιηθεί στην επίλυση του ευθέος προβλήματος. Στο στάδιο αυτό, είναι απαραίτητο να χωριστούν αρχικά τα τριγωνικά στοιχεία που απαρτίζουν την κάθε παράμετρο. Επιπλέον υπολογίζεται και ο πίνακας συνάφειας c.

ΕΠΙΛΥΣΗ ΤΟΥ ΕΥΘΕΟΣ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ

- Βάση του αρχικού μοντέλου m_0 επιλύεται το ευθύ πρόβλημα για τη δημιουργία των συνθετικών δεδομένων $f(m_0)$.
- Υπολογίζεται ο ιακωβιανός πίνακας των αντιστάσεων.
- Υπολογίζεται ο ιακωβιανός πίνακας των παχών.

ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΗ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ

- Αναλόγως με την τεχνική που επιλέχθηκε βρίσκονται οι πολλαπλασιαστές Lagranian, που θα χρησιμοποιηθούν στην επίλυση του συστήματος
- Για κάθε επανάληψη, βρίσκεται η διόρθωση του μοντέλου dm σύμφωνα με τη σχέση 5.1

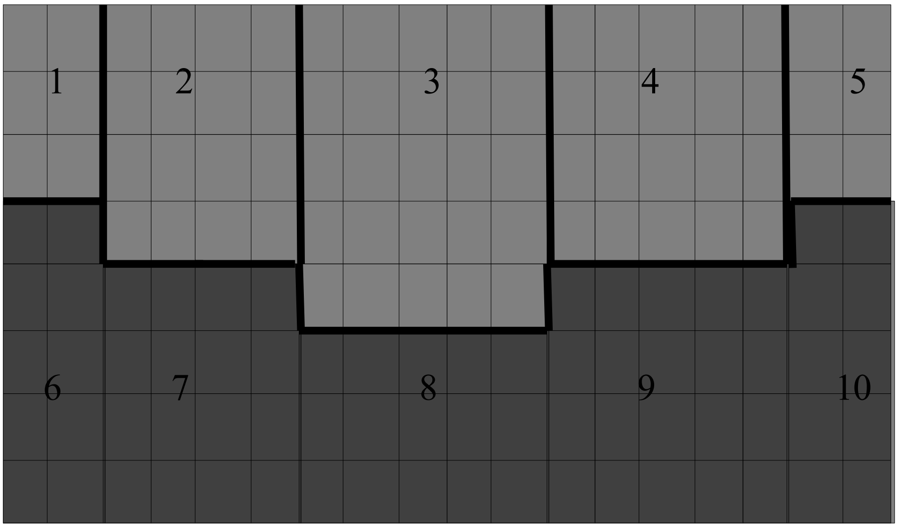
$$dm_{i+1} = dm_i + [J^T J + \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix} C^T C]^{-1} J^T dy \tag{5.1}$$

- Πραγματοποιείται η διόρθωση του μοντέλου.
- Πραγματοποιείται επανασχεδιασμός του πλέγματος των πεπερασμένων στοιχείων, και η εύρεση των νέων τριγωνικών στοιχείων που απαρτίζουν
- Επιλύεται το ευθύ πρόβλημα για την δημιουργία των νέων συνθετικών δεδομένων.
- Αν πληρείται κάποιο από τα κριτήρια σύγκλισης ο αλγόριθμος σταματά, διαφορετικά ξαναυπολογίζονται οι ιακωβιανοί πίνακες και γίνεται νέα διόρθωση του μοντέλου μέχρι να επιτευχθούν αυτά.

ΕΠΙΠΡΟΣΘΕΤΑ ΣΤΟΙΧΕΪΑ ΠΟΥ ΛΑΒΑΝΟΝΤΑΙ ΥΠΟΨΗ

Ο συγκεκριμένος αλγόριθμος, προϋποθέτει την ύπαρξη ασυνεχειών, και την ύπαρξη κάποιας στρωματογραφίας. Με στόχο να ενισχυθεί η στρωματογραφία και η εξασφάλιση κάποιου ορίου μεταξύ των σχηματισμών, σε κάποια μοντέλα, κρίνεται σκόπιμη η χρήση της παρακάτω τεχνικής.

Έτσι για ένα υποθετικό μοντέλο που αποτελείται από πέντε βυθοσκοπήσεις με ένα στρώμα και ημιχώρο, θεωρείται ότι οι παράμετροι που αποτελούν το στρώμα πρέπει να έχουν ίδια αντίσταση. Αναλυτικά κατά τον σχεδιασμό του μοντέλου θεωρείται ότι οι παράμετροι 1 έως 5 αφορούν το πρώτο στρώμα, και οι παράμετροι 6 έως 10 τον ημιχώρο (σχήμα 5.1).



Σχήμα 5.1
θεώρηση τεχνικής
μέσης τιμής

Κατά την διάρκεια της αντιστροφής, κάθε παράμετρος αποτελεί ανεξάρτητη μεταβλητή. Όμως στον επανασχεδιασμό του μοντέλου για την επόμενη επανάληψη οι παράμετροι αυτοί ομαδοποιούνται και η νέα τιμής αντίστασης βρίσκεται από το μέσο όρο αυτών.

Με την τεχνική αυτή ενισχύεται η στρωματογραφία, όμως μειώνεται η δυνατότητα απεικόνισης πλευρικής ασυνέχειας. Σε περιπτώσεις απότομων αλλαγών (π.χ. ρήγματα) απαιτείται επανασχεδίαση των παραμέτρων που αποτελούν ένα στρώμα. Η συγκεκριμένη τεχνική (μέση τιμή) εφαρμόζεται κυρίως σε μοντέλα που δεν παρουσιάζουν μεγάλες διαφορές των αντιστάσεων, με σκοπό την διατήρηση της επιφάνειας ασυνέχειας κατά την διάρκεια των επαναλήψεων. Αντίθετα σε μοντέλα με μεγάλες αλλαγές στις αντιστάσεις κρίνεται περιττή.

ΚΡΙΤΙΡΙΑ ΓΙΑ ΝΑ ΣΤΑΜΑΤΗΣΕΙ Η ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΑ ΤΗΣ ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΗΣ

Υπάρχουν τρία κριτήρια που εφαρμόζονται σε κάθε επανάληψη. Μετά την διόρθωση του μοντέλου dm, και τον υπολογισμό των νέων συνθετικών δεδομένων, υπολογίζεται το επί τοις εκατό μέσο τετραγωνικό σφάλμα ε των δεδομένων (RMS), σύμφωνα με την σχέση 5.2.

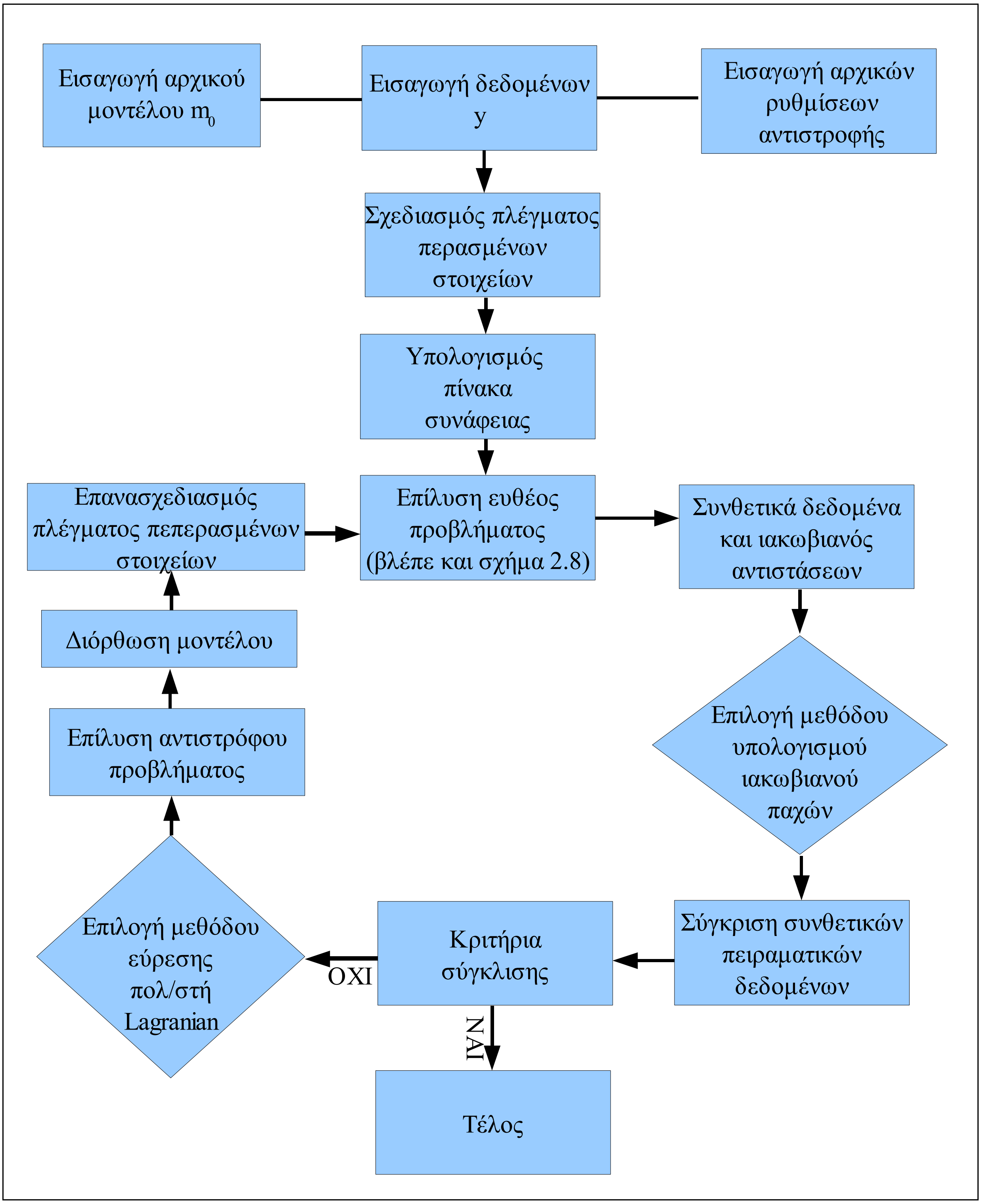
$$\varepsilon=(10^{(\sqrt{\chi^2})}-1)\,X\,100 \qquad (5.2)$$

Όπου x^2 ορίζεται ως

$$\chi^2=\frac{1}{N-M}\sum_{i=1}^{N}(d_i^{ob}-d_i^{th})^2 \qquad (5.3)$$

Ν είναι ο αριθμός των μετρήσεων, Μ ο αριθμός των παραμέτρων και d^{ob} και d^{th} τα πειραματικά και συνθετικά δεδομένα.

- Ο αλγόριθμος σταματάει όταν η τιμή του %ε είναι μικρότερη ή ίση από το επίπεδο του θορύβου, που καθορίζεται από τον χρήστη.
- Όταν μετά από κάθε επανάληψη το %ε δεν βελτιώνεται αρκετά.
- Όταν ο αλγόριθμος φτάσει τον μέγιστο αριθμό επαναλήψεων.

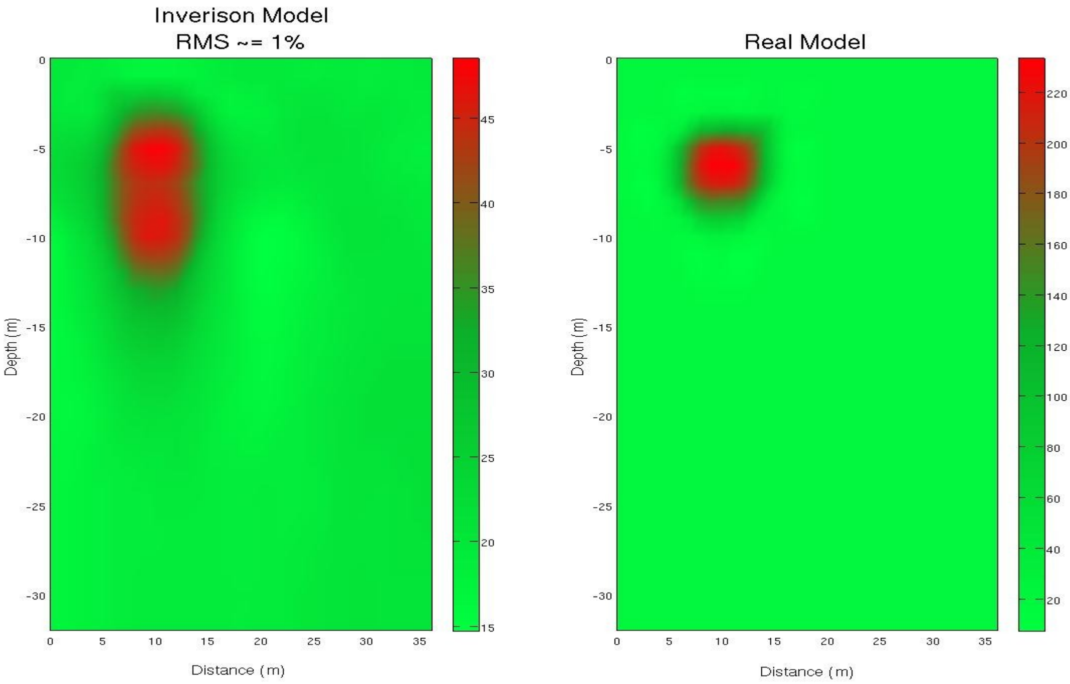


Σχήμα 5.2
Διάγραμμα ροής

5.3 Έλεγχος μοντέλου

Για τον έλεγχο του αλγόριθμου, δοκιμάστηκαν διάφορα μοντέλα, λαμβάνοντας υπόψιν μόνο τις παραμέτρους των αντιστάσεων και θεωρώντας τα πάχη γνωστά και σταθερά. Έτσι η μοντελοποίηση πραγματοποιείται ως μια τυπική δισδιάστατη αντιστροφή.

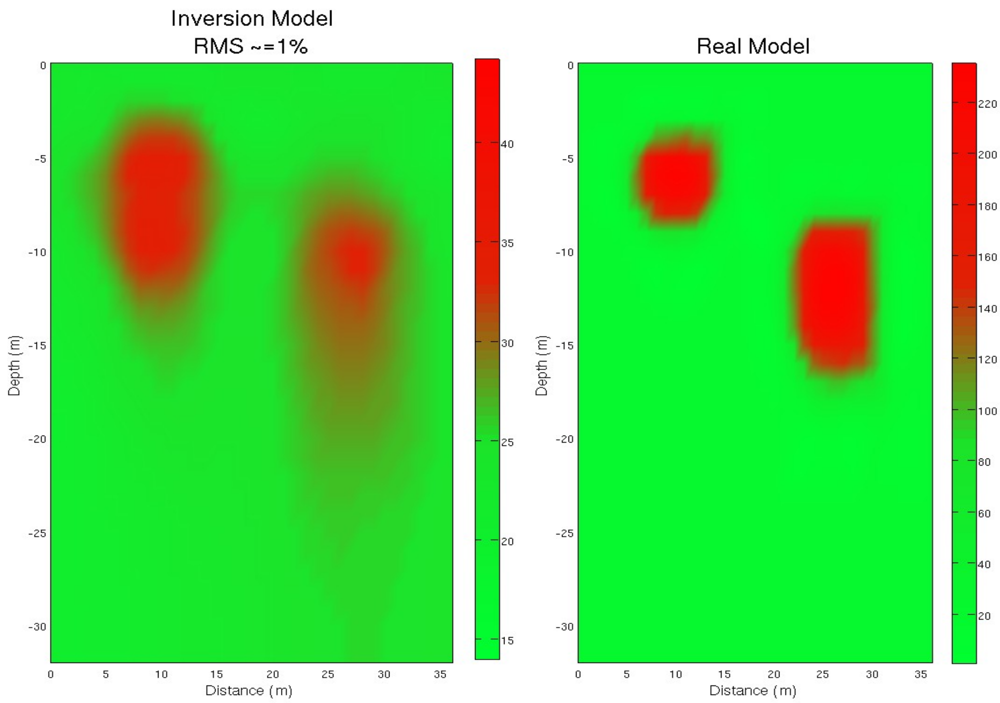
Στο σχήμα 5.3.β παρουσιάζεται το συνθετικό μοντέλο και στο σχήμα 5.3.α το αποτέλεσμα της αντιστροφής. Ως αρχικό μοντέλο χρησιμοποιήθηκε ομογενής γη. Το αποτέλεσμα της αντιστροφής βρίσκεται σε πολύ καλή συμφωνία με το πραγματικό.



Σχήμα 5.3
Μοντέλο αντιστροφής (σχήμα α)
και πραγματικό μοντέλο(σχήμα β)

Στο σχήμα 5.4.α παρουσιάζεται ένα πιο σύνθετο μοντέλο όπου υπάρχουν δύο δομές παρομοίων διαστάσεων σε διαφορετικά βάθη (σχήμα 5.4.β).Το αρχικό μοντέλο είναι ομογενής γη.

Οι διάφορες δοκιμές του αλγόριθμου χωρίς την χρήση των παχών ως παραμέτρους, έδειξε ότι τα μοντέλα αντιστροφής είναι πολύ κοντά στα πραγματικά, δείγμα ότι ο αλγόριθμος είναι λειτουργικός.

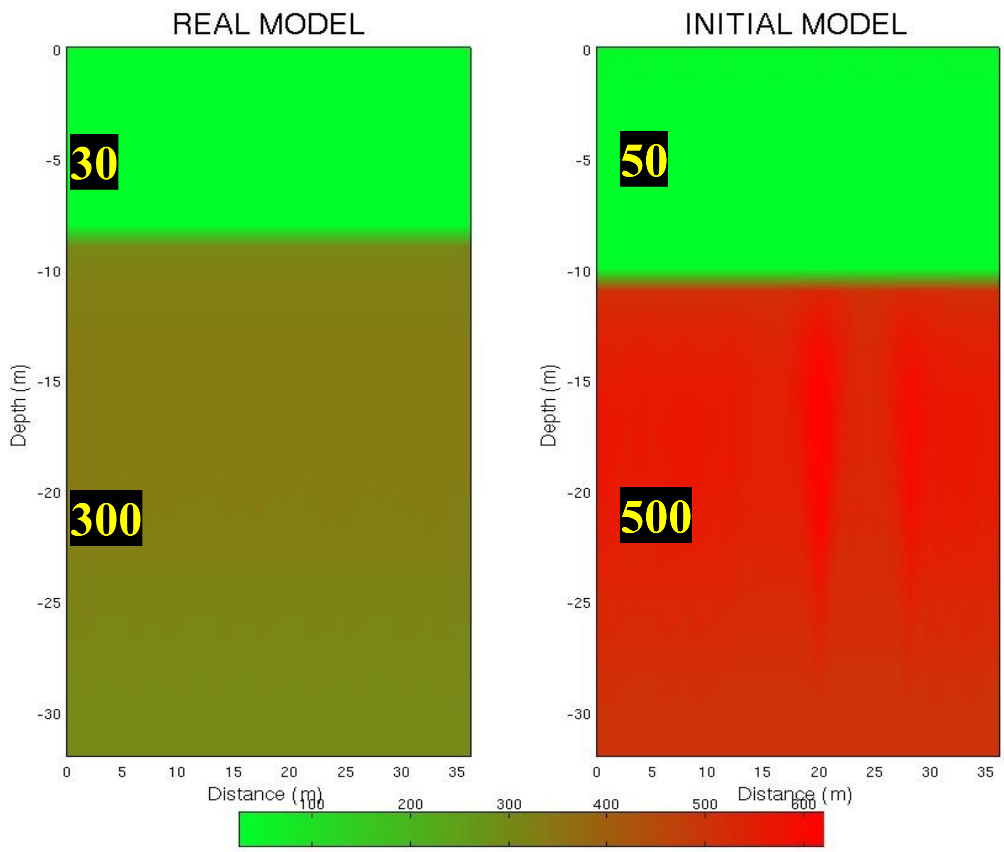


Σχήμα 5.4
Μοντέλο αντιστροφής (σχήμα α)
και πραγματικό μοντέλο(σχήμα β)

5.4 Συνθετικά μοντέλα

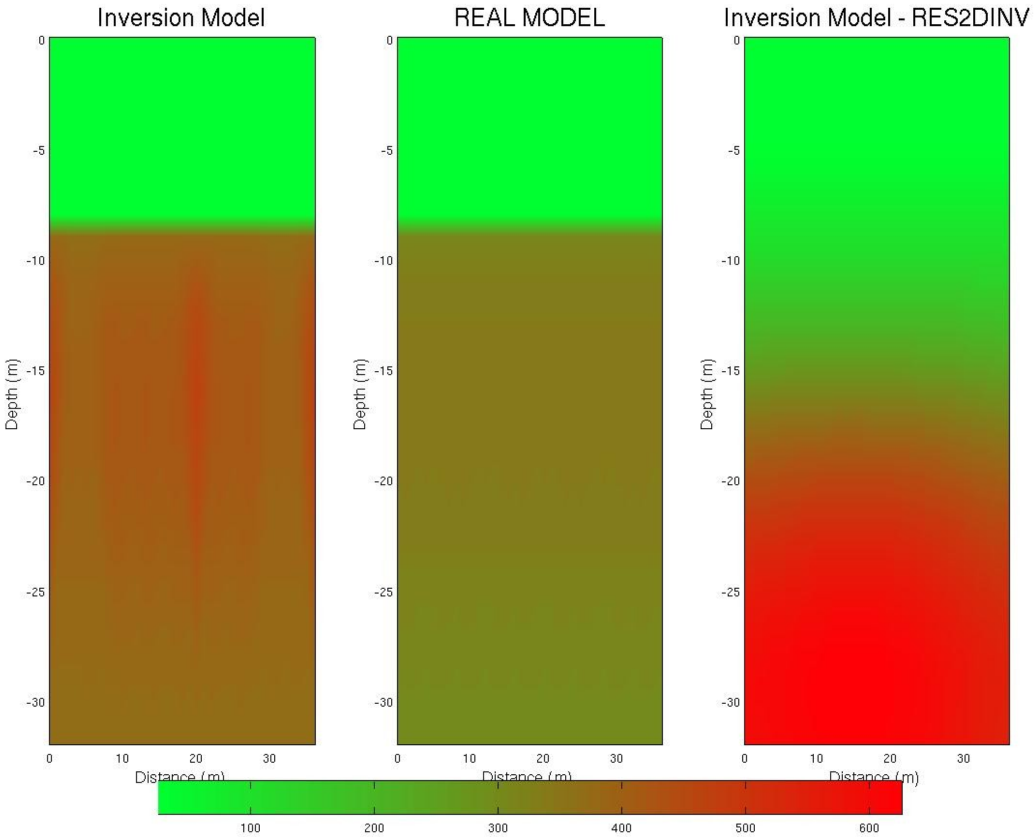
5.4.1 Μοντέλο Α

Το πιο απλό δυνατό μοντέλο είναι οριζόντια στρωματογραφία ενός στρώματος και ημιχώρου. Το συγκεκριμένο συνθετικό μοντέλο, παρά την φαινομενική απλότητα, είναι από τα πλέον δύσκολα στην ερμηνεία, καθώς οι λύσεις που μπορούν να προκύψουν είναι άπειρες (μικρή αντίσταση – μεγάλο πάχος). Ο παρών αλγόριθμος απαιτεί ένα αρχικό μοντέλο, το οποίο επιλέχθηκε με τρόπο που να διαφέρει από το πραγματικό, τόσο στις αντιστάσεις όσο και στο πάχος του στρώματος, όπως φαίνεται στο σχήμα 5.5. Η επιλογή του αρχικού μοντέλου, σε καμία περίπτωση δεν πρέπει να γίνεται χωρίς εκτεταμένη προσοχή, καθώς η τελική λύση εξαρτάται άμεσα από το αρχικό μοντέλο. Αυτό είναι και μειονέκτημα της μεθόδου, σε αντίθεση με την τυπική δισδιάστατη αντιστροφή όπου το αρχικό μοντέλο συνήθως είναι ανεξάρτητο του τελικού αποτελέσματος.



Σχήμα 5.5
Πραγματικό (συνθετικό) και αρχικό μοντέλο

Τα ίδια δεδομένα χρησιμοποιήθηκαν στους δυο αλγόριθμους και τα αποτελέσματα της αντιστροφής παρουσιάζονται στο σχήμα 5.6. Η τυπική δισδιάστατη αντιστροφή, δείχνει μια ομαλή μετάβαση της δομής , με αδυναμία εύρεσης κάποιας επιφάνειας ασυνέχειας. Παρόλα αυτά, το επι τοις εκατό μέσο σχετικό σφάλμα (RMS) είναι 0.3 %. Αντίθετα, το σφάλμα στον αλγόριθμο που αναπτύχθηκε σε αυτήν την διατριβή είναι 4.5 %. Όμως το μοντέλο που προκύπτει βρίσκεται σε καλύτερη συμφωνία με το πραγματικό, ενώ η επιφάνεια ασυνέχειας είναι ιδιαίτερα αναγνωρίσιμη.



Σχήμα 5.6
Αποτελέσματα αντιστροφής με δύο αλγόριθμους

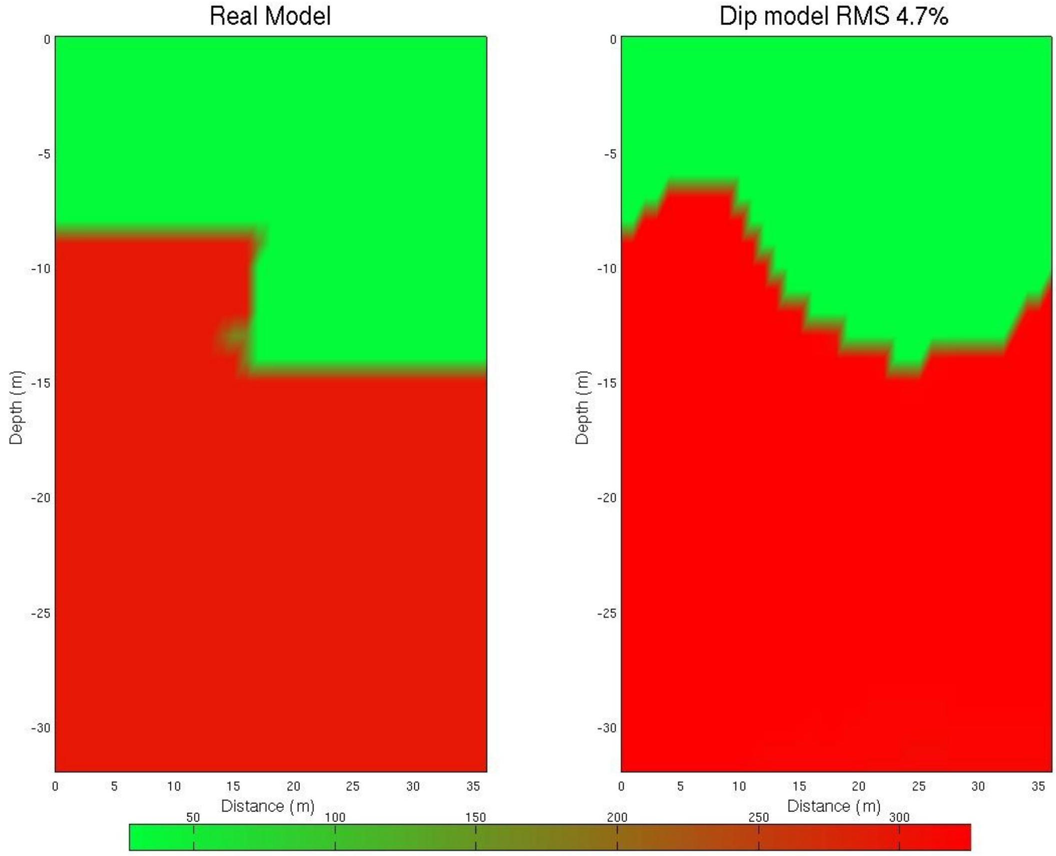
Από το συγκεκριμένο μοντέλο, είναι δυνατό να εξαχθούν τα εξής συμπεράσματα

α) Η κρισιμότητα του αρχικού μοντέλου, στον αλγόριθμο που αναπτύχθηκε σε αντίθετα με την τυπική δισδιάστατη αντιστροφή. Αρκετές φορές, είναι χρήσιμο η εισαγωγή ενός αρχικού μοντέλου που προκύπτει από ένα τυπικό δισδιάστατο αλγόριθμο αντιστροφής.

β) Το επί τοις εκατό σφάλμα που προκύπτει από αυτόν τον αλγόριθμο είναι συγκριτικά μεγαλύτερος από ότι σε μια τυπική δισδιάστατη αντιστροφή. Τέλος ο ίδιος ο σχεδιασμός του αλγορίθμου δεν λαμβάνει υπόψιν μικρές αλλαγές στα πάχη καθώς εξομαλύνει τις μικρές αλλαγές.

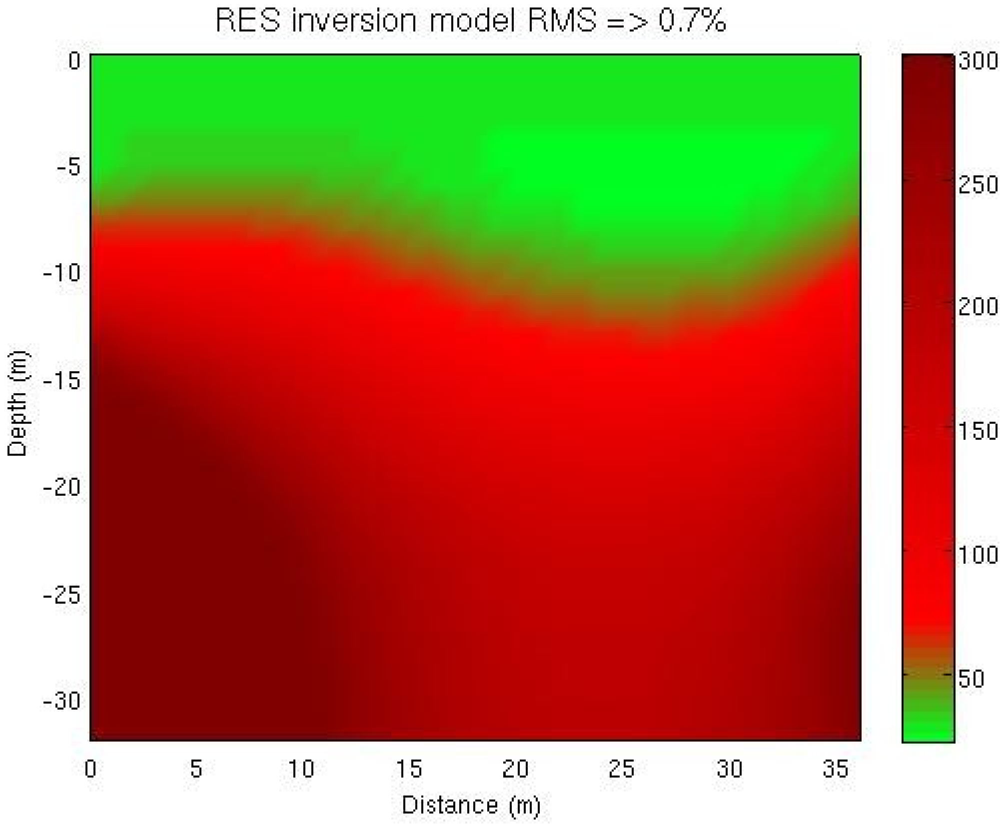
5.4.2 Μοντέλο Β

Το ακόλουθο παράδειγμα δείχνει ένα απότομο βύθισμα του υποβάθρου, που μπορεί να αντιπροσωπεύει κάποιο κατακόρυφο ρήγμα (σχήμα 5.7). Χρησιμοποιώντας ως αρχικό μοντέλο, το αρχικό μοντέλο Α, στο σχήμα παρουσιάζεται το αποτέλεσμα της αντιστροφής. Δεν είναι αρκετά σαφές το απότομο πέσιμο, πάντως αναπαριστάται αρκετά καλά μια απότομη δομή.



Σχήμα 5.7
Πραγματικό και αποτέλεσμα αντιστροφής
για το μοντέλο Β

Το αντίστοιχο αποτέλεσμα αντιστροφής, με τον αλγόριθμο 2DINVS, παρουσιάζεται στο σχήμα 5.8 Ο συγκεκριμένος αλγόριθμος, δεν μπορεί να δείξει το απότομο πέσιμο του υποβάθρου, καθώς ο σχεδιασμός εξομαλύνει τις απότομες αλλαγές. Παρόλα αυτά, το σχετικό σφάλμα είναι συγκριτικά πολύ μικρότερο.

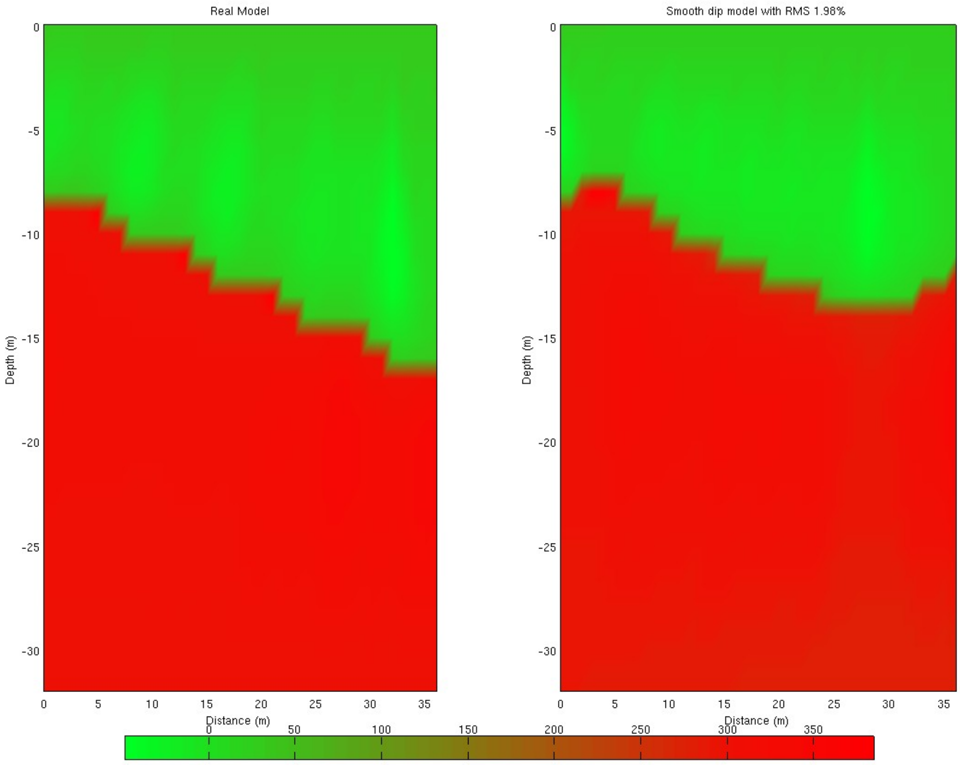


Σχήμα 5.8
Αποτέλεσμα αντιστροφής από τον
αλγόριθμο 2DINVS (Tsourlos 1998)

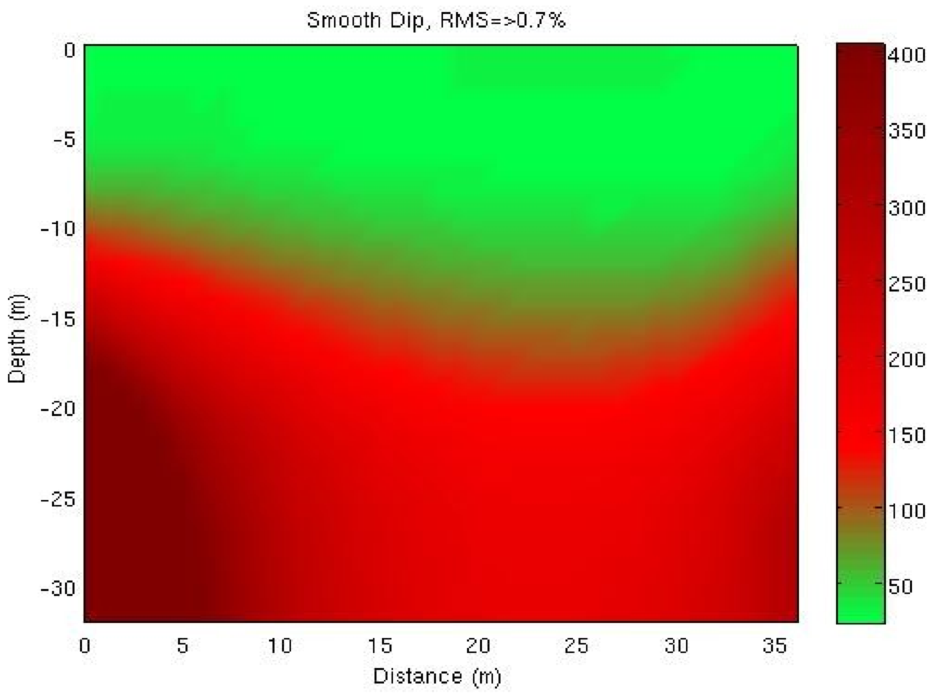
5.4.3 Μοντέλο Γ

Το μοντέλο αυτό αναπαριστά μια ομαλή πτώση του στρώματος (σχήμα 5.9). Χρησιμοποιώντας ως αρχικό μοντέλο, το αρχικό μοντέλο Α, στο σχήμα παρουσιάζεται το αποτέλεσμα της αντιστροφής. Το μοντέλο που προέκυψε αναπαριστά αρκετά καλά την πραγματική δομή, τουλάχιστον για το πρώτο τμήμα της. Το δεξιό άκρο, όπως και στο μοντέλο Β, παρουσιάζεται παραμορφωμένο λόγω του τρόπου σχεδιασμού του πλέγματος των πεπερασμένων στοιχείων, και τις οριακές συνθήκες όπου για την επίλυση των σχέσεων δημιουργούνται στοιχεία πέρα από την περιοχή της μελέτης.

Το αντίστοιχο αποτέλεσμα αντιστροφής από τον αλγόριθμο 2DINVS, φαίνεται στο σχήμα 5.10. Λόγω της ομαλής πτώσης του στρώματος, το αποτέλεσμα αυτό είναι άμεσα συγκρίσιμο με αυτό που προκύπτει από τον αλγόριθμο που αναπτύχθηκε για την διατριβή αυτή, πράγμα αναμενόμενο. Και οι δυο αλγόριθμοι υποφέρουν από το ίδιο πρόβλημα στα άκρα του μοντέλου, λόγω όμοιου σχεδιασμού του πλέγματος.



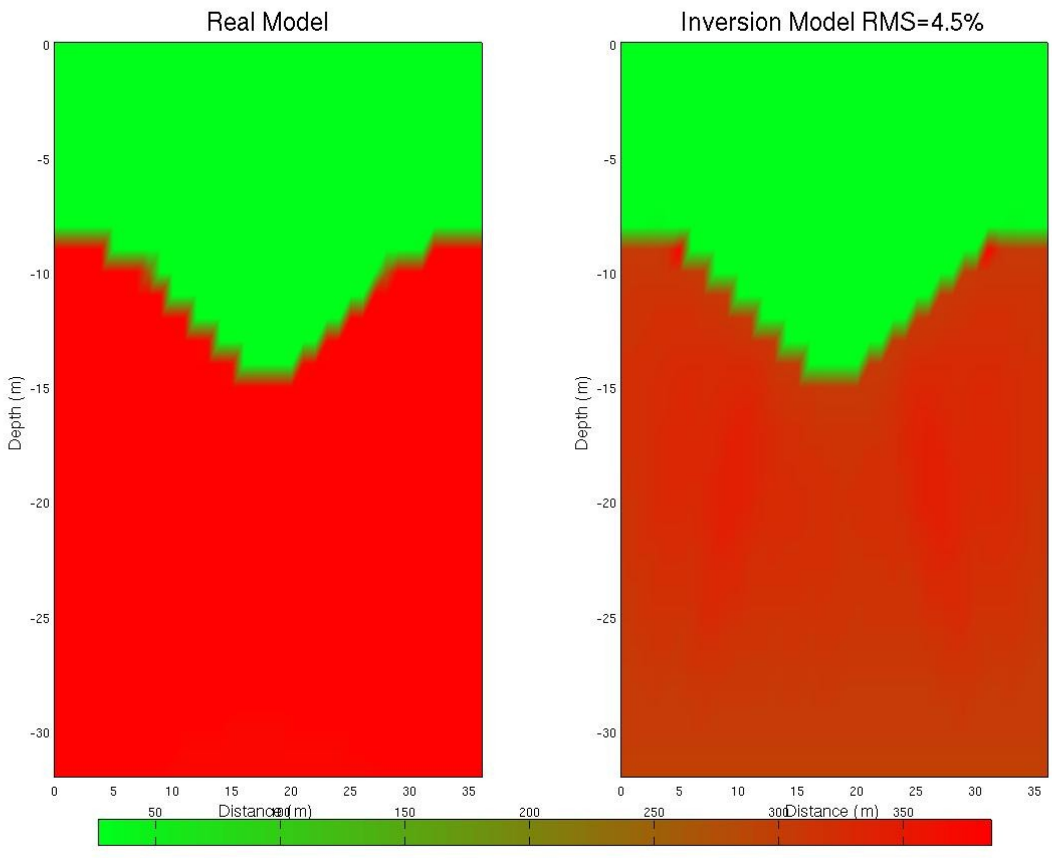
Σχήμα 5.9
Πραγματικό και αποτέλεσμα αντιστροφής
για το μοντέλο Γ



Σχήμα 5.10
Αποτέλεσμα αντιστροφής από

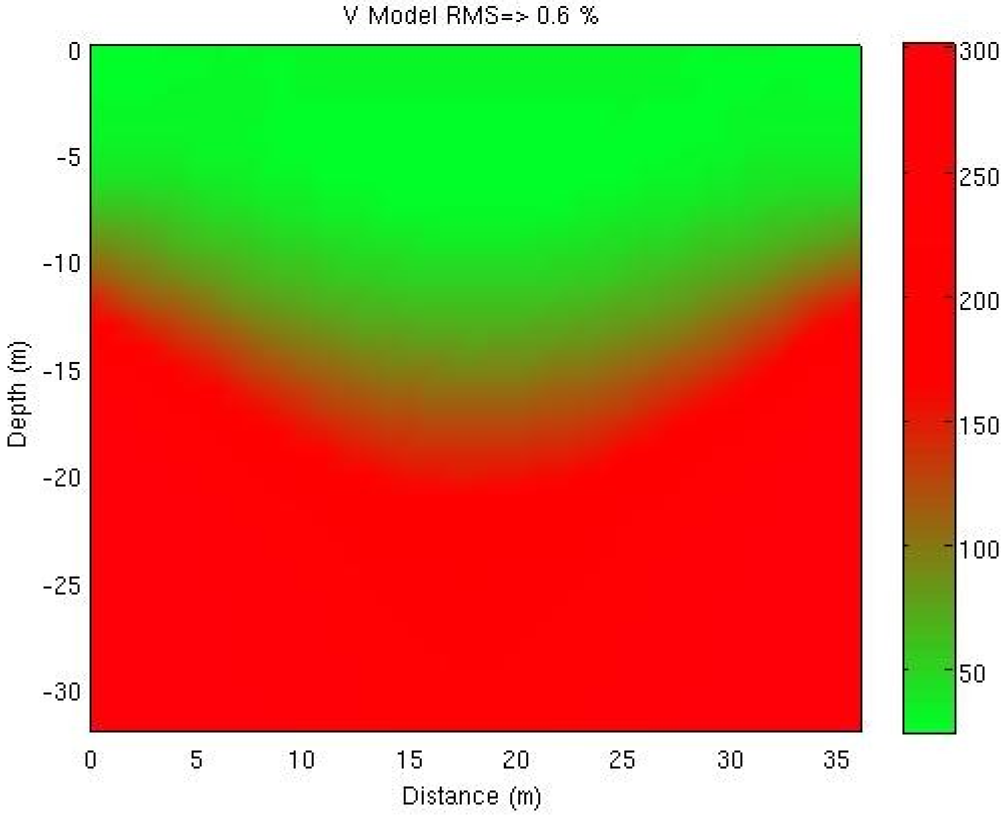
5.4.4 Μοντέλο Δ

Στο μοντέλο Δ, αναπαριστάται μια κοιλάδα με απότομο πέσιμο (σχήμα 5.11). Χρησιμοποιώντας ως αρχικό μοντέλο, το αρχικό μοντέλο Α, στο σχήμα παρουσιάζεται το αποτέλεσμα της αντιστροφής. Το μοντέλο που προκύπτει αναπαριστά πολύ καλά την δομή, τόσο όσον αφορά τα πάχη όσο και τις αντιστάσεις. Παρόλα αυτά, το σχετικό σφάλμα είναι πάρα πολύ μεγάλο. Αυτό οφείλεται στις διαφοροποιημένες αντιστάσεις του μοντέλου, και ιδίως αυτές του πάνω στρώματος. Ο ταυτόχρονος υπολογισμός του πολλαπλασιαστή, όπως αναφέρθηκε στο κεφάλαιο 3, στοχεύει στην εύρεση της καλύτερης τιμής αντιστάσεων – παχών για το μοντέλο της προηγούμενης επανάληψης με αποτέλεσμα οι τιμές να είναι συμβιβασμός ανάμεσα στην διόρθωση του προηγούμενου μοντέλου και την ελαχιστοποίηση του σφάλματος.



Σχήμα 5.11
Πραγματικό και αποτέλεσμα αντιστροφής
για το μοντέλο Δ

Το αντίστοιχο αποτέλεσμα αντιστροφής από τον αλγόριθμο 2DINVS, φαίνεται στο σχήμα 5.12. Ο συγκεκριμένος αλγόριθμος ομαλοποιεί το μοντέλο δίνοντας το μια καμπύλη μορφή, που όμως παρουσιάζει πολύ μικρότερο σφάλμα.

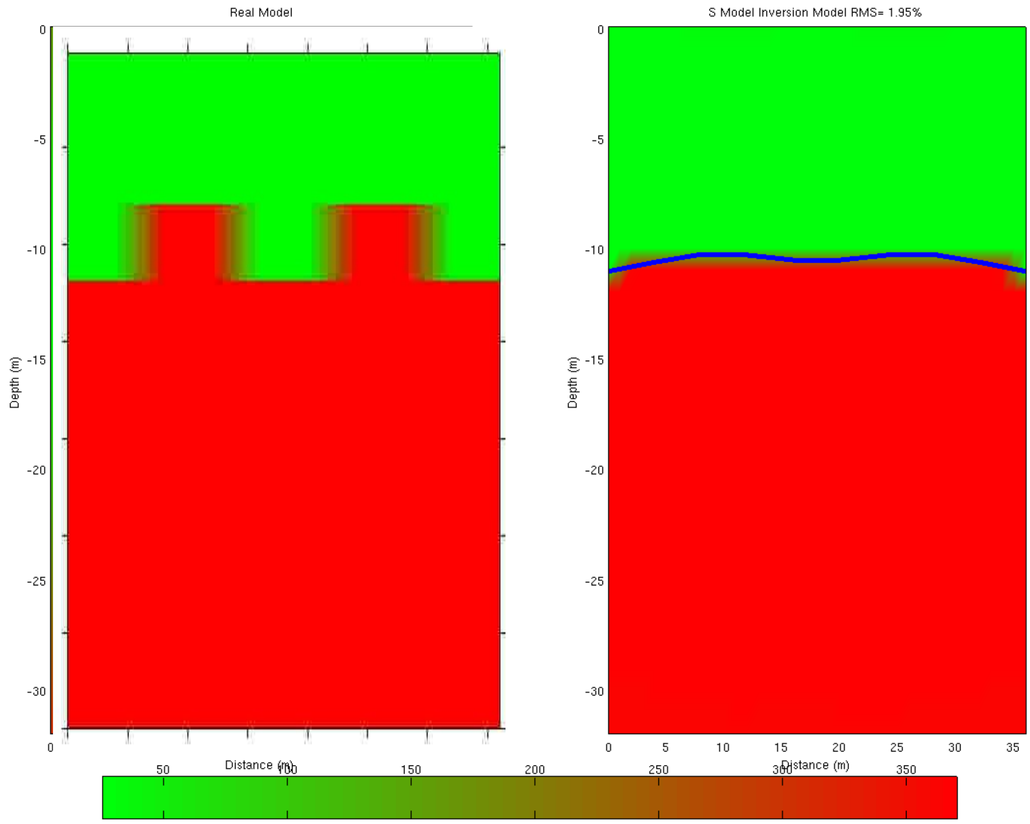


Σχήμα 5.12
Αποτέλεσμα αντιστροφής από
αλγόριθμο 2DINVS (1998)

5.4.5 Μοντέλο Ε

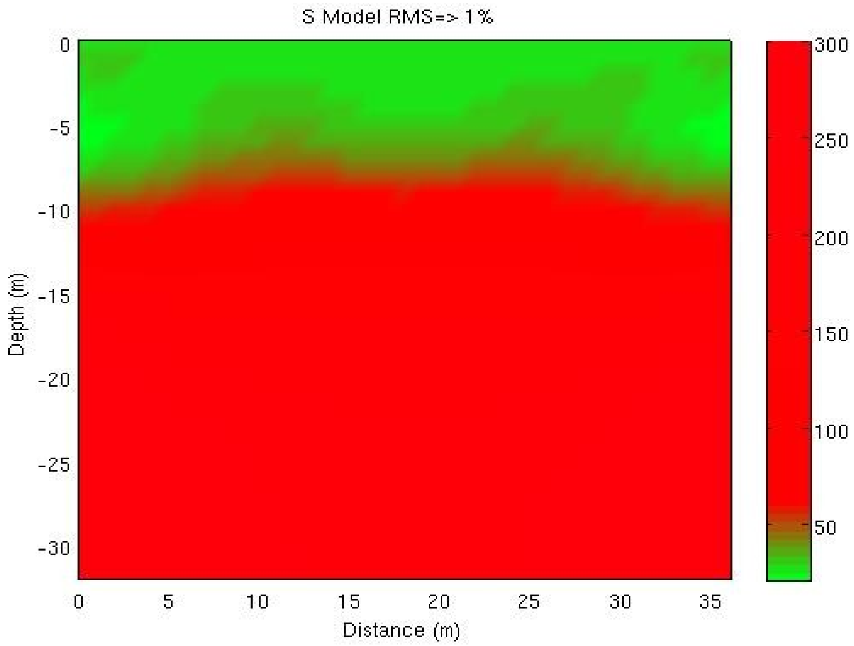
Στο μοντέλο Ε, αναπαριστάται ένα συνθετικό παράδειγμα με πολύ απότομες ανυψώσεις του υποβάθρου (σχήμα 5.13). Χρησιμοποιώντας ως αρχικό μοντέλο, το αρχικό μοντέλο Α, στο σχήμα παρουσιάζεται το αποτέλεσμα της αντιστροφής. Παρατηρείται αδυναμία εύρεσης του πραγματικού μοντέλου, το οποίο μπορεί να οφείλεται σε διάφορους λόγους με κύριο την πολυπλοκότητα του. Επιπλέον, λόγω σχεδίασης του αλγορίθμου, μικρές μεταβολές των παχών του μοντέλου εξομαλύνονται, δηλαδή ενώ ο αλγόριθμος διορθώνει τα πάχη όπως φαίνεται στο σχήμα με μπλε γραμμή, γίνεται εξομάλυνση με αποτέλεσμα αυτές οι διορθώσεις να μην γίνονται στο μοντέλο.

Το αντίστοιχο μοντέλο που προκύπτει από μια τυπική δισδιάστατη αντιστροφή παρουσιάζεται στο σχήμα 5.14. Και σε αυτήν την περίπτωση το μοντέλο που προκύπτει δεν βρίσκεται σε συμφωνία με το πραγματικό, παρά το μικρό σφάλμα του. Συμπερασματικά, για μοντέλα με πολύ απότομες αλλαγές δεν είναι δυνατόν να αναπαρασταθούν, καθώς πρόκειται για γενικότερη αδυναμία της μεθόδου της ηλεκτρικής αντίστασης.



Σχήμα 5.13

Πραγματικό και αποτέλεσμα αντιστροφής
για το μοντέλο E



Σχήμα 5.14
Αποτέλεσμα αντιστροφής από
αλγόριθμο 2DINVS (1998)

5.5 Πραγματικά παραδείγματα

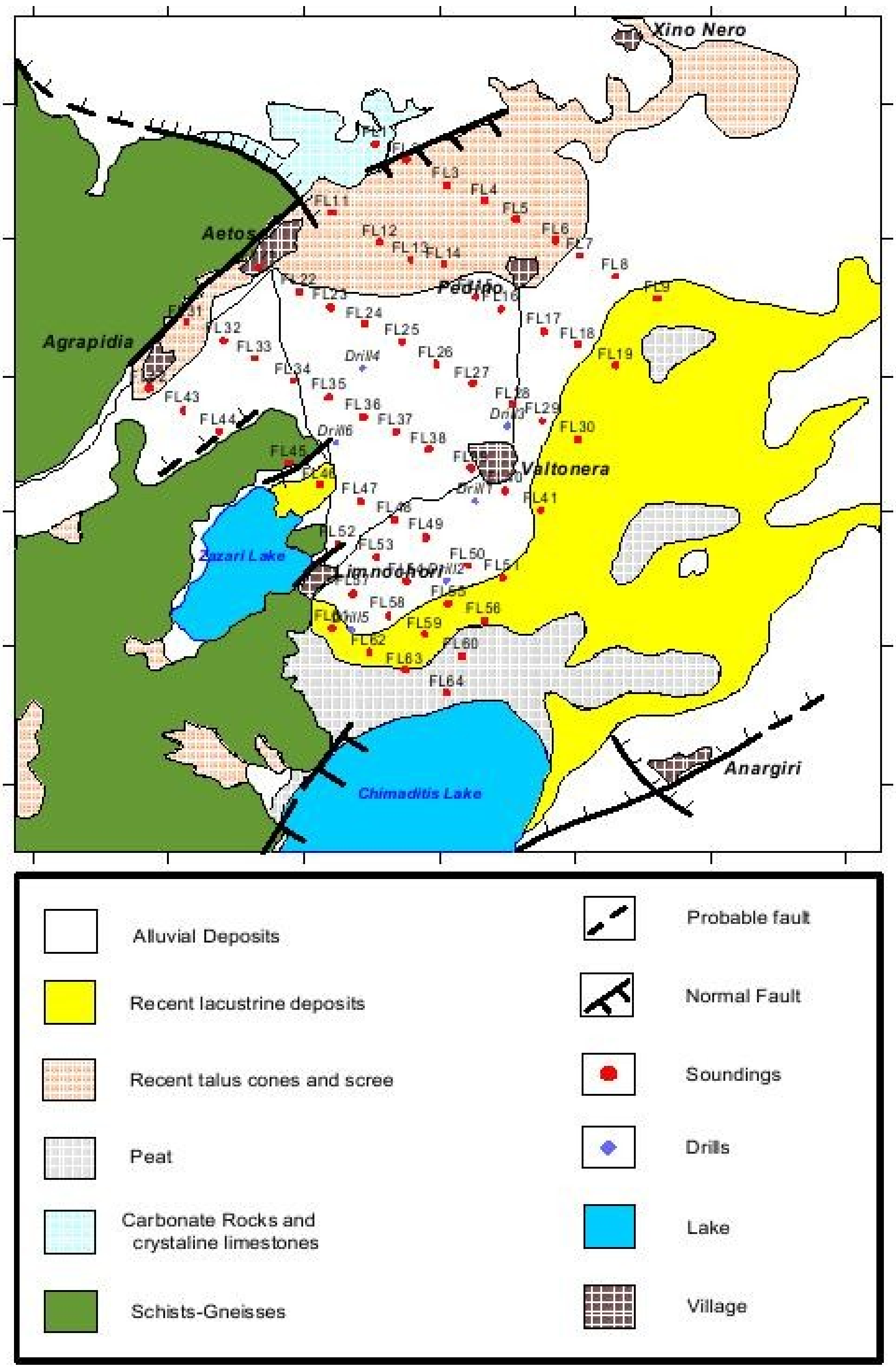
Στην παρούσα ενότητα θα γίνει εφαρμογή του αλγορίθμου σε πραγματικά δεδομένα που συλλέχθηκαν από το Εργαστήριο Γεωφυσικής Θεσσαλονίκης. Λόγω της εξειδικευμένης εφαρμογής του αλγορίθμου τόσο όσο αφορά το πεδίο έρευνας όσο και την μορφή των μετρήσεων δεν κατέστη δυνατή η εφαρμογή του σε μεγάλο πλήθος δεδομένων.

5.5.1 Αμύνταιο

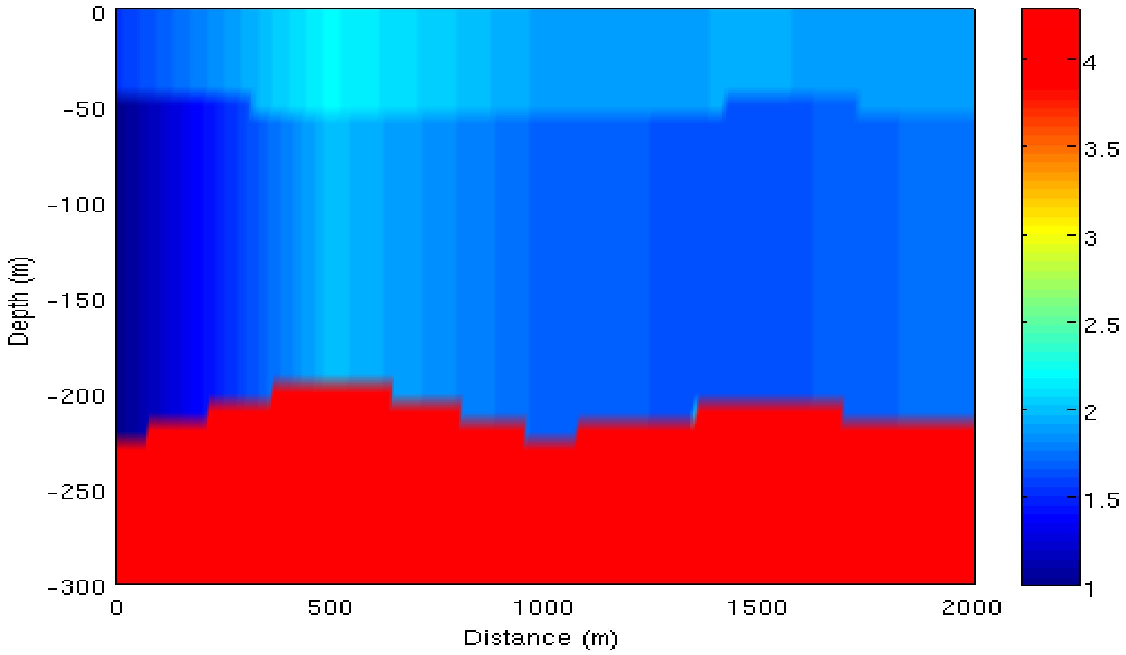
Μια μεγάλης κλίμακας ηλεκτρική βυθοσκόπηση πραγματοποιήθηκε στην περιοχή της κοιλάδας του Αμύνταιου. Η περιοχή βρίσκεται ανάμεσα σε δύο λίμνες (Ζαζάρι και Χειμαδίτης) και σε δύο χωριά που παρουσιάζονται στο σχήμα 5.15 . Η περιοχή έχει καλά γνωστή γεωλογική ιστορία (Mountrakis 1984) και η ύπαρξη των ρηγμάτων στην περιοχή οριοθετείται σύμφωνα με το σχήμα.

Ένα σύνολο 64 βυθοσκοπήσεων πραγματοποιήθηκαν στην περιοχή, με τις θέσεις που φαίνονται στο σχήμα, με μέγιστη απόσταση ΑΒ/2 τα 1000 μέτρα. Η απόσταση μεταξύ των βυθοσκοπήσεων είναι ανα 500 μέτρα με δύο διευθύνσεις, μια ΒΔ-ΝΑ και μια ΝΔ-ΒΑ. Η επεξεργασία αυτών των δεδομένων σαν δισδιάστατη τομογραφία παρουσιάστηκε στην εργασία των Atmetzoglou et al, 2003.

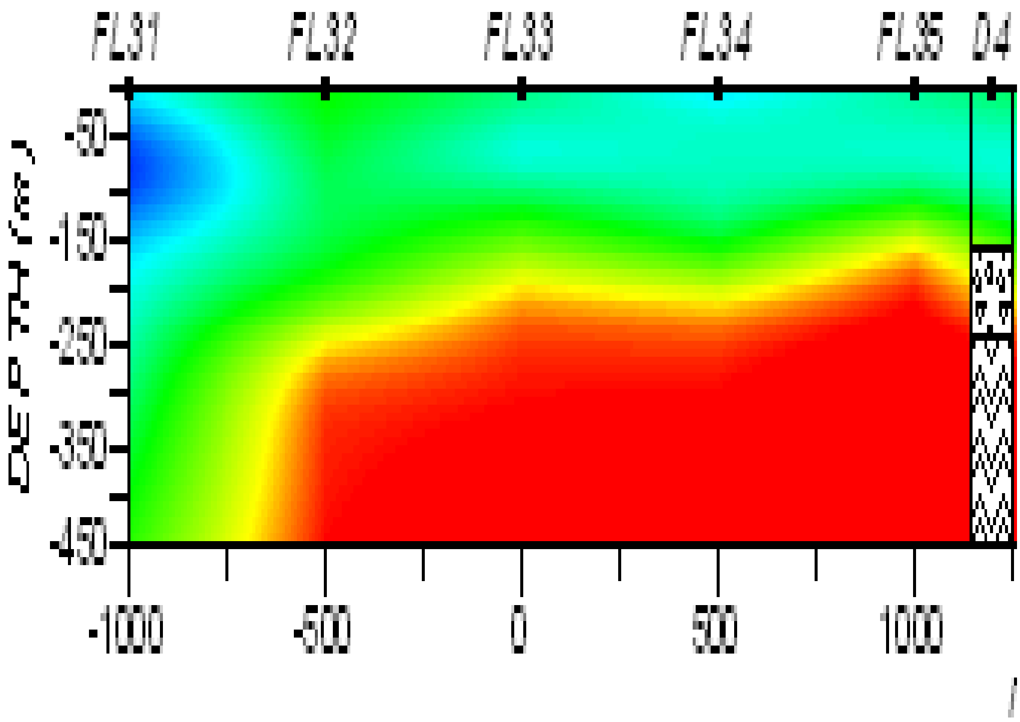
Στην παρούσα διατριβή, επιλέχθηκαν κάποιες τυχαίες τομογραφίες που επεξεργάστηκαν με τον αλγόριθμο που αναπτύχθηκε στην διατριβή αυτή. Στην διατριβή παρουσιάζεται η τομή FL31-FL35, και γίνεται σύγκριση των δύο αλγορίθμων (σχήμα 5.16)



Σχήμα 5.15
Περιοχή μελέτης Αμύνταιου

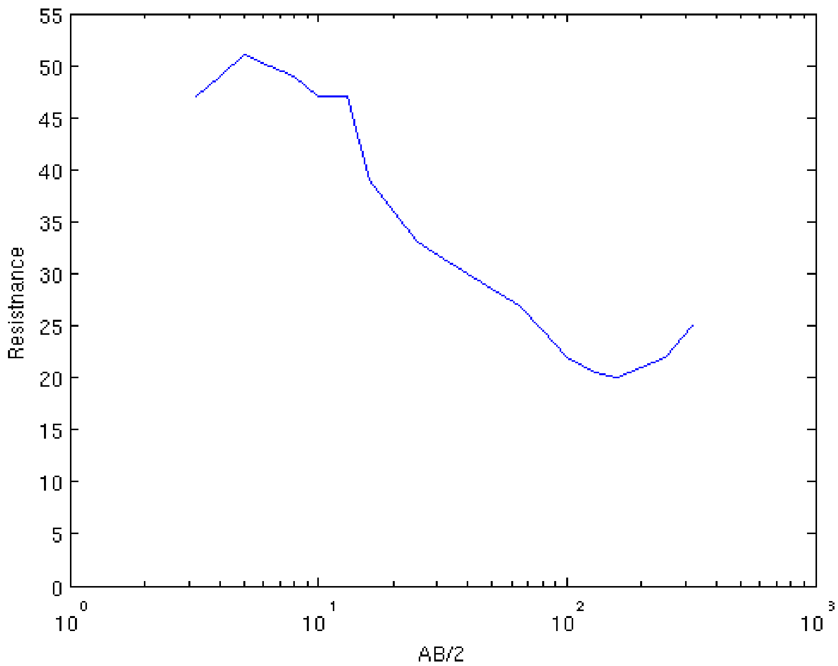


Σχήμα 5.16.α
Αποτέλεσμα αντιστροφής



Σχήμα 5.16.β
Αποτέλεσμα αντιστροφής
2DINVS (Tsourlos 1998)

Τα δύο μοντέλα που προέκυψαν από τους αντίστοιχους αλγόριθμους παρουσιάζουν όμοια συμπεριφορά, με εξαίρεση την βυθοσκόπηση FL31. Αναλυτικότερα ο τυπικός δισδιάστατος αλγόριθμος δεν αποδίδει υπόβαθρο στο συγκεκριμένο τμήμα (σχήμα 5.16.β), ενώ ο αλγόριθμος που κατασκευάστηκε για την διατριβή αυτή αποδίδει (σχήμα 5.16.α). Μια αναλυτικότερη παρουσίαση της βυθοσκόπησης FL31 παρουσιάζεται στο σχήμα 5.17, όπου είναι σαφής η ύπαρξη υποβάθρου μετά τις αποστάσεις AB/2 130 μέτρα.

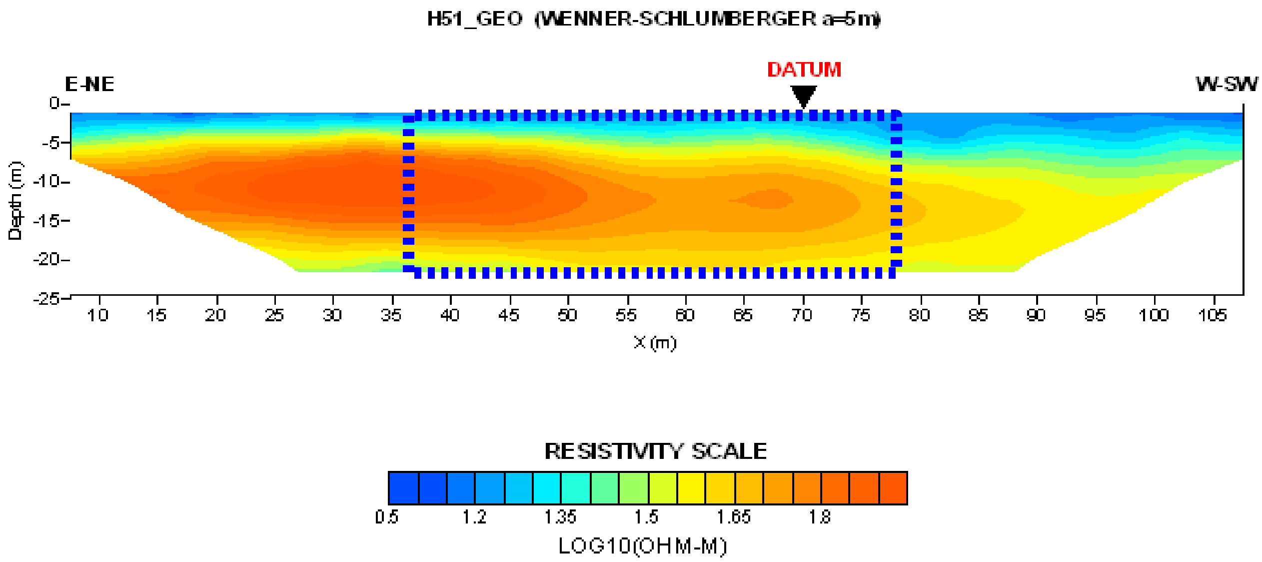


Σχήμα 5.17
Διάγραμμα βυθοσκόπησης FL31

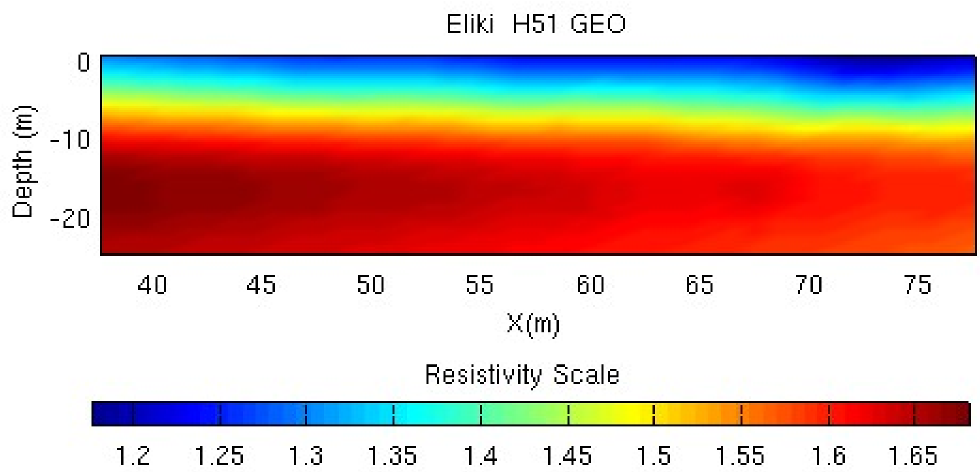
Και στους δυο αλγόριθμους παρουσιάζεται το στρώμα χαμηλής αντίστασης το οποίο όμως είναι καλύτερα οριοθετημένο στον αλγόριθμο που παράχθηκε για την διατριβή αυτή.

5.5.2 ΕΛΛΙΚΗ

Λόγω της μετατροπής των δεδομένων από μετρήσεις διπόλου-διπόλου σε μετρήσεις wenner-sclhmberger, δεν είναι δυνατόν να ληφθούν υπόψιν τα ακριανά τμήματα στο μοντέλο αντιστροφής. (RMS = 4%). Λόγω της μη ιδιαίτερης στρωματογραφίας τς περιοχής, οι δυο αλγόριθμοι παράγουν όμοια αποτελέσματα (σχή,α 5.18 και 5.19), με το σχετικό σφάλμα όμως του κατασκευασμένου αλγόριθμο μεγαλύτερο.



Σχήμα 5.18
Αποτέλεσμα αντιστροφής
2DINVS (Tsourlos 1998)



Σχήμα 5.19
Αποτέλεσμα αντιστροφής

Σχολιασμός αποτελεσμάτων

Όπως παρουσιάστηκε στο 5ο κεφάλαιο στα συνθετικά παραδείγματα, ο αλγόριθμος που αναπτύχθηκε στην διατριβή αυτή, δίνει καλύτερα αποτελέσματα σε περιοχές όπου υπάρχουν απότομες αλλαγές στην δομή, όπως πχ ρήγματα, βυθίσματα κτλ. Σε μοντέλα όμως με ομαλές μεταβάσεις μεταξύ των ορίων των γεωλογικών σχηματισμών, δεν υπάρχουν ουσιαστικές διαφορές σε σχέση με κάποιο τυπικό αλγόριθμο δισδιάστατης αντιστροφής, πράγμα αναμενόμενο καθώς η εύρεση του ορίου είναι ευκολότερη. Σε κάθε περίπτωση όμως τα τελικό μοντέλο που προκύπτει από την διατριβή αυτή έχει συγκριτικά μεγαλύτερο σχετικό σφάλμα από ότι μια τυπική δισδιάστατη αντιστροφή, πράγμα που οφείλεται στον μικρότερο αριθμό παραμέτρων που καλούνται να αναπαραστήσουν το τελικό μοντέλο. Αυτός ο περιορισμός πρέπει να γίνεται αποδεκτός καθώς ο στόχος της μεθόδου είναι η οριοθέτηση των σχηματισμών και όχι τόσο οι μικρές αλλαγές σε περιοχές που βρίσκονται στο ίδιο στρώμα.

Η ίδια κατάσταση εμφανίζεται και σε πραγματικά δεδομένα, όπου η αναμενόμενη πλευρική κατανομή των αντιστάσεων να είναι σημαντικότερη και τα αποτελέσματα να εμφανίζουν μεγάλα σχετικά σφάλματα. Στόχος όμως κάθε φορά, είναι η πιο πιστή αναπαράσταση του ορίου, όπου κάθε φορά με την μέθοδο αυτή μπορεί να αποτυπωθεί μονοσήμαντα, σε αντίθεση με μια τυπική δισδιάστατη αντιστροφή που συνήθως δεν εμφανίζεται όριο αλλά κάποια ζώνη μετάβασης.

Aster, Borchers, Thurber (2004). Parameter Estimation and Inverse Problems.

Auken, Christiansen, Jacobsen, Foged, Sørensen (2003). Piecewise 1D laterally constrained inversion of resistivity data. Geophysical Prospecting, 2005, 53, 497–506

Auken, Foged, Sørensene (2002). Model Recognition by 1-D laterally constrained inversion of resistivity data. The HydroGeophysics Group, Department of Earth Sciences, University of Aarhus

Auken,Christiansen (2004). Layered and laterally constrained 2D inversion of resistivity data . GEOPHYSICS, VOL. 69, NO. 3O

Burnett, D.S. (1989). Finite element analysis. Addison-Wesley Publishing Co.

Christiansen, Auken. Optimizing the 2D laterally constrained inversion (2D-LCI) using a quasi-newton method and 1D derivates. HydroGeophysics Group, Department of Earth Sciences, University of Aarhus, Denmark

Christiansen, Auken (2003). Layered 2-D inversion of profile oriented data, evaluated using stochastic models. 3DEMIII Workshop

Christiansen, Auken, Sørensen, Smith (2002). 2-D laterally constrained inversion (LCI) of resistivity data. HydroGeophysics Group, Department of Earth Sciences, University of Aarhus, Denmarkh

Christiansen, Aukenn (2003). Optimizing a layered and laterally constrained 2D inversion of resistivity data using Broyden's update and 1D derivatives. Journal of Applied Geophysics 56 (2004) 247– 261

Coggon, J.H. (1971). Electromagnetic and electrical modelling by the finite element method. Geophysics, 36, 132-155.

Coggon, J.H. (1973). A comparison of IP electrode arrays. Geophysics, 38, 737-761.

Constable, S. Parker, R., and Constable C. (1987). Occam's inversion: A practical algorithm for generating smooth models from electromagnetic sounding data. Geophysics, 52, 289-300.5

de Groot-Hedlin ,Constable (2004). Inversion of magnetotelluric data for 2D structure with sharp resistivity contrasts. GEOPHYSICS, VOL. 69, NO. 1O

deGroot-Hedlin, C., and Constable, S (1990). Occam's inversion to generate smooth, two-dimensional models from magnetoteluric data. Geophysics, 55, 1613-1624.

Gallardo L, Meju M (2003). Characterization of heterogeneous near-surface materials by joint 2Dninversion of dc resistivity and seismic datai, Geophysical research letters, VOL. 30, NO. 13, 1658,R

Gallardo, Meju (2003). 2D Joint inversion of seismic and dc resistivity data for improved subsurface characterisation. Geophysical Research Abstracts, Vol. 5, 07174,s

Golub, H.G., and Van Loan F.C. (1989). Matrix computations. 2nd Edition, The John Hopkins University Press.

Hansen (2001). Regularization Tools. Department of Mathematical Modelling, Denmark

Kreyszing, E. (1992). Advanced engineering mathematics. John Wiley and Sons.

Li, Y., and Oldenburg, W. 1992). Approximate inverse mapping in DC resistivity problems. Geophys. J. Int., 109, 343-362.

Lines, L.R., and Treitel S. (1984). Tutorial: a review of least-squares inversion and its application to geophysical problems. Geophysical Prospecting, 32, 159-186..

Loke (2001). Tutorial : 2-D and 3-D electrical imaging surveys. Geoelectrical

Loke, Acworth, Dahlin (2003). A comparisson of smooth and blocky inversion methods in 2D electrical imaging surveys. Exploration Geophysics, 34, 182-187

McGillivray, P., and Oldenburg, D. (1990). Methods for calculating Frechet derivatives and sensitivities for the Non-linear inverse problem: A comparative study.i

Meju (1994). Geophysical Data Analysis : Understanding Inverse Problem Theoty and Practice. Society of exploration Geophysicists.

Meju M, Gallardo L (2003), Evidence for correlation of electrical resistivity and seismic velocity inlheterogeneous near-surface materials. Geophysical research letters, VOL. 30, NO. 7, 1373,

Olayinka, Yaramanci (2000). Use of block inversion in the 2-D interpretation of apparent resistivity data and its comparison with smooth inversion. Journal of Applied Geophysics 452000.63–81

Oldenburg, Yaoguo (1994). Inversion of induced polarization data. GEOPHYSICS, VOL. 59, NO. 9O

Oldenburg, Yaoguo Li (1999). Estimating depth of investigation in dc resistivity and IP surveys.GEOPHYSICS, VOL. 64, NO. 2O

Βιβλιογραφία

Parasnis, D. (1986). Principles of applied geophysics. Chapman and Hall.

Pelton, Rijo, Swift (1978). Inversion of tdw-dimensional resistivity and induced-polarization data. Geophysics, VOL. 43. NO. 1O

Press, Teukolsky, Vetterling, Flannery (1992). Numerical recipes in C, Cambridge

Pujari, Knoops, Ditmar, Bredewout. Structual 2-D inversion of resistivity data. National Enviroment Engineering Research institute India, Geocom-Sialtech, Delft University, Utrecht University

Sasaki (1989). Two-dimensional joint inversion of magnetotelluric and dipole-dipole resistivity data. GtOPHYSI('S. VOL. 54, NO. 2

Scales, Smith, Treitel (2001). Introductory Geophysical Inverse Theory. Samizdat Press

Smith, Hoversten, Gasperikova, Morrison (1999). Sharp boundary inversion of 2D magnetotelluric data. Geophysical Prospecting, 1999, 47, 469–486

Snieder, Trampert (1999). Inverse problems in Geophysics. Dept. of Geophysics Utrecht University

Tarantola, A. (1987). Inverse problem theory. Elsevier, Amsterdam.

Tsourlos P,(1995). Modelling, Interpretation and Inversion of Multielectrode Resistivity Survey Data. University of York

Tsourlos, Szymanski, Tsokas (1998). A smoothness constrained algorithm for the fast 2-D inversion of DC resistivity and induced polarization data. Journal og the Balkan geophysical society, Vol. 1, No 1,S

Wisen, Christiansen, Auken, Dahlin (2003). Application of 2D laterally constrained inversion and 2D smooth inversion of CVES resistivity data in a slope stability investigation. 5th meeting of enviromental and engineering Geophysics, Prague, Czech Republic

Yi, Kim, Chung (2003). Enhancing the resolving power of least-squares inversion with active constraint balancing. Geophysics, VOL. 68, NO. 3O

Zhody, A. (1989). A new method for the interpretation of Schlumberger and Wenner sounding curves. Geophysics, 54, 245-253.

Zienkiewicz, O.C., and Taylor, R.L. (1989). The finite element method. 4th ed.,Vol. 1, Basic formulation and linear problems. McGraw-Hill.