



ΔΙΑΤΜΗΜΑΤΙΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ στα

ΠΟΛΥΠΛΟΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ και ΔΙΚΤΥΑ

ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΤΜΗΜΑ ΒΙΟΛΟΓΙΑΣ

ΤΜΗΜΑ ΓΕΩΛΟΓΙΑΣ

ΤΜΗΜΑ ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ



ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΗ ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Τίτλος Εργασίας

Μία Συγκριτική Μελέτη των Θεωρητικών Κατανομών
Ακραίων Τιμών της Θερμοκρασίας του Αέρα στη Βόρεια
και Κεντρική Ελλάδα

Τοπούζη Ν. Μαντιάνα

ΕΠΙΒΛΕΠΩΝ: Φαρμάκης Νικόλαος, τ. Αναπληρωτής Καθηγητής, Τμήμα
Μαθηματικών, Α.Π.Θ

Θεσσαλονίκη , Δεκέμβριος 2019





ΔΙΑΤΜΗΜΑΤΙΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ στα
ΠΟΛΥΠΛΟΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ και ΔΙΚΤΥΑ

ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΤΜΗΜΑ ΒΙΟΛΟΓΙΑΣ

ΤΜΗΜΑ ΓΕΩΛΟΓΙΑΣ

ΤΜΗΜΑ ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ



ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΗ ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Τίτλος Εργασίας

**Μία Συγκριτική Μελέτη των Θεωρητικών Κατανομών
Ακραίων Τιμών της Θερμοκρασίας του Αέρα στη Βόρεια
και Κεντρική Ελλάδα**

Τοπούζη Μαντιάνα

ΕΠΙΒΛΕΠΩΝ: Φαρμάκης Νικόλαος, τ. Αναπληρωτής Καθηγητής Μαθηματικών, Α.Π.Θ

Εγκρίθηκε από την Τριμελή Εξεταστική Επιτροπή τον Δεκέμβριο 2019

Φαρμάκης Νικόλαος,
τ. Αναπληρωτής
Καθηγητής, Τμήμα
Μαθηματικών, Α.Π.Θ.

.....

Καρακώστας Θεόδωρος,
Ομότιμος Καθηγητής,
Τμήμα Γεωλογίας, Α.Π.Θ.

.....

Αντωνίου Ιωάννης,
Καθηγητής, Τμήμα
Μαθηματικών, Α.Π.Θ

.....

Θεσσαλονίκη, Δεκέμβριος 2019



.....
Τοπούζη Μαντιάνα

Πτυχιούχος Μαθηματικός Α.Π.Θ.

Copyright © Τοπούζη Μαντιάνα, 2019

Με επιφύλαξη παντός δικαιώματος. Allrightsreserved.

Απαγορεύεται η αντιγραφή, αποθήκευση και διανομή της παρούσας εργασίας, εξ ολοκλήρου ή τμήματος αυτής, για εμπορικό σκοπό. Επιτρέπεται η ανατύπωση, αποθήκευση και διανομή για σκοπό μη κερδοσκοπικό, εκπαιδευτικής ή ερευνητικής φύσης, υπό την προϋπόθεση να αναφέρεται η πηγή προέλευσης και να διατηρείται το παρόν μήνυμα. Ερωτήματα που αφορούν τη χρήση της εργασίας για κερδοσκοπικό σκοπό πρέπει να απευθύνονται προς τον συγγραφέα.

Οι απόψεις και τα συμπεράσματα που περιέχονται σε αυτό το έγγραφο εκφράζουν τον συγγραφέα και δεν πρέπει να ερμηνευτεί ότι εκφράζουν τις επίσημες θέσεις του Α.Π.Θ.

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Στην παρούσα διπλωματική εργασία πραγματοποιήθηκε μία μελέτη των ακραίων τιμών της θερμοκρασίας του αέρα στη Βόρεια και Κεντρική Ελλάδα. Χρησιμοποιήθηκαν οι ημερήσιες τιμές της μέγιστης και ελάχιστης θερμοκρασίας αντίστοιχα επτά σταθμών- κόμβων για τη χρονική περίοδο 1955-2003. Στο πρώτο μέρος της εργασίας προσδιορίστηκαν οι ακραίες τιμές των χρονοσειρών και επιλέχθηκαν οι βέλτιστες θεωρητικές κατανομές των ακραίων τιμών των θερμοκρασιών με τη βοήθεια των ελέγχων καλής προσαρμογής Kolmogorov- Smirnov test, Anderson-Darling test και Chi-Squared test. Στη συνέχεια δημιουργήθηκαν οι θεωρητικές κατανομές των ακραίων τιμών οι οποίες προσεγγίζουν στο βέλτιστο βαθμό τις ετήσιες και εποχιακές κατανομές των ακραίων τιμών της θερμοκρασίας του αέρα στο δίκτυο των μετεωρολογικών σταθμών των επτά πόλεων.

Τέλος, οι θεωρητικές κατανομές που προέκυψαν συγκρίνονται μεταξύ τους και πραγματοποιείται μία εκτίμηση των πολύ ακραίων τιμών των θερμοκρασιών για διάφορες περιόδους επανάλληψης, καθώς επίσης και εκτίμηση των περιόδων επανάλληψης των εντονότερων ακραίων ημερήσιων τιμών της θερμοκρασίας της μελετώμενης περιόδου.

ΛΕΞΕΙΣ-ΚΛΕΙΔΙΑ

δίκτυο, ακραίες τιμές, θερμοκρασίες, θεωρητικές κατανομές, έλεγχοι καλής προσαρμογής



ABSTRACT

In the present thesis a study was carried out of the extreme values of air temperature in the North and Central Greece. Maximum and minimum daily values were used temperature corresponding to seven cities for the period 1955-2003. In the first part of the work the extreme values of time series were determined and the optimal theoretical distributions of temperature extremes were selected with the help of Kolmogorov-Smirnov, Anderson-Darling adaptation checks and Chi-Squared. Then the theoretical distributions of the extremes were created values that best approximate the annual and seasonal distributions of air temperature extremes in the meteorological station network of the seven cities.

Finally, the resulting theoretical distributions are intertwined and are realized an estimate of the extreme temperature values for various recurrence periods, as well as estimation of the repetition periods of the most extreme extremes daily values of the temperature of the period considered.

KEYWORDS

Network, extreme values, air temperature, theoretical distributions



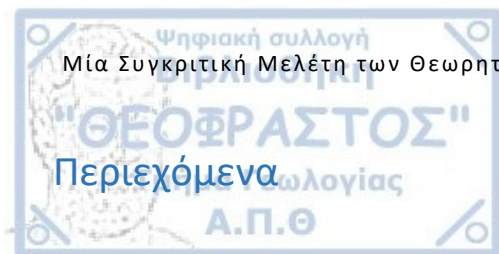
Ευχαριστίες

Θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά τον επιβλέποντα καθηγητή μου, κ. Φαρμάκη Νικόλαο, τ. Αναπληρωτή Καθηγητή του Τμήματος Μαθηματικών, κυρίως για την εμπιστοσύνη που μου έδειξε, και την υπομονή που έκανε κατά τη διάρκεια υλοποίησης της διπλωματικής αυτής εργασίας. Όπως, επίσης, θα ήθελα, με απεριόριστη εκτίμηση, να απευθύνω τις ιδιαίτερες ευχαριστίες μου στον καθηγητή κ. Καρακώστα Θεόδωρο, Ομότιμο Καθηγητή του Τμήματος Γεωλογίας, που σε συνεργασία με τον κ. Φαρμάκη, μου πρόσφεραν την πολύτιμη βοήθεια και καθοδήγηση τους σε ό,τι χρειάστηκα και στην επίλυση διαφόρων θεμάτων, και με στήριξαν καθ'όλη τη διάρκεια της προσπάθειάς μου. Επίσης, ευχαριστώ τον κ. Αντωνίου Ιωάννη, Καθηγητή του Τμήματος Μαθηματικών, μέλος της Τριμελούς Επιτροπής και καθηγητή του μεταπτυχιακού προγράμματος που με τη συμβολή τη δική του, και των υπολοίπων καθηγητών, μέσα από τις γνώσεις τους και την αγάπη τους για τις επιστήμες, συνέβαλλαν καθοριστικά στην εως τώρα πορεία μου.

Τέλος, ένα μεγάλο «ευχαριστώ» στα αγαπημένα μου πρόσωπα, στους γονείς μου και τα αδέρφια μου, που αποδέχθηκαν όλες τις επιλογές μου και μου παρείχαν στήριξη όλο αυτό το διάστημα, χωρίς την οποία τίποτα από όσα έχω καταφέρει μέχρι σήμερα δε θα ήταν πραγματικότητα.



Τοπούζη Μαντιάνα



ΠΕΡΙΛΗΨΗ.....	5
ABSTRACT.....	6
Ευχαριστίες.....	7
Κεφάλαιο 1^ο	11
Εισαγωγή.....	11
1.1 Βασικές Έννοιες	12
1.1.2 Εκτίμηση παραμέτρων θεωρητικών κατανομών.....	13
1.1.3 Στατιστικός έλεγχος υποθέσεων.....	14
1.1.4 Περιγραφή των κατανομών.....	17
Κεφάλαιο 2^ο	26
Δεδομένα και Μεθοδολογία	26
2.1 Συλλογή και περιγραφή δεδομένων	26
2.1.1 Μεθοδολογία.....	27
2.1.2 Επιλογή δείγματος.....	28
2.1.3 Προσδιορισμός ακραίων θερμοκρασιών	28
2.1.4 Προσαρμογή των θεωρητικών κατανομών στις ακραίες θερμοκρασίες	29
2.1.5 Υπολογισμός της βέλτιστης κατανομής.....	31
2.1.6 Παραγωγή τυχαίων αριθμών.....	35
2.1.7 Μέθοδος της απόλυτης απόκλισης	36
2.1.8 Εκτιμώμενες τιμές θερμοκρασίας (ReturnLevels)	37
Κεφάλαιο 3^ο	39
Κατανομές των ακραίων φαινομένων θερμοκρασίας	39
3.1 Εύρεση των βέλτιστων Κατανομών	40
3.1.1 Σταθμός – Κόμβος Αγρινίου.....	40
3.1.2 Σταθμός – Κόμβος Αλεξανδρούπολης	45
3.1.3 Σταθμός – Κόμβος Ελληνικού	50
3.1.4 Σταθμός – Κόμβος Φλώρινας	55
3.1.5 Σταθμός – Κόμβος Κέρκυρας.....	60
3.1.6 Σταθμός – Κόμβος Λάρισα.....	64
3.1.7 Σταθμός – Κόμβος Θεσσαλονίκης	69
3.2 Κατανομές των Ακραίων Θερμοκρασιών της Θεσσαλονίκης σε Εποχιακή Βάση	74

3.2.1	Ελάχιστες Θερμοκρασίες	74
-------	------------------------------	----

3.2.1	Μέγιστες Θερμοκρασίες	80
-------	-----------------------------	----

3.3	Εκτιμώμενες ακραίες θερμοκρασίες	85
------------	---	-----------

3.3.1	Θεσσαλονίκη	85
-------	-------------------	----

3.3.2	Λάρισα	90
-------	--------------	----

Κεφάλαιο 4°	94
--------------------------	-----------

Συμπεράσματα	94
--------------------	----

4.1 Συνοπτικοί - συγκρητικοί πίνακες αποτελεσμάτων	94
---	-----------

Βιβλιογραφία	103
--------------------	-----

Κεφάλαιο 1^ο

Εισαγωγή

Στην παρούσα διπλωματική εργασία θα ασχοληθούμε με τη στατιστική ανάλυση κλιματολογικών δεδομένων και συγκεκριμένα των ακραίων θερμοκρασιών που ελήφθησαν από τον Ελλαδικό χώρο, λαμβάνοντας δείγματα από επτά σταθμούς- κόμβους, το Αγρίνιο, την Αλεξανδρούπολη, το Ελληνικό (Αθήνα), τη Φλώρινα, την Κέρκυρα, τη Λάρισα και τη Θεσσαλονίκη για τη χρονική περίοδο 1955-2003. Μετά την παράθεση κάποιων βασικών εννοιών, στατιστικών μεθόδων οι οποίες έχουν να κάνουν με βασικές έννοιες στατιστικής και πιθανοτήτων, πραγματοποιείται αναλυτική περιγραφή των δεδομένων που χρησιμοποιήσαμε, καθώς επίσης η μεθοδολογία που ακολουθήσαμε για τον πειραματικό σχεδιασμό της παρούσας εργασίας. Σκοπός, της συγκεκριμένης διατριβής είναι να εξάγουμε αποτελέσματα και συμπεράσματα των μέγιστων και ελάχιστων θερμοκρασιών της προαναφερθείσας χρονικής περιόδου, βρίσκοντας τη βέλτιστη κατανομή για τις μέγιστες και ελάχιστες θερμοκρασίες κάθε πόλης. Το σκοπό αυτό εξυπηρετούνε οι έλεγχοι καλής προσαρμογής Kolmogorov-Smirnov, Anderson-Darling και Chi-Square, επιλέγοντας τις αντιπροσωπευτικότερες κατανομές. Τέλος, πραγματοποιείται η εκτίμηση των θερμοκρασιών για διάφορες περιόδους επανάληψης, που αφορούν τις ακραίες μέγιστες και ελάχιστες τιμές των θερμοκρασιών δύο πόλεων, της Λάρισας και της Θεσσαλονίκης, όπως και οι περίοδοι επανάληψης των ακραίων τιμών θερμοκρασίας που έχουν παρατηρηθεί στους σταθμούς αυτούς.

1.1.1 Ορισμός θεωρητικής κατανομής

Αρχικά, η διατύπωση του ορισμού της τυχαίας μεταβλητής θεωρείται σημαντική, καθώς δια μέσω αυτού πραγματοποιείται η μετάβαση στον ορισμό της συνάρτησης Πυκνότητας – Πιθανότητας, με τη χρήση του οποίου ορίζεται η συνάρτηση Κατανομής. Επομένως, σύμφωνα με τον Φαρμάκη (2001), **τυχαία μεταβλητή (τ.μ.)** ονομάζεται κάθε συνάρτηση που απεικονίζει τον δειγματοχώρο Δ στο σύνολο των πραγματικών αριθμών R κατά τυχαίο τρόπο. Δηλαδή,

$$\Delta \ni \delta \xrightarrow{X} X_\delta \in R \quad (1.1)$$

Επίσης, σε κάθε σημείο $x \in X(\Delta)$ αντιστοιχίζεται η πιθανότητα $p(X=x)$ και έτσι προκύπτει η **συνάρτηση Πυκνότητας Πιθανότητας (σ.π.π.)** ή **συνάρτηση Πιθανότητας (σ.π.)** ως εξής:

$$X(\Delta) \ni x \xrightarrow{f} f(x) = p(X = x) \in [0,1] \quad (1.2)$$

ανάλογα με το αν η τ.μ. είναι συνεχής ή διακριτή, αντίστοιχα. Με βάση την σ.π.π. ορίζεται η **συνάρτηση Κατανομής (σ.κ.)** ή **συνάρτηση Αθροιστικής Κατανομής (σ.α.κ.)**:

$$F(x) = p(-\infty < X, x) = \begin{cases} \sum_{x \leq u} f(u), & \text{αν } X : \text{διακριτή} \\ \int_{-\infty}^x f(u) du, & \text{αν } X : \text{συνεχής} \end{cases} \quad (1.3)$$

Η κατανομή πιθανοτήτων της X με βάση τον πληθυσμό ονομάζεται **θεωρητική κατανομή** και προσεγγίζεται με την κατανομή των σχετικών συχνοτήτων των παρατηρούμενων τιμών της X , η οποία καλείται **εμπειρική κατανομή** (Φαρμάκης, 2001). Επιπλέον,

$$\frac{f_i}{n} = \text{σχετική συχνότητα της τιμής } x_i \quad (1.4)$$

όπου f_i είναι η συχνότητα εμφάνισης της τιμής x_i και n είναι το σύνολο των παρατηρήσεων του δείγματος. Όσο αυξάνει το πλήθος των παρατηρήσεων, τόσο πλησιάζει η εμπειρική κατανομή αυτήν του πληθυσμού, δηλαδή

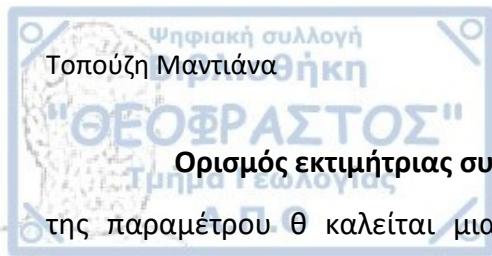
$$P(x_i) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f_i}{n} \quad (1.5)$$

Ορισμένοι απ' αυτούς τους μαθηματικούς τύπους είναι φυσική συνέπεια συγκεκριμένων διαδικασιών γένεσης δεδομένων (ουσιαστικά φυσικοί μηχανισμοί). Όταν αυτό ισχύει, τότε αυτοί οι μαθηματικοί τύποι μπορούν να περιγράψουν σε ικανοποιητικό βαθμό τη συνοπτική αναπαράσταση των μεταβολών που εμφανίζονται σε μια χρονοσειρά. Ακόμη και αν δεν υπάρχει ισχυρή "φυσική" βάση για την επιλογή μιας συγκεκριμένης θεωρητικής κατανομής, μπορεί να αποδειχθεί εμπειρικά (δηλαδή στηριζόμενοι στις υπάρχουσες παρατηρήσεις), πως η επιλεχθείσα κατανομή αναπαριστά πολύ καλά την εκάστοτε χρονοσειρά. Έτσι, εν ολίγοις, οι θεωρητικές κατανομές είναι γενικεύσεις και αναπαριστούν προσεγγιστικά τις εκάστοτε καταγραφές, συχνά με πολύ καλά αποτελέσματα.

1.1.2 Εκτίμηση παραμέτρων θεωρητικών κατανομών

Ορισμός Παραμέτρων: Θεωρούμε μια τ.μ. X με σ.π.π. $f_x(x)$. Η σ.π.π. $f_x(x)$ μιας κατανομής εξαρτάται, συνήθως, από άγνωστες σταθερές, οι οποίες ονομάζονται **παραμέτροι** της κατανομής. Ωστόσο, ενώ η μορφή της συνάρτησης της $f_x(x)$ είναι συνήθως γνωστή, οι παράμετροι αυτές είναι άγνωστες. Όπως προκύπτει, η προσπάθεια προσδιορισμού – εκτίμησης αυτών των παραμέτρων, κατά τον βέλτιστο δυνατό τρόπο, αποτελεί ένα πρόβλημα, του οποίου τη λύση καλείται να δώσει η Εκτιμητική Στατιστική.

Ορισμός παραμετρικού χώρου: Η σ.π.π. συμβολίζεται με $f(x; \theta)$ αν εξαρτάται από μία μόνο άγνωστη παράμετρο, και με $f(x; \underline{\theta})$ αν εξαρτάται από περισσότερες άγνωστες παραμέτρους, όπου $\underline{\theta}$ είναι το διάνυσμα των αγνώστων παραμέτρων $\underline{\theta} = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_r)$. Το πεδίο ορισμού της παραμέτρου $\underline{\theta}$ συμβολίζεται με $\Omega \subseteq R^r, r \geq 1$ και καλείται **παραμετρικός χώρος** (Κολυβά- Μαχαίρα, 1998).



Τοπούζη Μαντιάνα

Ορισμός εκτιμήτριας συνάρτησης και εκτίμησης: *Εκτιμήτρια συνάρτηση* ή *εκτιμητής* της παραμέτρου θ καλείται μια στατιστική συνάρτηση $T(\underline{X})$ που έχει πεδίο τιμών τον παραμετρικό χώρο Ω και συμβολίζεται με $\hat{\theta}$. Η εκτιμήτρια συνάρτηση είναι τυχαία μεταβλητή. Η τιμή της εκτιμήτριας για ένα συγκεκριμένο τυχαίο δείγμα $\underline{x}' = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ καλείται **εκτίμηση** της παραμέτρου θ (Κολυβά- Μαχαίρα, 1998).

Οι κυριότερες μέθοδοι εκτίμησης παραμέτρων είναι: η μέθοδος των ροπών (Pearson 1936), η μέθοδος της μέγιστης πιθανοφάνειας (Fisher 1922), η μέθοδος των ελαχίστων τετραγώνων (Stigler 1981), η μέθοδος των L-ροπών (Hosking 1990), η μέθοδος minimax (Bolfarine 1987) και η μέθοδος Bayes (Berger, 1985).

1.1.3 Στατιστικός έλεγχος υποθέσεων

Ο στατιστικός έλεγχος υποθέσεων (hypothesis testing) είναι μια συμπερασματική διαδικασία/μέθοδος που προσφέρει η Στατιστική Συμπερασματολογία και βρίσκει εφαρμογή σε στοχαστικά προβλήματα απόφασης μεταξύ δύο εναλλακτικών υποθέσεων. Η μία υπόθεση έχει επικρατήσει να συμβολίζεται με H_0 και ονομάζεται μηδενική υπόθεση (null hypothesis), και η άλλη με H_1 και ονομάζεται εναλλακτική υπόθεση (alternative hypothesis).

Αναγκαία προϋπόθεση για τη σωστή εφαρμογή των στατιστικών ελέγχων και κυρίως για τη σωστή ερμηνεία των αποτελεσμάτων τους, είναι η κατανόηση της λογικής και του νοήματός τους.

Η γενική ιδέα της διαδικασίας στατιστικού ελέγχου υποθέσεων είναι η εξής: θέτεται ως μηδενική υπόθεση (H_0) αυτή που αμφισβητείται, και εξετάζεται αν ένα τυχαίο δείγμα που λήφθηκε από τον πληθυσμό συνηγορεί-δίνει αποδείξεις υπέρ της απόρριψής της, έναντι της εναλλακτικής (H_1). Η μηδενική υπόθεση είναι ένας ισχυρισμός σχετικά με την τιμή μιας πληθυσμιακής παραμέτρου. Είναι ένας ισχυρισμός ο οποίος θεωρείται σωστός εκτός και εάν υπάρχουν επαρκή στατιστικά στοιχεία για να υποστηριχθεί το αντίθετο συμπέρασμα.

Δηλαδή, η H_0 , απορρίπτεται ή δεν απορρίπτεται με βάση το τι παρατηρείται στο τυχαίο δείγμα που λήφθηκε από τον πληθυσμό. Πιο συγκεκριμένα, υποθέτοντας ότι η H_1 είναι αληθής,

αν αυτό που παρατηρείται στο δείγμα είναι ακραίο, δηλαδή, αν έχει πολύ μικρή πιθανότητα να συμβεί, τότε απορρίπτεται η H_0 . Σε αντίθετη περίπτωση, δηλαδή, αν αυτό που παρατηρείται στο δείγμα δεν είναι ακραίο-σπάνιο (όταν είναι αληθής η H_0) τότε το δείγμα που πήραμε δε μας δίνει αρκετές ενδείξεις για την απόρριψη της H_0 .

Πιο συγκεκριμένα, με την υπόθεση ότι η H_0 είναι αληθής, αν κριθεί ότι αυτό που παρατηρείται στο τυχαίο δείγμα είναι ακραίο και απορριφθεί, τότε ακριβώς ένα από τα παρακάτω μπορεί να συνέβη: (α) είτε η H_0 πράγματι δεν είναι αληθής, όποτε πάρθηκε η σωστή απόφαση, (β) είτε η H_0 είναι αληθής και το ακραίο οφείλεται στην τύχη, δηλαδή, συνέβη κάτι σπάνιο (εμφανίσθηκε ένα δείγμα που σπάνια εμφανίζεται). Στην περίπτωση αυτή, απορρίφθηκε λανθασμένα η H_0 . Αυτό το σφάλμα ονομάζεται σφάλμα τύπου I (type I error).

Ανάλογα, είναι δυνατόν, λανθασμένα να μην απορριφθεί η H_0 , ενώ είναι αληθής η H_1 . Αυτό το σφάλμα ονομάζεται σφάλμα τύπου II (type II error).

Η απόφαση που σχετίζεται με την απόρριψη ή την αποδοχή της μηδενικής υπόθεσης, βασίζεται σε πληροφορίες από τις παρατηρηθείσες τιμές μιας τυχαίας μεταβλητής. Η στατιστική συνάρτηση που χρησιμοποιείται στην διαδικασία της λήψης της απόφασης ονομάζεται **στατιστική συνάρτηση ελέγχου** και η διαδικασία που ακολουθείται ονομάζεται **έλεγχος της στατιστικής υπόθεσης (test of the statistical hypothesis)**. Με άλλα λόγια, η στατιστική συνάρτηση ελέγχου χρησιμοποιείται για τη μέτρηση της διαφοράς μιας τιμής (που προκύπτει από τα δεδομένα) από αυτό που αναμένεται να συμβαίνει, αν η μηδενική υπόθεση είναι ακριβής.

Το σύνολο των τιμών που η στατιστική συνάρτηση ελέγχου μπορεί να πάρει για διαφορετικά δείγματα μπορεί να χωρισθεί σε δύο περιοχές. Η μία από αυτές αντιστοιχεί στην **περιοχή απόρριψης (rejection region)** και η άλλη στην **περιοχή αποδοχής** της μηδενικής υπόθεσης (**acceptance region**). Κατά συνέπεια, εάν η τιμή της στατιστικής συνάρτησης που χρησιμοποιείται για ένα συγκεκριμένο δείγμα βρίσκεται στην απορριπτική περιοχή της μηδενικής υπόθεσης (H_0), τότε η τελευταία απορρίπτεται και γίνεται αποδεκτή η εναλλακτική υπόθεση. Αντίθετα, εάν η τιμή της στατιστικής συνάρτησης περιλαμβάνεται στην περιοχή αποδοχής, τότε η μηδενική υπόθεση δεν απορρίπτεται. Η τιμή εκείνη της παραμέτρου, η οποία

διαχωρίζει την περιοχή αποδοχής από τη περιοχή απόρριψης καλείται **κρίσιμο σημείο (critical value, critical point)** και συμβολίζεται συνήθως με c .

Ωστόσο, είναι φανερό ότι η τιμή του κρίσιμου σημείου (c) καθορίζει την πιθανότητα σφάλματος τύπου I (α). Έτσι, με κριτήριο τον έλεγχο του μεγέθους του σφάλματος τύπου I, μπορεί να υπολογιστεί η τιμή της σταθεράς c έχοντας ορίσει το μέγιστο ανεκτό μέγεθος του σφάλματος. Παρ' όλα αυτά, δεν υπάρχει γενικά αποδεκτός κανόνας που να οδηγεί στην επιλογή του επιπέδου σημαντικότητας στα προβλήματα ελέγχου στατιστικών υποθέσεων. Οι δυσκολίες αυτές οδήγησαν τους Στατιστικούς στον ορισμό ενός άλλου μεγέθους που να περιγράφει με καλύτερο τρόπο την κατάσταση που επικρατεί στον έλεγχο στατιστικών υποθέσεων. Το μέγεθος αυτό είναι το λεγόμενο **παρατηρούμενο επίπεδο σημαντικότητας** ή αλλιώς **p -τιμή (observed level of significance ή p -value)**. Όταν σε έναν έλεγχο υποθέσεων δίνεται η μηδενική υπόθεση και οι δειγματικές ενδείξεις από δείγμα μεγέθους n , η τιμή p είναι η πιθανότητα να προκύψει μια δειγματική ένδειξη η οποία είναι ίση ή περισσότερο απομακρυσμένη από τη μηδενική υπόθεση όταν η μηδενική υπόθεση είναι πραγματικά σωστή. Όταν η τιμή p είναι μικρότερη από το επίπεδο σημαντικότητας α , τότε η μηδενική υπόθεση H_0 απορρίπτεται. Το α είναι η μέγιστη τιμή p για την οποία απορρίπτεται η H_0 , είναι η μέγιστη πιθανότητα να κάνουμε σφάλμα τύπου I. Η τιμή του α επηρεάζει

- τόσο την πιθανότητα σφάλματος τύπου I – όσο αυξάνεται το α , τόσο αυξάνεται η πιθανότητα σφάλματος τύπου I,
- όσο και την πιθανότητα σφάλματος τύπου II – όσο αυξάνεται η τιμή του α , μειώνεται η πιθανότητα σφάλματος τύπου II. Η τιμή του α , επιλέγεται ανάλογα με τις επιπτώσεις/κόστος του κάθε σφάλματος (Κολυβά-Μαχαίρα, Φ., 1998).

1.1.4 Περιγραφή των κατανομών

Ακολουθεί η περιγραφή δώδεκα κατανομών που αποτελούν σημαντικό κομμάτι της παρούσας έρευνας και η διατύπωση αυτών θα συμβάλει σημαντικά στην κατανόηση, καθώς και στον, σε βάθος, αφουγκρασμό των αποτελεσμάτων που παρουσιάζονται σε μετέπειτα κεφάλαια και εξήχθησαν από την επεξεργασία των δεδομένων της θερμοκρασίας του αέρα.

Κατανομή Beta

Συχνά, η ακριβής μορφή της συνάρτησης πυκνότητας πιθανότητας δεν είναι γνωστή, αλλά υπάρχουν ορισμένες ενδείξεις ότι η πυκνότητα παρουσιάζει μέγιστο κοντά σε κάποια τιμή. Η κατανομή Βήτα, η οποία έχει δύο θετικές παραμέτρους, έχει συνάρτηση πυκνότητας η οποία μπορεί να έχει μία ποικιλία μορφών ανάλογα με την επιλογή των τιμών των παραμέτρων. Επομένως, είναι δυνατόν σε πολλές περιπτώσεις να προσαρμοσθεί η κατάλληλη θεωρητική πυκνότητα στα εμπειρικά δεδομένα.

Η συνάρτηση πυκνότητας- πιθανότητας καθώς και η αθροιστική κατανομή της Beta εκφράζονται αντίστοιχα ως :

$$f(x) = \frac{1}{B(\alpha_1, \alpha_2)} \frac{(x-\alpha)^{\alpha_1-1} (b-x)^{\alpha_2-1}}{(b-\alpha)^{\alpha_1+\alpha_2-1}}, \quad \alpha \leq x \leq b \quad (1.6)$$

$$\text{και} \quad F(x) = I_z(\alpha_1, \alpha_2) \quad (1.7)$$

όπου α_1 και α_2 είναι συνεχείς παράμετροι σχήματος ($\alpha_1, \alpha_2 > 0$), α, b είναι συνεχείς παράμετροι ορίου ($\alpha < b$), $z \equiv \frac{x-\alpha}{b-\alpha}$, B είναι η κατανομή Βήτα και I_z η κανονικοποιημένη κατανομή Βήτα (<https://www.slideshare.net/stratosgoumas/ss-53664789>).

Κατανομή Burr

Πρόσφατα, έχει προταθεί (Papalexiou and Koutsoyiannis, 2009a, 2008) και δοκιμαστεί με επιτυχία μια εξαιρετικά ευέλικτη τετρα-παραμετρική κατανομή τύπου δύναμης, γνωστή ως

κατανομή JH, που είναι κατάλληλη για ένα μμεγάλο εύρος χρονικών κλιμάκων. Ειδικότερα, για τις ημερήσιες θερμοκρασίες προτείνεται η χρήση μιας απλοποιημένης τρι-παραμετρικής μορφής της εν λόγω κατανομής, για την οποία υπάρχει αναλυτική και απλή έκφραση τόσο της συνάρτησης κατανομής όσο και του ποσοστημορίου της (Papalexiou and Koutsoyiannis, 2009b). Η κατανομή αυτή είναι γνωστή στη βιβλιογραφία ως κατανομή Burr τύπου VII (Rodriguez, 1977· Tadikamalla, 1980). Η συνάρτηση πυκνότητας- πιθανότητας της τετρα-παραμετρικής κατανομής είναι:

$$f(x) = \frac{\alpha k \left(\frac{x-\gamma}{\beta}\right)^{\alpha-1}}{\beta \left(1 + \left(\frac{x-\gamma}{\beta}\right)^{\alpha}\right)^{k+1}}, \quad \gamma \leq x \leq +\infty \quad (1.8)$$

Και η αθροιστική κατανομή της εκφράζεται ως:

$$F(x) = 1 - \left(1 + \left(\frac{x-\gamma}{\beta}\right)^{\alpha}\right)^{-k} \quad (1.9)$$

Όπου k είναι η συνεχής παράμετρος σχήματος ($k > 0$), α η συνεχής παράμετρος σχήματος ($\alpha > 0$), β η συνεχής παράμετρος κλίμακας ($\beta > 0$), και γ η συνεχής παράμετρος θέσης.

Αντίστοιχα για την τρι-παραμετρική κατανομή έχουμε:

$$f(x) = \frac{\alpha k \left(\frac{x}{\beta}\right)^{\alpha-1}}{\beta \left(1 + \left(\frac{x}{\beta}\right)^{\alpha}\right)^{k+1}} \quad (1.10)$$

$$\text{Και } F(x) = 1 - \left(1 + \left(\frac{x}{\beta}\right)^{\alpha}\right)^{-k} \quad (1.11)$$

Κατανομή Dagum

Η κατανομή Dagum είναι μια ειδική περίπτωση της γενικευμένης κατανομής Βήτα τύπου II. Η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της κατανομής Dagum (4P) έχει την εξής μορφή :

$$f(x) = \frac{\alpha k \left(\frac{x-\gamma}{\beta}\right)^{\alpha k-1}}{\beta \left(1 + \left(\frac{x-\gamma}{\beta}\right)^{\alpha}\right)^{k+1}}, \quad \gamma \leq x \leq +\infty \quad (1.12)$$

και η συνάρτηση κατανομής είναι η

$$F(x) = \left(1 + \left(\frac{x-\gamma}{\beta}\right)^{-\alpha}\right)^{-k} \quad (1.13)$$

ενώ για την κατανομή Dagum (3P) έχουμε:

$$f(x) = \frac{\alpha k \left(\frac{x}{\beta}\right)^{\alpha k - 1}}{\beta \left(1 + \left(\frac{x}{\beta}\right)^{\alpha}\right)^{k+1}} \quad (1.14)$$

και
$$F(x) = \left(1 + \left(\frac{x}{\beta}\right)^{-\alpha}\right)^{-k} \quad (1.15)$$

με k να είναι η συνεχής παράμετρος σχήματος, α η συνεχής παράμετρος σχήματος, β η συνεχής παράμετρος κλίμακας και γ η συνεχής παράμετρος θέσης (<https://www.slideshare.net/stratosgoumas/ss-53664789>).

Κατανομή Error

Η κατανομή Error χρησιμοποιείται κυρίως σε σειρές που εμφανίζουν ασυμμετρία ή/και κύρτωση, εν αντιθέσει με την κανονική κατανομή που δεν λαμβάνει υπόψη αυτούς τους δύο παράγοντες. Εμφανίζει αρκετές ομοιότητες με τις κατανομές G.E.V., Weibull, Log- Normal και χρησιμοποιείται σε αρκετές εφαρμογές. Έχει συνάρτηση πυκνότητας- πιθανότητας :

$$f(x) = c_1 \sigma^{-1} \exp(-|c_0 z|^k), \quad -\infty < x < +\infty \quad (1.16)$$

και αθροιστική κατανομή:

$$F(x) = \begin{cases} 0.5 \left(1 + \frac{\Gamma_{|c_0 z|^k(1/k)}}{\Gamma(1/k)}\right) & x \geq \mu \\ 0.5 \left(1 - \frac{\Gamma_{|c_0 z|^k(1/k)}}{\Gamma(1/k)}\right) & x < \mu \end{cases} \quad (1.17)$$

όπου $c_0 = \left(\frac{\Gamma(3/k)}{\Gamma(1/k)}\right)^{1/2}$, $c_1 = \frac{k c_0}{2 \Gamma(1/k)}$ και $z \equiv \frac{x-\mu}{\sigma}$ με k να είναι η συνεχής παράμετρος σχήματος, σ η συνεχής παράμετρος κλίμακας (σ > 0) και μ η συνεχής παράμετρος θέσης (<https://www.slideshare.net/stratosgoumas/ss-53664789>).

Η Generalized Gamma κατανομή είναι μια συνεχής θεωρητική κατανομή με τρεις παραμέτρους και αποτελεί γενίκευση της κατανομής Gamma δύο παραμέτρων. Η συνάρτηση πυκνότητας – πιθανότητας ορίζεται ως:

$$f(x) = \frac{k(x-\gamma)^{k\alpha-1}}{\beta^k \Gamma(\alpha)} \exp\left(-\left(\frac{(x-\gamma)}{\beta}\right)^k\right), \quad \gamma \leq x < +\infty \quad (1.18)$$

Και η συνάρτηση αθροιστικής κατανομής:

$$F(x) = \frac{\Gamma_{((x-\gamma)/\beta)^k}(\alpha)}{\Gamma(\alpha)} \quad (1.19)$$

Οι τέσσερις παράμετροι της Gen. Gamma είναι οι συνεχείς παράμετροι σχήματος k και α , η συνεχής παράμετρος κλίμακας β και η συνεχής παράμετρος θέσης γ (<https://www.slideshare.net/stratosgoumas/ss-53664789>).

Κατανομή Frechet (3P)

Η θεωρητική κατανομή Frechet (3P) (Fisher and Tippett 1928) γνωστή και ως αντίστροφη της Weibull κατανομής, αποτελεί το δεύτερο από τους τρεις τύπους κατανομών της Generalized Extreme Value (GEV). Χαρακτηριστικό της κατανομής αυτής είναι ότι ελαττώνεται πολυωνυμικά ("heavytail"). Η συνάρτηση πυκνότητας – πιθανότητας δίδεται από τη σχέση (Douka and Karacostas, 2017) :

$$f(x) = \frac{\alpha}{\beta} \left(\frac{\beta}{x-\gamma}\right)^{\alpha+1} \exp\left(-\left(\frac{\beta}{x-\gamma}\right)^{\alpha}\right), \quad \gamma < x < +\infty \quad (1.20)$$

όπου α είναι η συνεχής παράμετρος σχήματος ($\alpha > 0$), β είναι η συνεχής παράμετρος κλίμακας ($\beta > 0$) και γ είναι η συνεχής παράμετρος θέσης. Τέλος, η συνάρτηση αθροιστικής κατανομής της Frechet (3P) είναι:

$$F(x) = \exp\left(-\left(\frac{\beta}{x-\gamma}\right)^a\right) \quad (1.21)$$

Κατανομή Gumbel Min (Minimum Extreme Value Type 1)

Η κατανομή GumbelMin, που είναι γνωστή ως κατανομή ελαχίστων τύπου I, είναι μια τυπική ασυμπτωτική κατανομή ακροτάτων, που δίνεται από τη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma} \exp(z - \exp(z)) \quad (1.22)$$

Η συνάρτηση κατανομής είναι:

$$F(x) = 1 - \exp(-\exp(z)) \quad (1.23)$$

όπου $z \equiv \frac{x-\mu}{\sigma}$.

Λόγω της απλής μαθηματικής έκφρασης της συνάρτησης πυκνότητας πιθανότητας, οι τυπικοί υπολογισμοί είναι αναλυτικοί, καθώς η συνάρτηση κατανομής προκύπτει άμεσα, για τη δεδομένη τιμή της μεταβλητής x . Οι παράμετροι της κατανομής εκτιμώνται συναρτήσει των στατιστικών χαρακτηριστικών του δείγματος, και συγκεκριμένα της μέσης τιμής και της τυπικής απόκλισης (<https://www.slideshare.net/stratosgoumas/ss-53664789>).

Κατανομή Generalized Extreme Value

Η Γενικευμένη Κατανομή Ακραίων τιμών (GEV) (Fisher and Tippett 1928) αποτελεί την οικογένεια των συνεχών θεωρητικών κατανομών, Gumbel, Frechet και Weibull. Έχει συνάρτηση πυκνότητας – πιθανότητας της μορφής:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sigma} \exp\left(-\left(1 + kz\right)^{-\frac{1}{k}}\right) (1 + kz)^{-1-\frac{1}{k}}, & \text{για } k \neq 0 \\ \frac{1}{\sigma} \exp(-z - \exp(-z)), & \text{για } k = 0 \end{cases} \quad (1.24)$$

υπό την προϋπόθεση πως ισχύουν: $1 + k \frac{(x-\mu)}{\sigma} > 0$, για $k \neq 0$ και $-\infty < x < +\infty$, για $k = 0$.

Αυτό το μοντέλο εμπεριέχει τρεις παραμέτρους: μία παράμετρος θέσης μ , μια παράμετρος κλίμακας σ και μία παράμετρος σχήματος k . Για $k > 0$ προκύπτει ο τύπος II (Frechet), για $k < 0$ προκύπτει ο τύπος III (Weibull), ενώ για $k = 0$ προκύπτει ο τύπος I (Gumbel). Η ενοποίηση των τριών τύπων κατανομών σε μια οικογένεια απλοποιεί σε μεγάλο βαθμό τους στατιστικούς υπολογισμούς. Επιπροσθέτως, δεν απαιτείται η εκ των προτέρων υποκειμενική επιλογή υιοθέτησης μίας εκ των τριών οικογενειών (τύπος I, II και III), αφού η χρήση των εκάστοτε δεδομένων καθορίζει τον καταλληλότερο τύπο συμπεριφοράς της ουράς του γραφήματος, δηλαδή της καταλληλότερης τιμής της παραμέτρου k . Τέλος, η συνάρτηση αθροιστικής κατανομής της GEV δίνεται από τη σχέση (Μαρία Δούκα, 2018, και Πατσικα and Karacostas, 2018):

$$F(x) = \begin{cases} \exp\left(-(1 + kz)^{-1/k}\right), & k \neq 0 \\ \exp(-z - \exp(-z)), & k = 0 \end{cases} \quad (1.25)$$

Κατανομή Generalized Pareto

Η Γενικευμένη Κατανομή Pareto (Pickands 1975) αποτελεί μια οικογένεια συνεχών θεωρητικών κατανομών, η οποία υπολογίζει την πιθανότητα για μια τυχαία μεταβλητή (τ.μ.) να υπερβαίνει μια υψηλή τιμή x , προϋποθέτοντας, βέβαια, ότι αυτή η τυχαία μεταβλητή υπερβαίνει ένα δεδομένο υψηλό κατώφλι. Επιπλέον, προσδιορίζεται από τρεις παραμέτρους: τοποθεσία μ , κλίμακα σ και σχήμα k . Η συνάρτηση πυκνότητας – πιθανότητας ορίζεται ως:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sigma} \left(1 + k \frac{(x - \mu)}{\sigma} \right)^{-1-1/k}, & k \neq 0 \\ \frac{1}{\sigma} \exp\left(-\frac{(x - \mu)}{\sigma}\right), & k = 0 \end{cases} \quad (1.26)$$

ενώ η συνάρτηση αθροιστικής κατανομής περιγράφεται από τη σχέση:

$$F(x) = \begin{cases} \exp(-(1 + kz)^{-1/k}), & k \neq 0 \\ \exp(-z - \exp(-z)), & k = 0 \end{cases} \quad (1.27)$$

Τέλος, $\mu \leq x < +\infty$ για $k \geq 0$ και $\mu \leq x \leq \mu - \sigma/k$ για $k < 0$ (Δούκα, 2018 και Douka and Karacostas, 2018).

Κατανομή Johnson SB

Η θεωρητική κατανομή Johnson SB (Johnson 1949) αποτελεί ένα τεσσάρων παραμέτρων μοντέλο της ομώνυμης οικογένειας κατανομών που δημοσιεύθηκε από τον Johnson το 1949. Αυτή η οικογένεια κατανομών στηρίζεται σε ένα μετασχηματισμό της τυπικής κανονικής μεταβλητής και περιλαμβάνει τέσσερις τύπους. Το Johnson SB μοντέλο ανήκει στις κατανομές που έχουν καθορισμένες οριακές συνθήκες, είτε για τη μία "ουρά", είτε και για τις δυο. Η συνάρτηση πυκνότητας – πιθανότητας, καθώς και η αθροιστική κατανομή της Johnson SB εκφράζονται αντίστοιχα ως:

$$f(x) = \frac{\delta}{\lambda \sqrt{2\pi z} (1 - z)} \exp\left(-\frac{1}{2} \left(\gamma + \delta \ln\left(\frac{z}{1-z}\right) \right)^2\right), \quad \xi \leq x \leq \xi + \lambda \quad (1.28)$$

και

$$F(x) = \Phi\left(\gamma + \delta \ln\left(\frac{z}{1-z}\right)\right) \quad (1.29)$$

όπου γ και δ είναι συνεχείς παράμετροι σχήματος ($\delta > 0$), λ είναι συνεχής παράμετρος κλίμακας ($\lambda > 0$), ξ είναι συνεχής παράμετρος θέσης και Φ είναι η συνάρτηση αθροιστικής κατανομής της κανονικής κατανομής και $z \equiv \frac{x-\xi}{\lambda}$ (Douka and Karacostas, 2017).

Κατανομή Kumaraswamy

Αυτή η κατανομή επινοήθηκε από τον μηχανικό- υδρολόγο Ponnambalam Kumaraswamy. Έχει πολλές ομοιότητες με την κατανομή Beta και αρκετά συχνά χρησιμοποιείται αντ' αυτής λόγω της απλούστερης εξίσωσης της συνάρτησης πιθανότητας και της αθροιστικής συνάρτησης. Παρόλο που έχει κοινά χαρακτηριστικά με την Beta, η χρήση της και οι εφαρμογές της δεν είναι τόσο διαδεδομένες. Η συνάρτηση πυκνότητας- πιθανότητας είναι:

$$f(x) = \frac{\alpha_1 \alpha_2 z^{\alpha_1-1} (1-z)^{\alpha_2-1}}{(b-a)}, \quad a \leq x \leq b \quad (1.30)$$

Και η συνάρτηση αθροιστικής κατανομής είναι:

$$F(x) = 1 - (1 - z^{\alpha_1})^{\alpha_2} \quad \text{με} \quad z \equiv \frac{x-a}{b-a} \quad (1.31)$$

Και συνεχείς παραμέτρους σχήματος τις α_1, α_2 ($\alpha_1, \alpha_2 > 0$) και συνεχείς παραμέτρους ορίου τις a, b ($a < b$) (<https://www.slideshare.net/stratosgoumas/ss-53664789>).

Κατανομή Log-Logistic (3P)

Η Log-Logistic θεωρητική κατανομή (Balakrishnan et al. 1987) αποτελεί ένα συνεχές θεωρητικό μοντέλο περιγραφής μη-αρνητικών τυχαίων μεταβλητών. Όπως φαίνεται από την ονομασία της, η τριπαραμετρική θεωρητική κατανομή Log-Logistic παρουσιάζει πολλές ομοιότητες με την θεωρητική κατανομή Logistic. Η κύρια διαφοροποίηση τους, ωστόσο, είναι ότι μια τυχαία μεταβλητή X κατανέμεται σύμφωνα με την πρώτη, αν και μόνο αν ο λογάριθμός της ακολουθεί τη δεύτερη κατανομή. Το εν λόγω θεωρητικό μοντέλο προσδιορίζεται από τρεις

συνεχείς παραμέτρους: την παράμετρο σχήματος α , την παράμετρο κλίμακας β και την παράμετρο θέσης γ . Επιπλέον, η συνάρτηση πυκνότητας – πιθανότητας δίνεται από τη σχέση:

$$f(x) = \frac{\alpha}{\beta} \left(\frac{x - \gamma}{\beta} \right)^{\alpha-1} \left(1 + \left(\frac{x - \gamma}{\beta} \right)^{\alpha} \right)^{-2}, \quad \gamma \leq x < +\infty \quad (1.32)$$

ενώ η συνάρτηση αθροιστικής κατανομής περιγράφεται από τον τύπο (Douka and Karacostas, 2017):

$$F(x) = \left(1 + \left(\frac{\beta}{x - \gamma} \right)^{\alpha} \right)^{-1}. \quad (1.33)$$

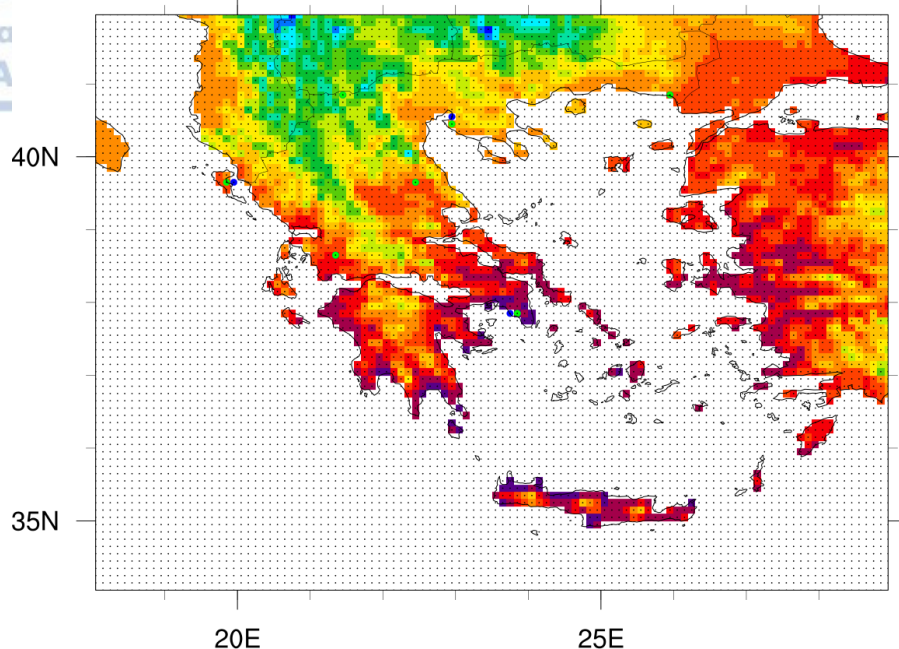


Κεφάλαιο 2^ο

Δεδομένα και Μεθοδολογία

2.1 Συλλογή και περιγραφή δεδομένων

Τα δεδομένα που χρησιμοποιήθηκαν για την εκπόνηση της έρευνας ανήκουν στην κατηγορία των πρωτογενών και αποτελούν δεδομένα των EOBS (version 19) για θερμοκρασία. Περιλαμβάνουν τις ημερήσιες ελάχιστες, μέσες και μέγιστες τιμές που καταγράφηκαν σε ένα δίκτυο επτά σταθμών- κόμβων της Βόρειας και Κεντρικής Ελλάδας (Αγρίνιο, Αλεξανδρούπολη, Ελληνικό, Φλώρινα, Κέρκυρα, Λάρισα και Θεσσαλονίκη) για μια χρονική περίοδο 49 ετών, από το 1955 έως και το 2003, η οποία θεωρείται ικανοποιητική για την εξαγωγή ασφαλών συμπερασμάτων. EOBS (Ensembles OBServational gridded dataset) είναι μία βάση δεδομένων ημερήσιας θερμοκρασίας και βροχόπτωσης, τα οποία προέρχονται από παρατηρήσεις ενός δικτύου σταθμών και έχουν τοποθετηθεί σε πλέγμα με μεθόδους χωρικής παρεμβολής. Η παρακάτω εικόνα είναι ένας χάρτης με τα κελιά του πλέγματος των EOBS, όπου με πράσινη τελεία δηλώνονται τα σημεία από τα οποία έγινε εξαγωγή των δεδομένων, ενώ με μπλε τελεία δηλώνονται τα πλησιέστερα σημεία των σταθμών στο πλέγμα (όπου υπάρχει μόνο πράσινη τελεία σημαίνει ότι τα δυο προηγούμενα συνέπεσαν).



Σχήμα 2.1 Χάρτης με τα κελιά του πλέγματος των EObs, όπου με πράσινη τελεία δηλώνονται τα σημεία από τα οποία έγινε εξαγωγή των δεδομένων, ενώ με μπλε τελεία δηλώνονται τα πλησιέστερα σημεία των σταθμών στο πλέγμα (όπου υπάρχει μόνο πράσινη τελεία σημαίνει ότι τα δυο προηγούμενα συνέπεσαν)

2.1.1 Μεθοδολογία

Ο σχεδιασμός της έρευνας είναι η περιγραφή του τρόπου ολοκλήρωσης της ερευνητικής διαδικασίας. Είναι ένα πλαίσιο που περιλαμβάνει τις εκτιμήσεις που οδήγησαν στην υιοθέτηση της κατάλληλης μεθοδολογίας, τον τρόπο επιλογής του δείγματος και τον τρόπο ανάλυσης των δεδομένων (Flick, 2011). Υπάρχουν διάφορα διαφορετικά χαρακτηριστικά ερευνητικά σχέδια, συγκεκριμένα τα περιγραφικά, επεξηγηματικά και διερευνητικά.

Στην παρούσα έρευνα βέβαια, δεν διαχειριζόμαστε κοινωνικά δεδομένα και ο σκοπός της έρευνας είναι πιο άμεσος, πιο αναλυτικά, στοχεύει στην καθαρή και άμεση διερεύνηση στοιχείων που εξετάζει, παρά σε χαρακτηριστικά τα οποία μπορεί να χαρακτηρίζουν μέρη του δείγματος ανά περίπτωση. Δηλαδή, εστιάζει πιο άμεσα στις ακραίες τιμές και την κατανομή των ακραίων τιμών που παρουσιάζουν οι θερμοκρασίες σε συγκεκριμένο χρονικό διάστημα.

Το δείγμα αντιπροσωπεύει ένα κομμάτι ενός γενικότερου πληθυσμού. Η επιλογή του δείγματος (που περιλαμβάνει το μέγεθος του δείγματος και το πως επιλέχθηκε) μπορεί να αποτελέσει σημαντικό παράγοντα, που θα κρίνει το πόσο αξιόπιστη είναι η έρευνα, και άρα και το πόσο αξιόπιστα είναι τα αποτελέσματα που θα εμφανίσει. Πιο συγκεκριμένα, και με παράδειγμα την παρούσα έρευνα, αν συγκρίνουμε δυο περιοχές όπως Θεσσαλονίκη και Λάρισα, αυτή η σύγκριση δεν αντιπροσωπεύει την σχέση που μπορεί να εμφανίζεται μεταξύ δυο άλλων περιοχών, και αυτό είναι βασικό κομμάτι της ποσοτικής έρευνας και για αυτό είναι σημαντικό να δωθεί σημασία στο ότι κάθε δείγμα μπορεί να φέρει διαφορετικά χαρακτηριστικά.

Το μέγεθος του δείγματος είναι ο αριθμός των ατόμων-αντιπροσώπων ενός συγκεκριμένου πληθυσμού μέσα σ' αυτό. Το μέγεθος του δείγματος, στην ποσοτική έρευνα, αποτελεί παράγοντα κλειδί, προκειμένου να προσδιοριστεί το κατά πόσο έγκυρη είναι η έρευνα, και τι ποσοστό ενός πληθυσμού αντιπροσωπεύει το δείγμα. Στην παρούσα έρευνα το ποσοστό του δείγματος σε σχέση με τον πληθυσμό μετά από στάθμιση των διαφόρων παραγόντων προέκυψε να είναι περίπου στο 6%- 8%. Μερικά στοιχεία για το πώς υπολογίζεται το μέγεθος του δείγματος πάρθηκαν και από Φαρμάκης, 2009, σελ. 45.-47.

Οι τεχνικές δειγματοληψίας είναι οι τρόποι με τους οποίους επιλέγεται κατάλληλο μέγεθος δείγματος για την ευρύτερη μελέτη (Φαρμάκης 2009). Υπάρχουν ορισμένες αποδεκτές τεχνικές που μπορούν να χρησιμοποιηθούν αν και στην μελέτη αυτή, η επιλογή του δείγματος έγινε στοχευμένα και με σκοπό να συλλέξει συγκεκριμένα δεδομένα, συγκεκριμένης φύσης, προκειμένου να γίνει ανάλυση αυτών.

2.1.3 Προσδιορισμός ακραίων θερμοκρασιών

Τα δεδομένα που χρησιμοποιήθηκαν, όπως προαναφέρθηκε, αποτελούνται από τις ελάχιστες, μέσες και μέγιστες ημερήσιες παρατηρούμενες θερμοκρασίες των 49 ετών στο

δίκτυο των επτά πόλεων που μελετώνται στην παρούσα διατριβή, πιο συγκεκριμένα, χρησιμοποιήθηκαν 17.898 τιμές των μέγιστων και αντίστοιχα τόσες των ελάχιστων θερμοκρασιών για την κάθε μία πόλη. Από αυτές τις τιμές ήταν αναγκαίος ο προσδιορισμός των ακραίων τιμών για τη έρευνά μας. Η προσέγγιση τόσο των ακραίων μέγιστων θερμοκρασιών, όσο και των ακραίων ελάχιστων έγινε με την επιλογή του αντιπροσωπευτικότερου κατωφλίου (Peaks over Threshold). Εκ των πραγμάτων, και λαμβάνοντας υπόψη ότι τα δεδομένα αποτελούνται από τιμές θερμοκρασίας όλων των εποχών, ήταν αδύνατο να τεθεί ένα και μοναδικό συγκεκριμένο κατώφλι για τον προσδιορισμό των ακραίων τιμών.

Αναλυτικότερα, για τον προσδιορισμό των ακραίων ελάχιστων τιμών, αρχικά, τα δεδομένα χωρίστηκαν σε 365 ομάδες για την κάθε πόλη, όσες δηλαδή και οι ημέρες του έτους. Η κάθε ομάδα αντιπροσωπεύει την αντίστοιχη ημέρα και αποτελείται από τις 49 θερμοκρασίες (όσες και τα έτη). Πιο συγκεκριμένα, η ομάδα της πρώτης ημέρας αντιστοιχεί στην 1^η Ιανουαρίου και αποτελείται από τις τιμές της 1^{ης} Ιανουαρίου των ετών 1955 έως 2003, επομένως 49 παρατηρούμενες τιμές, το ίδιο για τη 2^η ομάδα με τη 2^η Ιανουαρίου, κ.λ.π. Από τις 49 αυτές τιμές της κάθε ομάδας υπολογίσθηκε η αντίστοιχη μέση τιμή ($\bar{x}$) και η τυπική απόκλιση (s). Με βάση αυτά επιλέχθηκαν ως δείγμα οι τιμές της κάθε ημέρας που είναι μικρότερες από το $\bar{x} - bs$. Ως κατώφλι, δηλαδή, ορίσθηκε να είναι η τιμή $\bar{x} - bs$, όπου b είναι ο συντελεστής της τυπικής απόκλισης, η τιμή του οποίου προσδιορίστηκε να είναι το 1,5 ($b = 1,5$). Η τιμή αυτή επιλέχθηκε ώστε το πλήθος των τιμών του δείγματος να είναι αντιπροσωπευτικό για τις ανάγκες της μελέτης αυτής. Επομένως, για την κάθε ομάδα/ημέρα, το κατώφλι για τον προσδιορισμό των ακραίων θερμοκρασιών ήταν διαφορετικό.

Ομοίως, για την προσέγγιση των ακραίων μέγιστων τιμών ακολουθήθηκε παρόμοια διαδικασία, με τη διαφορά ότι κατώφλι ορίσθηκε να είναι η τιμή $\bar{x} + bs$, και το δείγμα αποτελείται από όλες τις παρατηρήσεις που βρίσκονται πάνω από αυτό.

2.1.4 Προσαρμογή των θεωρητικών κατανομών στις ακραίες θερμοκρασίες

Τα δεδομένα που υπερβαίνουν το κατώφλι που επιλέχθηκε στην παρούσα διατριβή, τόσο για τις μέγιστες όσο και για τις ελάχιστες τιμές, ταξινομήθηκαν τόσο ετήσια, όσο και σε

εποχιακή κλίμακα. Εν συνεχεία, υιοθετήθηκαν εξήντα-μια (61) συνεχείς θεωρητικές κατανομές, οι οποίες προσαρμόστηκαν στις καταγραφές των ακραίων θερμοκρασιών στις περιοχές του Αργινίου, της Αλεξανδρούπολης, του Ελληνικού, της Φλώρινας, της Κέρκυρας, της Λάρισας και στην περιοχή της Θεσσαλονίκης για την χρονική περίοδο 1955 – 2003. Το σύνολο των κατανομών που χρησιμοποιήθηκε, εμφανίζεται σε αλφαβητική σειρά στον Πίνακα 2.1, ενώ για τις θεωρητικές κατανομές: Frechet (3P), Generalized Extreme Value, Generalized Pareto, Johnson SB, Log-Logistic (3P), Gen. Gamma, Beta, Dagum, Kumaraswamy, Power Function, Burr, Gambel Min, Error, που παρουσιάζουν το μεγαλύτερο ενδιαφέρον σύμφωνα με τα αποτελέσματα της διατριβής, έχει γίνει μια εκτενέστερη περιγραφή στο προηγούμενο κεφάλαιο.

Πίνακας 2.1 Παρουσίαση του συνόλου των εξήντα-ένα (61) συνεχών θεωρητικών κατανομών που υιοθετήθηκαν στην παρούσα μελέτη, σε αλφαβητική σειρά.

Θεωρητικές Κατανομές					
1	Beta	22	Gen. Gamma	43	Nakagami
2	Burr	23	Gen. Gamma (4P)	44	Normal
3	Burr (4P)	24	Gen. Pareto	45	Pareto
4	Cauchy	25	Gumbel Max	46	Pareto 2
5	Chi-Squared	26	Gumbel Min	47	Pearson 5
6	Chi-Squared (2P)	27	Hyperbolic secant	48	Pearson 5 (3P)
7	Dagum	28	Inv. Gaussian	49	Pearson 6
8	Dagum (4P)	29	Inv. Gaussian (3P)	50	Pearson 6 (4P)
9	Erlang	30	Johnson SB	51	Pert
10	Erlang (3P)	31	Johnson SU	52	Power Function
11	Error	32	Kumaraswamy	53	Rayleigh
12	Error Function	33	Laplace	54	Rayleigh (2P)
13	Exponential	34	Levy	55	Reciprocal
14	Exponential (2P)	35	Levy (2P)	56	Rice
15	Fatigue Life	36	Log-Gamma	57	Student's t
16	Fatigue Life (3P)	37	Log-Logistic	58	Triangular
17	Frechet	38	Log-Logistic (3P)	59	Uniform
18	Frechet (3P)	39	Log-Pearson 3	60	Weibull
19	Gamma	40	Logistic	61	Weibull (3P)
20	Gamma (3P)	41	Lognormal		
21	Gen. Extreme Value	42	Lognormal (3P)		

2.1.5 Υπολογισμός της βέλτιστης κατανομής

Ο λόγος προσαρμογής ενός στατιστικού μοντέλου στα δεδομένα είναι η εξαγωγή συμπερασμάτων σχετικά με τα χαρακτηριστικά του πληθυσμού από τον οποίο αυτά προήλθαν. Αυτά τα συμπεράσματα είναι ευαίσθητα στην ακρίβεια της προσαρμοζόμενης θεωρητικής κατανομής και γι αυτό το λόγο θεωρείται αναγκαίος ο έλεγχος καλής προσαρμογής. Με άλλα λόγια, ένας έλεγχος καλής προσαρμογής μετράει τη συμβατότητα ενός τυχαίου δείγματος με την εκάστοτε θεωρητική κατανομή.

Στην παρούσα διατριβή, υιοθετήθηκαν τρεις σημαντικοί, μη παραμετρικοί, έλεγχοι, που ήταν οι δοκιμασίες: Kolmogorov-Smirnov, Anderson-Darling και η χ^2 . Οι έλεγχοι αυτοί χρησιμοποιήθηκαν για τον υπολογισμό του επιπέδου προσαρμογής των εξήντα-ένα (61) θεωρητικών κατανομών στα πραγματικά δεδομένα θερμοκρασιών που μελετώνται. Δεδομένου ότι τα στατιστικά των ελέγχων καλής προσαρμογής υποδηλώνουν την απόκλιση μεταξύ των πραγματικών καταγραφών θερμοκρασιών και των προσαρμοσμένων -στο εκάστοτε μοντέλο- τιμών, η θεωρητική κατανομή που παρουσιάζει τη μικρότερη στατιστική τιμή (statistic value) αποτελεί το αντιπροσωπευτικότερο μοντέλο, σύμφωνα με τον κάθε μη παραμετρικό έλεγχο καλής προσαρμογής. Στηριζόμενοι σ' αυτό το γεγονός, οι εξήντα – μία (61) θεωρητικές κατανομές που υιοθετήθηκαν στην συγκεκριμένη μελέτη, ταξινομήθηκαν από το 1 (καλύτερο προσαρμοσμένο μοντέλο) έως το 61 (λιγότερο προσαρμοσμένο μοντέλο). Εν συνεχεία, "απομονώθηκαν" οι θεωρητικές κατανομές που εμφανίστηκαν στην πρώτη θέση της κατάταξης για τον κάθε έλεγχο καλής προσαρμογής. Η διαδικασία που ακολουθήθηκε για την επιλογή της καλύτερης, εκ των τριών, κατανομής σε ετήσια, αλλά και σε εποχιακή βάση, περιγράφεται στην επόμενη παράγραφο.

Τέλος, με σκοπό την απόκτηση μιας πιο ολοκληρωμένης εικόνας των αποτελεσμάτων, γίνεται χρήση των γραφικών ελέγχων καλής προσαρμογής: Ποσοστιαίο διάγραμμα (Q – Q plot), διάγραμμα Πυκνότητας- Πιθανότητας (Probability Density Function). Έπεται μια σύντομη περιγραφή των εμπειρικών, καθώς και των μη παραμετρικών ελέγχων καλής προσαρμογής που προαναφέρθηκαν.



- Ποσοστιαίο διάγραμμα (Q-Q plot)

Ορισμός: Δεδομένου ενός διατεταγμένου δείγματος ανεξάρτητων παρατηρήσεων $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n$, που προήλθε από πληθυσμό με εκτιμώμενη συνάρτηση κατανομής $\hat{F}$, ένα ποσοστιαίο διάγραμμα αποτελείται από τα εξής σημεία:

$$\{(\hat{F}^{-1}(i/(n+1)), x_i), \text{ όπου } i = 1, \dots, n\} \quad (2.1)$$

Η ονομασία **“Quantile – Quantile Plot”** προέρχεται από το γεγονός ότι οι ποσότητες x_i και $\hat{F}^{-1}(i/(n+1))$ παρέχουν εκτιμήσεις του $(i/(n+1))^{\text{ου}}$ τεταρτημορίου (quantile) της κατανομής F . Εάν η $\hat{F}$ αποτελεί ικανοποιητική εκτίμηση της F , τότε το αντίστοιχο διάγραμμα θα πρέπει να αποτελείται από σημεία που τείνουν να τοποθετηθούν κοντά στην διαγώνιο ($x = y$) που διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

- Kolmogorov-Smirnov (K-S) δοκιμασία

Σκοπός: Η δοκιμασία Kolmogorov-Smirnov (Chakravarty et al. 1967) αποτελεί ένα κριτήριο ελεύθερης κατανομής (Free Distribution Test), το οποίο χρησιμοποιείται για τον έλεγχο καλής προσαρμογής ενός τυχαίου δείγματος σε μια δεδομένη συνεχή θεωρητική κατανομή.

Το κριτήριο αυτό βασίζεται στη διαφορά της εμπειρικής συνάρτησης κατανομής (που προέρχεται από το δείγμα) και της αναμενόμενης F_0 . Συνεπώς, αρχικά πρέπει να οριστεί η εμπειρική συνάρτηση κατανομής. Έτσι, αν $x_1, x_2, \dots, x_n$ είναι ένα τυχαίο δείγμα, η **εμπειρική συνάρτηση κατανομής (Empirical Cumulative Distribution Function)** του δείγματος αυτού ορίζεται ως

$$\hat{F}_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n I\{X_i \leq x\} \quad (2.2)$$

όπου $I\{X_i \leq x\} = 1$ ή 0 ανάλογα με το αν $X_i \leq x$ ή όχι. Η ECDF αποτελεί εκτίμηση της συνάρτησης κατανομής των X_i , διότι σύμφωνα με το νόμο των μεγάλων αριθμών και θέτοντας $Y_i = I\{X_i \leq x\}$ ισχύει ότι:

$$\hat{F}_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n I\{X_i \leq x\} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Y_i \xrightarrow{n \rightarrow \infty} E(Y_1) = 0 P(Y_1 = 0) + 1 P(Y_1 = 1) = P(Y_1 = 1) = P(X_1 \leq x) = F(x) \quad (2.3)$$

για κάθε x . Επομένως, υπό την H_0 , η ECDF θα πρέπει να τείνει στην F_0 . Αντίθετα, αν δεν ισχύει η H_0 , αναμένεται σημαντική απόκλιση της ECDF από την F_0 . Για την κατασκευή ενός ελέγχου με βάση αυτόν τον συλλογισμό, θα πρέπει να οριστεί μία «**απόσταση**» μεταξύ των δύο κατανομών (της ECDF και της F_0) και να απορρίπτεται η μηδενική υπόθεση (H_0) όταν αυτή η απόσταση υπερβαίνει κάποιον αριθμό.

Ορισμός: Αν F, G είναι δύο συναρτήσεις κατανομής στον R , τότε η ποσότητα

$$d_k(F, G) = \sup_{x \in R} \{|F(x) - G(x)|\} \quad (2.4)$$

καλείται **απόσταση Kolmogorov** μεταξύ της F και της G . Σύμφωνα με τα παραπάνω, η δοκιμασία **Kolmogorov-Smirnov** ορίζεται ως εξής (Κολυβά-Μαχαίρα, 1998):

H_0 : τα δεδομένα ακολουθούν μια συγκεκριμένη θεωρητική κατανομή

H_a : τα δεδομένα δεν ακολουθούν την συγκεκριμένη θεωρητική κατανομή

Στατιστική συνάρτηση:

$$D_n = d_k(\hat{F}_n, F_0) = \sup_{x \in R} \{|\hat{F}_n(x) - F_0(x)|\} \quad (2.5)$$

Επίπεδο σημαντικότητας: α .

Κρίσιμη τιμή: Η μηδενική υπόθεση (H_0) απορρίπτεται σε επίπεδο σημαντικότητας α , όταν η τιμή της στατιστικής συνάρτησης D_n , είναι μεγαλύτερη από μια κρίσιμη τιμή που υπολογίζεται από έναν πίνακα.

- **Δοκιμασία Anderson - Darling (A-D)**

Σκοπός: Η δοκιμασία Anderson - Darling (Stephens, 1974) είναι ένα κριτήριο ελεύθερης κατανομής (Free Distribution Test), το οποίο χρησιμοποιείται για τον έλεγχο καλής προσαρμογής ενός τυχαίου δείγματος σε μια δεδομένη συνεχή θεωρητική κατανομή.

Ορισμός: Η δοκιμασία **Anderson – Darling** ορίζεται ως εξής:

H_0 : τα δεδομένα ακολουθούν μια συγκεκριμένη θεωρητική κατανομή

H_a : τα δεδομένα δεν ακολουθούν την συγκεκριμένη θεωρητική κατανομή

Στατιστική συνάρτηση:

$$A^2 = -N - S \quad (2.6)$$

όπου

$$S = \sum_{i=1}^N \frac{(2i-1)}{N} [\ln F(Y_i) + \ln(1 - F(Y_{N+1-i}))] \quad (2.7)$$

Και F : η αθροιστική συνάρτηση της συγκεκριμένης θεωρητικής κατανομής

Επίπεδο σημαντικότητας: α

Κρίσιμη τιμή: Ο έλεγχος αυτός είναι μονόπλευρος και η υπόθεση ότι η κατανομή είναι μιας συγκεκριμένης μορφής (H_0), απορρίπτεται αν η τιμή της στατιστικής συνάρτησης A , είναι μεγαλύτερη από την κρίσιμη τιμή.

- **Δοκιμασία χ^2**

Σκοπός: Η δοκιμασία χ^2 (Snedecor and Cochran, 1989) αποτελεί ένα απαραμετρικό κριτήριο, το οποίο χρησιμοποιείται για τον έλεγχο καλής προσαρμογής ενός τυχαίου δείγματος σε μια δεδομένη θεωρητική κατανομή.

Ορισμός: Η δοκιμασία χ^2 ορίζεται ως εξής:

H_0 : τα δεδομένα ακολουθούν μια συγκεκριμένη θεωρητική κατανομή

H_a : τα δεδομένα δεν ακολουθούν την συγκεκριμένη θεωρητική κατανομή

Στατιστική συνάρτηση: Αφού τα δεδομένα ομαδοποιηθούν σε k κλάσεις, η στατιστική συνάρτηση χ^2 ορίζεται ως

$$X^2 = \sum_{i=1}^k (O_i - E_i)^2 / E_i \quad (2.8)$$

όπου O_i είναι η παρατηρούμενη συχνότητα για την i κλάση και E_i είναι η αναμενόμενη συχνότητα για την ίδια κλάση. Η αναμενόμενη συχνότητα E_i υπολογίζεται από την σχέση

$$E_i = N(F(Y_u) - F(Y_l)) \quad (2.9)$$

όπου F είναι η αθροιστική συνάρτηση για την υπό εξέταση θεωρητική κατανομή, Y_u είναι το ανώτατο όριο της i κλάσης, Y_l είναι το κατώτατο όριο της i κλάσης και N είναι το μέγεθος του δείγματος.

Επίπεδο σημαντικότητας: α

Κρίσιμη τιμή: Το παραπάνω στατιστικό, ακολουθεί προσεγγιστικά, την κατανομή X^2 με $k-c$ βαθμούς ελευθερίας, όπου k είναι το πλήθος των κατηγοριών και c είναι το πλήθος των εκτιμώμενων παραμέτρων + 1 (συμπεριλαμβανομένων των παραμέτρων *location*, *scale* και *shape*). Για παράδειγμα, για μια Weibull κατανομή τριών παραμέτρων, το $c=3+1=4$. Επομένως, η μηδενική υπόθεση ότι τα δεδομένα προέρχονται από έναν πληθυσμό με συγκεκριμένη κατανομή, απορρίπτεται όταν

$$X^2 > X_{1-\alpha, k-c}^2 \quad (2.10)$$

όπου $X_{1-\alpha, k-c}^2$ είναι η X^2 κρίσιμη τιμή με $k-c$ βαθμούς ελευθερίας και επίπεδο σημαντικότητας α .

2.1.6 Παραγωγή τυχαίων αριθμών

Με σκοπό την παραγωγή εκτιμώμενων ακραίων θερμοκρασιών στις περιοχές μελέτης, οι παράμετροι των τριών βέλτιστων, σύμφωνα με τα αποτελέσματα των απαραμετρικών ελέγχων καλής προσαρμογής, θεωρητικών κατανομών χρησιμοποιήθηκαν για την κάθε μελετώμενη χρονική περίοδο. Η εν λόγω διαδικασία επιτεύχθηκε με την εφαρμογή του

Mersenne Twister αλγορίθμου (Matsumoto και Nishimura, 1998). Ο αλγόριθμος αυτός παράγει μία ακολουθία λέξεων (word vectors), οι οποίες αποτελούν διανύσματα σειράς (row vectors) w -διάστασης μέσα από ένα πεδίο δύο στοιχείων, $F_2 = \{0, 1\}$. Αυτές οι λέξεις-διανύσματα ορίζονται ως ομοιόμορφοι ψευδοτυχαίοι ακέραιοι αριθμοί, οι οποίοι λαμβάνουν τιμές μεταξύ των 0 και 2^w-1 . Διαιρώντας με το 2^w-1 , η κάθε λέξη-διάνυσμα θεωρείται πραγματικός αριθμός που ανήκει στο διάστημα $[0, 1]$. Ο συγκεκριμένος αλγόριθμος στηρίζεται στην ακόλουθη γραμμική επανάληψη:

$$x_{k+n} = x_{k+m} \oplus (x_k^u | x'_{k+1})A, \quad k = 0, 1, \dots \quad (2.11)$$

όπου ο ακέραιος n είναι ο βαθμός επανάληψης, ο ακέραιος r (ο οποίος εμπεριέχεται στον ορισμό του x_k^u) ανήκει στο $[0, w-1]$, ο ακέραιος m παίρνει τιμές από το $[1, n]$ και στο σταθερό $w \times w$ πίνακας A καταχωρούνται τιμές από το F_2 . Τέλος, η αριθμογεννήτρια Mersenne Twister έχει περίοδο $2^{19937}-1$ ($> 10^{6000}$) και διέρχεται από πολυάριθμους ελέγχους για την διασφάλιση της στατιστικής της τυχαιότητας (randomness).

Επιπροσθέτως, αξίζει να σημειωθεί ότι στην παρούσα μελέτη οι παράμετροι της κάθε κατανομής εκτιμήθηκαν με μια από τις παρακάτω μεθόδους: μέθοδος των Ροπών, μέθοδος της Μέγιστης Πιθανοφάνειας, μέθοδος των Ελαχίστων Τετραγώνων και μέθοδος των L-Ροπών.

2.1.7 Μέθοδος της απόλυτης απόκλισης

Οι τυχαίοι αριθμοί που παράχθηκαν από τον Mersenne Twister αλγόριθμο για κάθε μια από τις τρεις θεωρητικές κατανομές με την καλύτερη προσαρμογή στα ημερήσια δεδομένα ακραίων τιμών της μελετώμενης περιόδου, θεωρήθηκαν ως οι εκτιμώμενες τιμές που προήλθαν από τις πραγματικές θερμοκρασίες. Έπειτα, η επιλογή του αντιπροσωπευτικότερου μοντέλου εκτίμησης υλοποιήθηκε δια μέσω του υπολογισμού της απόλυτης απόκλισης (Mayoogan and Laheetharan, 2014) μεταξύ των πραγματικών και των εκτιμώμενων υψών, ετήσια και εποχιακά, ως εξής:

$$AD = \left| \sum_{i=1}^n (x_i - \hat{x}_i) \right|, (i = 1, 2, \dots, n) \quad (2.12)$$

όπου x_i είναι οι πραγματικές καταγραφές θερμοκρασίας και $\hat{x}_i$ είναι οι εκτιμώμενες τιμές. Τέλος, η θεωρητική κατανομή που παρουσιάζει την ελάχιστη απόλυτη απόκλιση μεταξύ των πραγματικών και των εκτιμώμενων τιμών, αποτελεί το αντιπροσωπευτικότερο μοντέλο εκτίμησης των ετήσιων και εποχιακών ακραίων θερμοκρασιών των περιοχών μελέτης κατά την περίοδο 1955-2003.

2.1.8 Εκτιμώμενες τιμές θερμοκρασίας (Return Levels)

Αφού προσδιορίστηκε η θεωρητική κατανομή που παρουσιάζει την καλύτερη προσαρμογή στα πραγματικά δεδομένα, η εκτίμηση των τιμών θερμοκρασίας για διάφορες περιόδους επανάληψης, καθώς και ο υπολογισμός της πιθανότητας εμφάνισης μιας μέγιστης τιμής ίσης ή μεγαλύτερης μιας δοσμένης τιμής x είναι εξίσου σημαντικές και παρουσιάζουν ιδιαίτερο ενδιαφέρον.

Έτσι, η περίοδος επανάληψης (Return Period - T) ορίζεται ως εξής:

$$T = \frac{1}{p} \quad (2.13)$$

όπου p είναι η πιθανότητα εμφάνισης μιας ετήσιας μέγιστης τιμής ίσης ή μεγαλύτερης μιας δοσμένης τιμής x (Hershfield, 1973). Επομένως, εξ' ορισμού, η περίοδος επανάληψης εμπεριέχει πλήθος καταγραφών τέτοιου μεγέθους, ώστε να ενυπάρχει κατά μέσο όρο μία καταγραφή που είτε να ισοδυναμεί είτε να υπερβαίνει τη δοσμένη τιμή x . Η ονομασία οφείλεται στο γεγονός ότι οι καταγεγραμμένες τιμές της μεταβλητής λαμβάνονται σε σταθερά χρονικά διαστήματα (έτη), που λαμβάνουν μονάδες ίδιες με αυτές της περιόδου επανάληψης.

Τώρα, αν η είναι το πλήθος των καταγραφών και m είναι η σειρά μιας δοσμένης τιμής σε μια φθίνουσα ταξινομημένη λίστα ($x_1 > x_2 > x_3 \dots > x_m$), τότε η πιθανότητα υπέρβασης της m -οστής μεγαλύτερης τιμής, x_m , είναι :

$$P(X \geq x_m) = \frac{m}{n}. \quad (2.14)$$

Επιπλέον, ένα δοσμένο εκτιμώμενο ύψος x_T με περίοδο επανάληψης T μπορεί να ξεπεραστεί μια φορά σε T έτη (Ramachandra Rao και Hamed, 2000). Ως εκ τούτου,

$$P(X \geq x_T) = \frac{1}{T}. \quad (2.15)$$

Κεφάλαιο 3^ο

Κατανομές των ακραίων φαινομένων θερμοκρασίας

Σε αυτό το κεφάλαιο παρουσιάζονται τα αποτελέσματα που προέκυψαν από τη μελέτη του πεδίου των μέγιστων και ελάχιστων θερμοκρασιών για τους επτά σταθμούς-κόμβους του δικτύου μας, για την κοινή χρονική περίοδο 1955 – 2003. Στο πρώτο μέρος γίνεται αναφορά στην βέλτιστη ετήσια κατανομή των ελάχιστων και μέγιστων ακραίων τιμών της θερμοκρασίας του αέρα για κάθε σταθμό-κόμβο, ενώ στο δεύτερο, στις κατανομές των ακραίων θερμοκρασιών για την πόλη της Θεσσαλονίκης εποχιακά. Σύμφωνα με τους τρεις μη παραμετρικούς ελέγχους καλής προσαρμογής (Kolmogorov-Smirnov, Anderson-Darling και Chi-squared), λαμβάνοντας ουσιαστικά υπόψιν το βαθμό συμφωνίας του κάθε θεωρητικού μοντέλου με την πραγματικότητα, προκύπτουν οι τρεις βέλτιστες κατανομές για την κάθε περίπτωση και από αυτές επιλέγεται η καταλληλότερη. Η επιλογή, ωστόσο, του ενός θεωρητικού μοντέλου που περιγράφει αντιπροσωπευτικότερα τις ακραίες ελάχιστες ή μέγιστες θερμοκρασίες της κάθε πόλης, πραγματοποιείται με τη χρήση των τιμών των παραμέτρων των τριών επικρατέστερων, σύμφωνα με τους ελέγχους, κατανομών. Υπενθυμίζοντας την εν λόγω διαδικασία που περιγράφεται σε προηγούμενη ενότητα, οι τιμές των παραμέτρων, για τα θεωρητικά μοντέλα στην κάθε περίπτωση, υπολογίστηκαν με την προσαρμογή των καταγραφών των ακραίων θερμοκρασιών στην εκάστοτε κατανομή. Λαμβάνοντας υπόψιν τις τιμές αυτές σε συνδυασμό με τις μαθηματικές εκφράσεις των αντίστοιχων κατανομών παράγονται εκτιμώμενες τιμές με απώτερο σκοπό τον υπολογισμό της απόλυτης απόκλισης μεταξύ των πραγματικών και των εκτιμώμενων ακραίων θερμοκρασιών. Στο τελευταίο μέρος του κεφαλαίου γίνεται εκτίμηση, μέσω των κατανομών, των τιμών θερμοκρασίας για διάφορες περιόδους επανάληψης καθώς

3.1 Εύρεση των βέλτιστων Κατανομών

Παρακάτω παρουσιάζονται οι πίνακες με τις τρεις καλύτερες κατανομές, από το σύνολο των εξήντα-ένα (61) θεωρητικών μοντέλων που υιοθετήθηκαν στην παρούσα διατριβή, σύμφωνα με τους μη παραμετρικούς ελέγχους καλής προσαρμογής των πραγματικών τιμών των θερμοκρασιών, για κάθε ένα σταθμό-κόμβο, ξεχωριστά για τις ελάχιστες και τις μέγιστες ακραίες τιμές της θερμοκρασίας του αέρα. Επιπρόσθετα, παρουσιάζονται τα διαγράμματα πυκνότητας πιθανότητας, καθώς και τα ποσοστιαία διαγράμματα.

3.1.1 Σταθμός – Κόμβος Αγρινίου

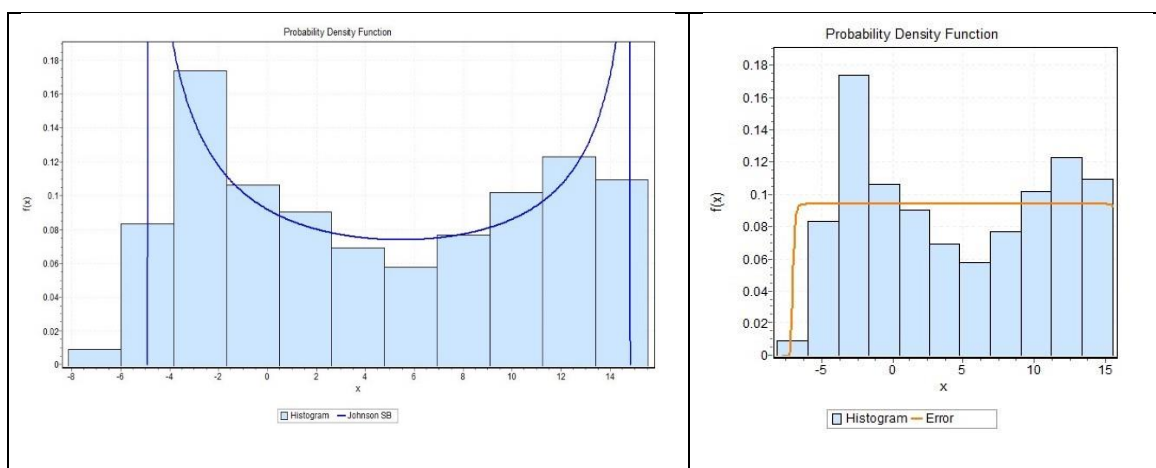
Χρησιμοποιώντας τη μεθοδολογία που παρουσιάστηκε και αναλύθηκε στο Κεφάλαιο 2, προσδιορίστηκε το κατώφλι των ελαχίστων τιμών θερμοκρασίας του σταθμού-κόμβου του Αγρινίου, σύμφωνα με το οποίο προσδιορίστηκε το δείγμα που χρησιμοποιήθηκε για τον προσδιορισμό της βέλτιστης κατανομής. Όπως απεικονίζεται στον Πίνακα 3.1, για τις ακραίες ελάχιστες θερμοκρασίες, οι δύο έλεγχοι καλής προσαρμογής, Anderson- Darling και Chi-Squared, συμφωνούν στην κατανομή *Error* ως την αντιπροσωπευτικότερη, ενώ ο σύμφωνα με τον έλεγχο Kolmogorov - Smirnov, προτείνεται η κατανομή *Johnson SB*.

Πίνακας 3.1: Οι τρεις βέλτιστες θεωρητικές κατανομές και οι αντίστοιχες απόλυτες αποκλίσεις, όπως αυτές προέκυψαν από τους τρεις ελέγχους καλής προσαρμογής, για τις ελάχιστες θερμοκρασίες στο σταθμό-κόμβο του Αγρινίου, κατά την περίοδο 1955-2003.

Έλεγχοι καλής προσαρμογής	Θεωρητική κατανομή	Απόλυτη απόκλιση
Kolmogorov - Smirnov	Johnson SB	6.40
Anderson- Darling	Error	6.54
Chi- Squared	Error	6.54

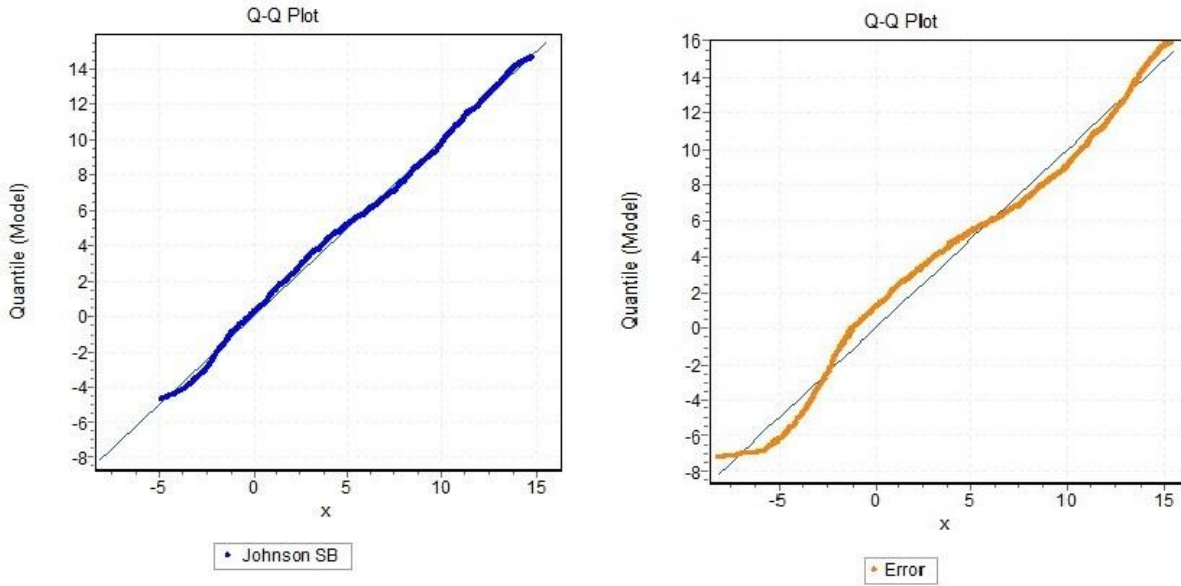
Από την εξέταση όλων των κατανομών που χρησιμοποιήθηκαν (βλέπε Παράρτημα), διαπιστώνεται ότι, η Error καταλαμβάνει την τρίτη θέση για τον K-S έλεγχο, ενώ η Johnson SB βρίσκεται στην 33^η θέση της κατάταξης του A-D, και για τον χ^2 δεν λαμβάνει καμία τιμή. Ωστόσο, λαμβάνοντας υπόψιν την απόλυτη απόκλιση μεταξύ των θεωρητικών και πραγματικών τιμών, ως βέλτιστη κατανομή θεωρείται η *Johnson SB* με βάση τον έλεγχο Kolmogorov - Smirnov. Παρά ταύτα, μία οπτική πρώτη σύγκριση των δυο “υποψήφιων” θεωρητικών μοντέλων κρίνεται επιθυμητή, καθώς συντελεί στην σε βάθος κατανόηση των αριθμητικών αποτελεσμάτων (απόλυτες αποκλίσεις).

Στο Σχήμα 3.1 παρουσιάζονται τα διαγράμματα πυκνότητας πιθανότητας για τις δύο αυτές κατανομές, δηλαδή Johnson SB και Error.



Σχήμα 3.1: Διαγράμματα πυκνότητας πιθανότητας για τις βέλτιστες κατανομές *Johnson SB* και *Error*, για τις ελάχιστες θερμοκρασίες στο σταθμό-κόμβο του Αγρινίου, κατά την περίοδο 1955-2003.

Στο Σχήμα 3.2 απεικονίζονται τα ποσοστιαία διαγράμματα (Quantile Plots) για τις βέλτιστες κατανομές, *Johnson SB* και *Error*, παρουσιάζοντας μια συγκριτική και εποπτική εικόνα της βέλτιστης κατανομής. Διαπιστώνεται ότι η κατανομή *Johnson SB* περιγράφει καλύτερα τις ακραίες τιμές, αφού τα απεικονιζόμενα σημεία αυτών τείνουν να τοποθετηθούν πολύ κοντά στη διαγώνιο της κατανομής.



Σχήμα 3.2: Ποσοστιαία διαγράμματα για τις βέλτιστες κατανομές Johnson SB και Error, για τις ελάχιστες θερμοκρασίες στο σταθμό-κόμβο του Αγρινίου, κατά την περίοδο 1955-2003.

Στη συνέχεια, λαμβάνοντας υπόψιν τις τιμές των παραμέτρων (Πίνακας 3.2), οι οποίες προέκυψαν από την προσαρμογή των μοντέλων στις πραγματικές ακραίες τιμές, καθώς και τις σχέσεις των κατανομών από προηγούμενη παράγραφο, οι τελικές και πλήρεις μαθηματικές εκφράσεις της κατανομής Johnson SB, η οποία προσομοιάζει καλύτερα τις τιμές του δείγματος, διαμορφώνονται ως εξής:

$$f(x) = \frac{0.43}{19.73 \sqrt{2\pi} z(1-z)} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(0.07 + 0.43 \ln\left(\frac{z}{1-z}\right)\right)^2\right), \quad z \equiv \frac{x - (-4.91)}{19.73}$$

και

$$F(x) = \Phi\left(0.07 + 0.43 \ln\left(\frac{z}{1-z}\right)\right)$$

Πίνακας 3.2: Οι υπολογισθείσες παράμετροι της βέλτιστης θεωρητικής κατανομής, για τις ελάχιστες θερμοκρασίες στο σταθμό-κόμβο του Αγρινίου, κατά την περίοδο 1955-2003.

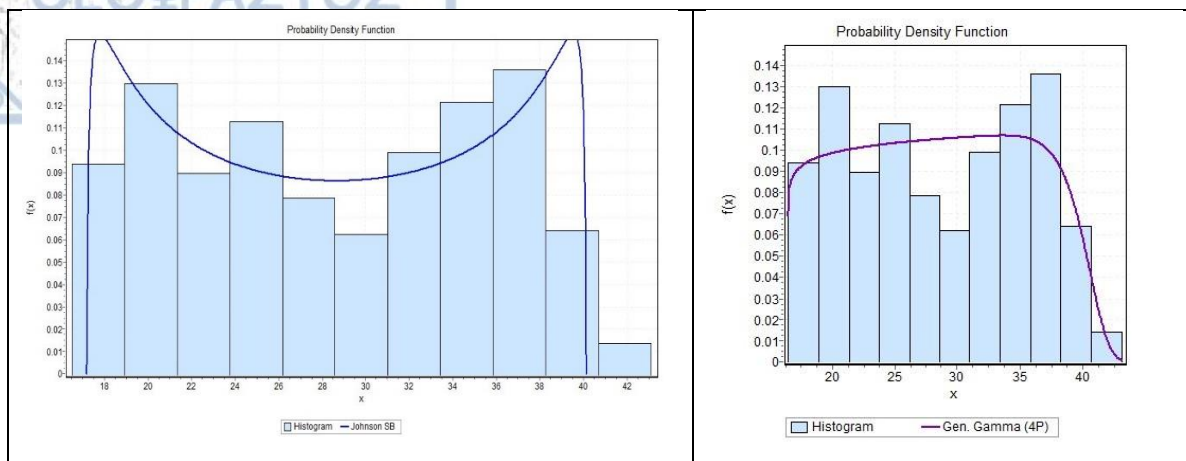
Έλεγχος καλής προσαρμογής	Θεωρητική κατανομή	Παράμετροι
Kolmogorov- Smirnov	Johnson SB	$\gamma = 0.07, \delta = 0.43, \lambda = 19.73, \xi = -4.91$

Στον Πίνακα 3.3 παρουσιάζονται οι τρεις κατανομές των μεγίστων τιμών της θερμοκρασίας, που βρίσκονται στην πρώτη θέση κατάταξης σύμφωνα με τα τρία τεστ καλής προσαρμογής. Για το τεστ K-S η θεωρητική κατανομή Johnson SB καταλαμβάνει την πρώτη θέση, ενώ τα άλλα δύο τεστ συμφωνούν στην κατανομή Gen. Gamma (4P) τεσσάρων παραμέτρων να είναι η καλύτερη. Ενδιαφέρον παρουσιάζει το γεγονός, ότι η Johnson SB βρίσκεται σε μία από τις τελευταίες θέσεις για τον έλεγχο Anderson- Darling, ενώ για τον Chi- Squared δεν παρουσιάζει κανένα αποτέλεσμα. Καμία προσαρμογή στα δεδομένα δεν φαίνεται να έχει το μοντέλο Johnson SU, σύμφωνα και με τους τρεις ελέγχους. Τελικά, ως αντιπροσωπευτικότερη κατανομή, ανάμεσα στις δύο, για τις ακραίες μέγιστες θερμοκρασίες του Αγρινίου θεωρείται η Gen. Gamma (4P), με απόλυτη απόκλιση 27.17, έναντι της απόλυτης απόκλισης της Johnson SB που είναι 28.36. Ωστόσο, σύμφωνα με το K-S τεστ η Gen. Gamma (4P) βρίσκεται στην πέμπτη θέση, κάτω από τις κατανομές Uniform, Error και Gen. Pareto.

Πίνακας 3.3: Οι τρεις βέλτιστες θεωρητικές κατανομές και οι αντίστοιχες απόλυτες αποκλίσεις, όπως αυτές προέκυψαν από τους τρεις ελέγχους καλής προσαρμογής, για τις μέγιστες θερμοκρασίες στο σταθμό-κόμβο του Αγρινίου, κατά την περίοδο 1955-2003.

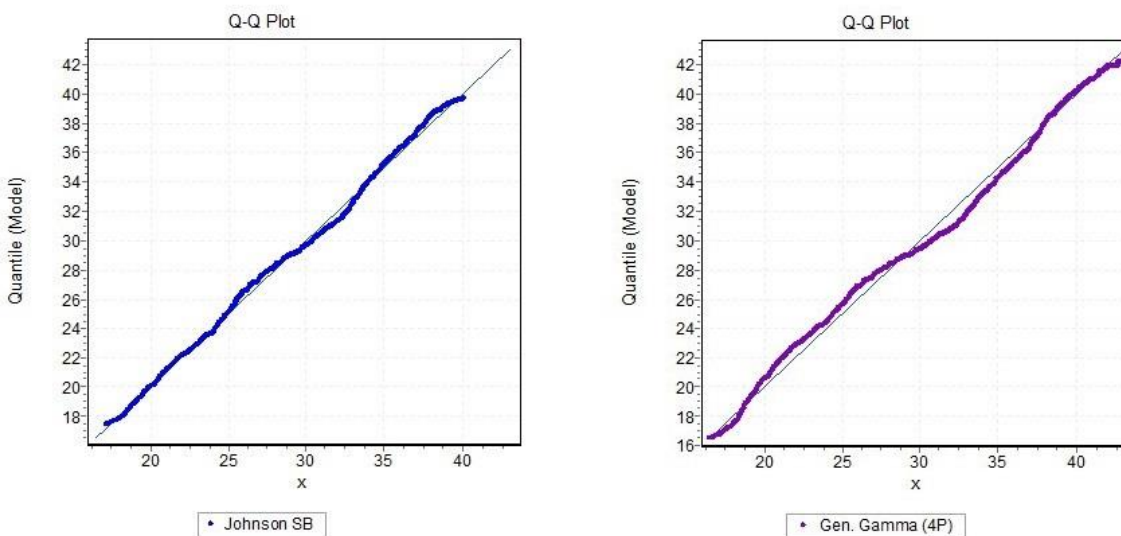
Έλεγχοι καλής προσαρμογής	Θεωρητική κατανομή	Απόλυτη απόκλιση
Kolmogorov- Smirnov	Johnson SB	28.36
Anderson- Darling	Gen. Gamma (4P)	27.17
Chi- Squared	Gen. Gamma (4P)	27.17

Στο Σχήμα 3.3 παρουσιάζονται τα διαγράμματα πυκνότητας πιθανότητας για τις δύο αυτές κατανομές των μέγιστων θερμοκρασιών του Αγρινίου, δηλαδή Johnson SB και Gen. Gamma (4P).



Σχήμα 3.3: Διαγράμματα πυκνότητας πιθανότητας για τις βέλτιστες κατανομές Johnson SB και Gen. Gamma (4P), για τις μέγιστες θερμοκρασίες στο σταθμό-κόμβο του Αγρινίου, κατά την περίοδο 1955-2003.

Στο Σχήμα 3.4 απεικονίζονται τα ποσοστιαία διαγράμματα (Quantile Plots) για τις βέλτιστες κατανομές, Johnson SB και Gen. Gamma (4P), παρουσιάζοντας μια συγκριτική και εποπτική εικόνα της βέλτιστης κατανομής. Διαπιστώνεται ότι η κατανομή Gen. Gamma (4P) περιγράφει καλύτερα τις ακραίες τιμές, αφού τα απεικονιζόμενα σημεία αυτών τείνουν να τοποθετηθούν πολύ κοντά στη διαγώνιο της κατανομής.



Σχήμα 3.2: Ποσοστιαία διαγράμματα για τις βέλτιστες κατανομές Johnson SB και Gen. Gamma (4P), για τις μέγιστες θερμοκρασίες στο σταθμό-κόμβο του Αγρινίου, κατά την περίοδο 1955-2003.

Λαμβάνοντας υπόψιν τις τιμές των παραμέτρων (Πίνακας 3.4), οι οποίες προέκυψαν από την προσαρμογή των μοντέλων στις πραγματικές ακραίες τιμές, καθώς και τις σχέσεις των κατανομών από προηγούμενη παράγραφο, οι τελικές και πλήρεις μαθηματικές εκφράσεις της κατανομής Gen. Gamma (4P), η οποία προσομοιάζει καλύτερα τις τιμές του δείγματος, διαμορφώνονται ως ακολούθως:

$$f(x) = \frac{16.7(x-16.5)^{0.05377}}{24.16^{1.05377} \Gamma(0.0631)} \exp\left(-\left((x-16.5)/24.16\right)^{16.7}\right),$$

για τη συνάρτηση πυκνότητας- πιθανότητας και:

$$F(x) = \frac{\Gamma_{((x-16.5)/24.16)^{16.7}(0.0631)}}{\Gamma(0.0631)}$$

για τη συνάρτηση της αθροιστικής κατανομής.

Πίνακας 3.4: Οι υπολογισθείσες παράμετροι της βέλτιστης θεωρητικής κατανομής, για τις μέγιστες θερμοκρασίες στο σταθμό-κόμβο του Αγρινίου, κατά την περίοδο 1955-2003.

Έλεγχος καλής προσαρμογής	Θεωρητική κατανομή	παραμέτροι
A-D, χ^2	Gen. Gamma (4P)	k=16.7, α=0.0631, β=24.16, γ=16.5

3.1.2 Σταθμός – Κόμβος Αλεξανδρούπολης

Για την πόλη της Αλεξανδρούπολης, και από το δείγμα των ελαχίστων θερμοκρασιών, τρεις διαφορετικές κατανομές κρίθηκαν ως βέλτιστες από τους τρεις ελέγχους καλής προσαρμογής, οι οποίες και απεικονίζονται στον Πίνακα 3.5. Για τον K-S αντιπροσωπευτικότερη κατανομή είναι η Johnson SB, για τον A-D η Beta, και για τον χ^2 η Error. Την δεύτερη θέση του πρώτου ελέγχου καταλαμβάνει η Gen Pareto, και την τρίτη η Error. Για τον δεύτερο έλεγχο, μετά την Beta ακολουθεί η Kumaraswamy και έπεται η Gen. Gamma (4P), ενώ για τον τρίτο έλεγχο στις θέσεις 2 και 3 τοποθετούνται οι Rayleigh (2P) και η Kumaraswamy, αντίστοιχα. Από την άλλη πλευρά, οι τρεις μη παραμετρικοί έλεγχοι που χρησιμοποιήθηκαν στην παρούσα διατριβή, συγκλίνουν στο γεγονός ότι είκοσι-πέντε (25) από τις εξήντα-μια (61) θεωρητικές κατανομές δεν

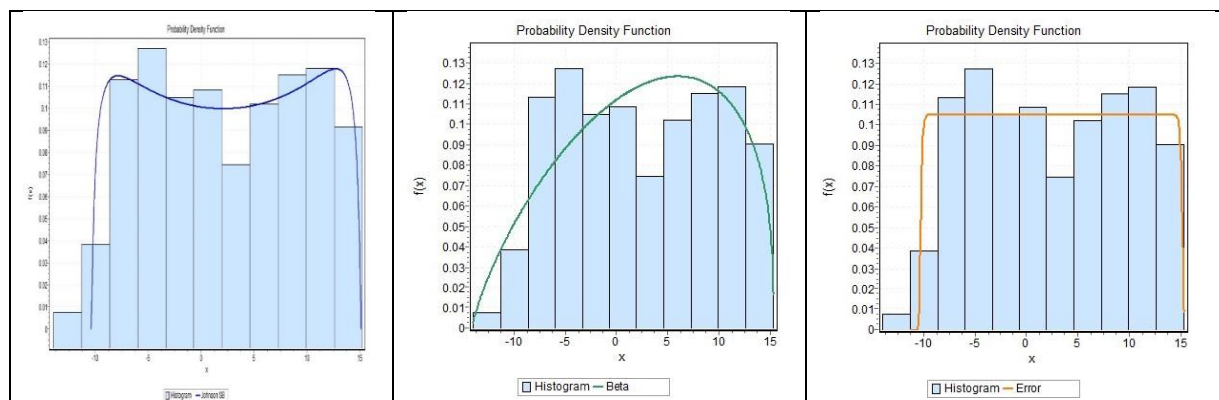
εμφάνισαν καμία προσαρμογή στις ακραίες ελάχιστες θερμοκρασίες της Αλεξανδρούπολης.

Σύμφωνα, τώρα, με τις απόλυτες αποκλίσεις των τριών μοντέλων που βρίσκονται στην πρώτη θέση της κατάταξης των ελέγχων, θα θεωρηθεί ότι η Beta αποτελεί το ιδανικότερο μοντέλο προσομοίωσης των ακραίων ελαχίστων θερμοκρασιών της μελετώμενης περιόδου και περιοχής, με ελάχιστη διαφορά από την Johnson SB και λίγο μεγαλύτερη διαφορά από την Error.

Πίνακας 3.5: Οι τρεις βέλτιστες θεωρητικές κατανομές και οι αντίστοιχες απόλυτες αποκλίσεις, όπως αυτές προέκυψαν από τους τρεις ελέγχους καλής προσαρμογής, για τις ελάχιστες θερμοκρασίες στο σταθμό-κόμβο της Αλεξανδρούπολης, κατά την περίοδο 1955-2003.

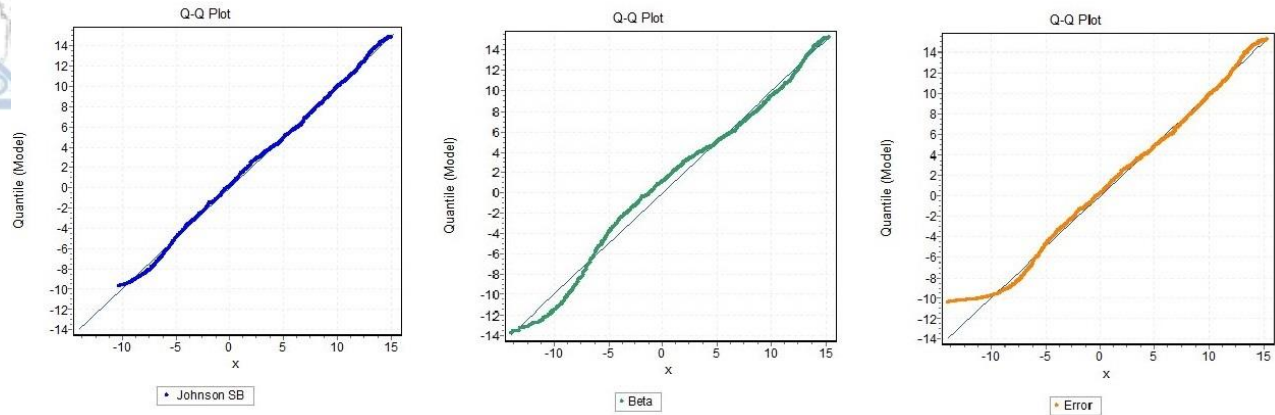
Έλεγχοι καλής προσαρμογής	Θεωρητική κατανομή	Απόλυτη απόκλιση
Kolmogorov- Smirnov	Johnson SB	6.53
Anderson- Darling	Beta	6.51
Chi- Squared	Error	6.65

Τα διαγράμματα πυκνότητας πιθανότητας παρουσιάζονται στο Σχήμα 3.5 για τις τρεις αυτές κατανομές, δηλαδή Johnson SB, Beta και Error.



Σχήμα 3.5: Διαγράμματα πυκνότητας πιθανότητας για τις βέλτιστες κατανομές Johnson SB Beta και Error, για τις ελάχιστες θερμοκρασίες στο σταθμό-κόμβο του Αλεξανδρούπολης, κατά την περίοδο 1955-2003.

Στο Σχήμα 3.6 απεικονίζονται τα ποσοστιαία διαγράμματα (Quantile Plots) για τις τρεις βέλτιστες κατανομές, Johnson SB, Beta και Error, παρουσιάζοντας μια συγκριτική και εποπτική εικόνα της βέλτιστης μεταξύ αυτών κατανομής. Διαπιστώνεται ότι η κατανομή Beta περιγράφει καλύτερα τις ακραίες τιμές, αφού τα απεικονιζόμενα σημεία αυτών τείνουν να τοποθετηθούν πολύ κοντά στη διαγώνιο της κατανομής.



Σχήμα 3.6: Ποσοστιαία διαγράμματα για τις βέλτιστες κατανομές Johnson SB Beta και Error, για τις ελάχιστες θερμοκρασίες στο σταθμό-κόμβο της Αλεξανδρούπολης, κατά την περίοδο 1955-2003.

Ενδιαφέρον παρουσιάζουν και οι θέσεις που καταλαμβάνουν οι άλλες δύο κατανομές για τον κάθε έλεγχο. Για τον έλεγχο K-S η κατανομή Beta βρίσκεται στην 6^η θέση και η κατανομή Error στην 3^η, για τον έλεγχο A-D η Johnson SB καταλαμβάνει την 29^η θέση και η Error την 21^η, ενώ για τον χ^2 η Johnson SB παρουσιάζεται τελείως ακατάλληλη, ενώ η Beta στην 4^η θέση. Ακόμη, αξίζει να αναφερθεί ότι για το συγκεκριμένο δείγμα οι τρεις έλεγχοι δεν συγκλίνουν στα αποτελέσματά τους, και οι μόνες κατανομές που βρίσκονται και στους τρεις σε σχετικά υψηλές θέσεις είναι η Beta, όπως προαναφέρθηκε, η οποία θεωρείται και η βέλτιστη κατανομή. Αξίζει να αναφερθεί ότι η κατανομή Kumaraswamy βρίσκεται στις θέσεις 7,2 και 3 για τον κάθε έλεγχο καλής προσαρμογής, αντίστοιχα.

Λαμβάνοντας υπόψιν τις τιμές των παραμέτρων (Πίνακας 3.6), οι οποίες προέκυψαν από την προσαρμογή των μοντέλων στις πραγματικές ακραίες τιμές, καθώς και τις σχέσεις των κατανομών από προηγούμενη παράγραφο, οι τελικές και πλήρεις μαθηματικές εκφράσεις της συνάρτησης πυκνότητας-πιθανότητας και αθροιστικής συνάρτησης της βέλτιστης κατανομής Beta, παίρνουν τη μορφή:

$$f(x) = \frac{1}{B(1.781, 1.362)} \frac{(x+14.05)^{0.781} (15.25-x)^{0.362}}{(29.3)^{2.143}}$$

και

$$F(x) = I_z(1.781, 1.362).$$

Πίνακας 3.6: Οι υπολογισθείσες παράμετροι της βέλτιστης θεωρητικής κατανομής, για τις ελάχιστες θερμοκρασίες στο σταθμό-κόμβο της Αλεξανδρούπολης, κατά την περίοδο 1955-2003.

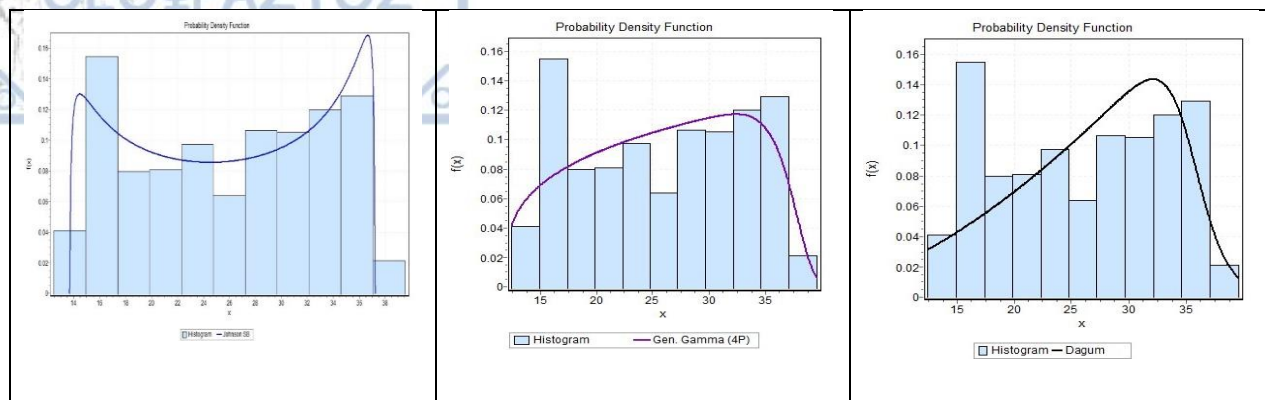
Έλεγχος καλής προσαρμογής	Θεωρητική κατανομή	παράμετροι
Anderson- Darling	Beta	$\alpha_1 = 1.781$, $\alpha_2 = 1.362$, $a = -14.05$, $b = 15.25$

Για το δείγμα των μέγιστων θερμοκρασιών της Αλεξανδρούπολης, επίσης, τρεις ήταν οι επικρατέστερες κατανομές. Η Johnson SB, η Gen. Gamma (4P) και η Dagum, για τους τρεις ελέγχους καλής προσαρμογής, όπως παρουσιάζονται στον Πίνακα 3.7. Εδώ ως πιο αντιπροσωπευτική ενδείκνυται η Dagum, ακολουθεί η Gen. Gamma (4P) και τρίτη η Johnson SB.

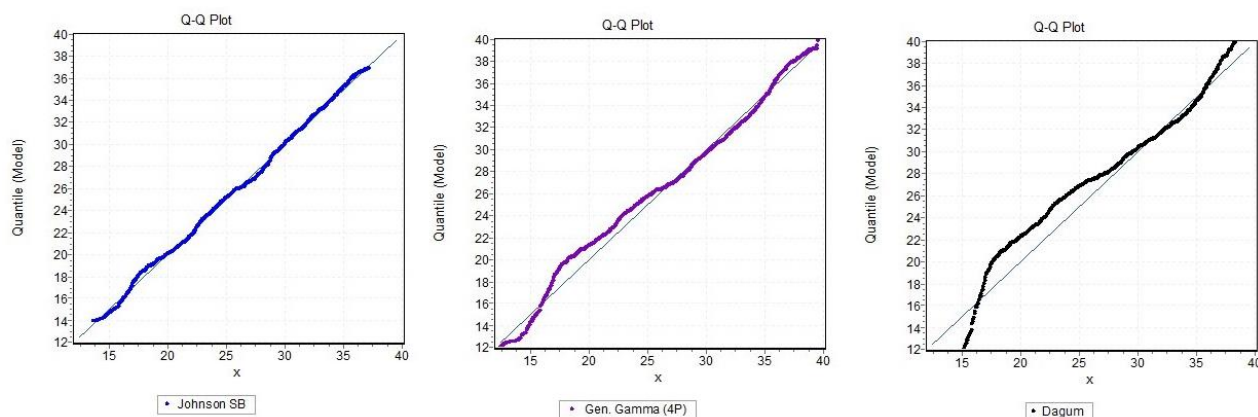
Πίνακας 3.7: Οι τρεις βέλτιστες θεωρητικές κατανομές και οι αντίστοιχες απόλυτες αποκλίσεις, όπως αυτές προέκυψαν από τους τρεις ελέγχους καλής προσαρμογής, για τις μέγιστες θερμοκρασίες στο σταθμό-κόμβο της Αλεξανδρούπολης, κατά την περίοδο 1955-2003.

Έλεγχοι καλής προσαρμογής	Θεωρητική κατανομή	Απόλυτη απόκλιση
Kolmogorov- Smirnov	Johnson SB	25.64
Anderson- Darling	Gen. Gamma(4P)	24.43
Chi- Squared	Dagum	23.32

Επιπρόσθετη οπτική σύγκριση των τριών “υποψήφιων” θεωρητικών μοντέλων κρίνεται επιθυμητή. Συγκεκριμένα, τα διαγράμματα των συναρτήσεων πυκνότητας-πιθανότητας των θεωρητικών κατανομών, Johnson SB (μπλε απόχρωση), Gen. Gamma(4P) (μωβ απόχρωση) και Dagum (μαύρη απόχρωση), απεικονίζονται στο Σχήμα 3.7, ενώ τα ποσοστιαία διαγράμματα (Quantile Plots) για τις αντίστοιχες βέλτιστες κατανομές απεικονίζονται στο Σχήμα 3.8.



Σχήμα 3.7: Διαγράμματα πυκνότητας πιθανότητας για τις βέλτιστες κατανομές Johnson SB (μπλε απόχρωση), Gen. Gamma(4P) (μωβ απόχρωση) και Dagum (μαύρη απόχρωση), για τις μέγιστες θερμοκρασίες στο σταθμό-κόμβο της Αλεξανδρούπολης, κατά την περίοδο 1955-2003.



Σχήμα 3.8: Ποσοστιαία διαγράμματα για τις βέλτιστες κατανομές Johnson SB (μπλε απόχρωση), Gen. Gamma(4P) (μωβ απόχρωση) και Dagum (μαύρη απόχρωση), για τις μέγιστες θερμοκρασίες στο σταθμό-κόμβο της Αλεξανδρούπολης, κατά την περίοδο 1955-2003.

Σύμφωνα με τα διαγράμματα πυκνότητας- πιθανότητας και τα ποσοστιαία διαγράμματα, η κατανομή που φαίνεται να ταιριάζει περισσότερο με τις πραγματικές τιμές είναι η Johnson SB. Εντούτοις, οι τιμές των τυπικών αποκλίσεων την κατέταξαν στην τελευταία από τις τρεις θέσεις, όπως στο τέλος την κατατάσσουν και οι δύο άλλοι έλεγχοι, και συγκεκριμένα ο A-D στην 49^η θέση, ενώ ο χ^2 δεν δίνει καμία τιμή. Από την άλλη μεριά η κατανομή Dagum βρίσκεται στην 5^η και 12^η θέση για τους άλλους ελέγχους.

Με βάση τις υπολογισθείσες τιμές των παραμέτρων που απεικονίζονται στον Πίνακα 3.8, και οι οποίες προέκυψαν από την προσαρμογή των μοντέλων στις πραγματικές ακραίες τιμές,

καθώς και τις σχέσεις των κατανομών από προηγούμενη παράγραφο, οι τελικές και πλήρεις μαθηματικές εκφράσεις της κατανομής Dagum, η οποία προσομοιάζει καλύτερα τις τιμές του δείγματος, διαμορφώνονται ως εξής:

$$f(x) = \frac{2.6856 \left(\frac{x}{35.75} \right)^{1.6856}}{35.75 \left(1 + \left(\frac{x}{35.75} \right)^{25.17} \right)^{1.1067}}$$

και

$$F(x) = \left(1 + \left(\frac{x}{35.75} \right)^{-25.17} \right)^{-0.1067}$$

Πίνακας 3.8: Οι υπολογισθείσες παράμετροι της βέλτιστης θεωρητικής κατανομής, για τις μέγιστες θερμοκρασίες στο σταθμό-κόμβο της Αλεξανδρούπολης, κατά την περίοδο 1955-2003.

Έλεγχος καλής προσαρμογής	Θεωρητική κατανομή	παράμετροι
Chi- Squared	Dagum	k = 0.1067, α = 25.17, β = 35.75

3.1.3 Σταθμός – Κόμβος Ελληνικού

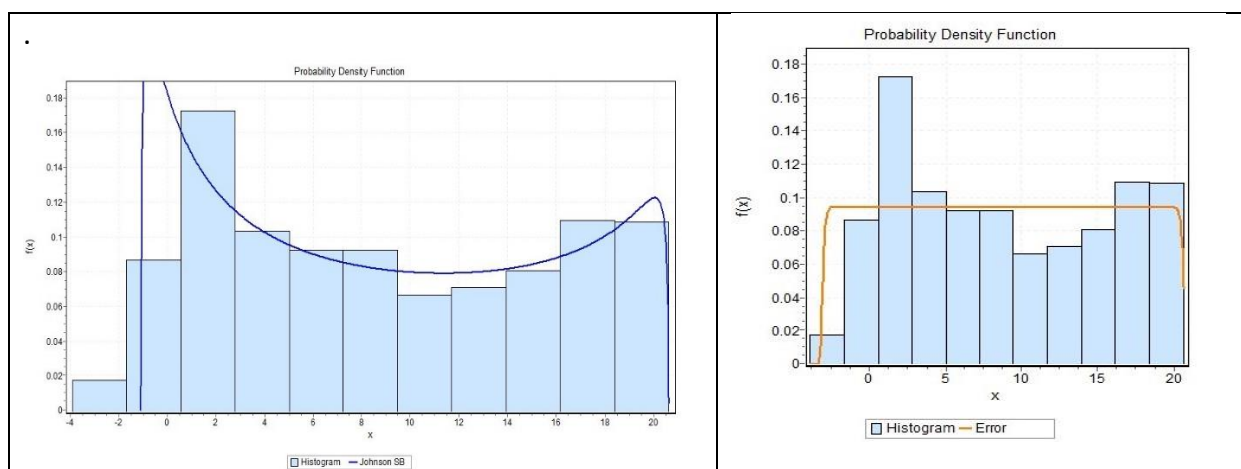
Στην περιοχή του Ελληνικού, για το δείγμα των ελαχίστων θερμοκρασιών, δύο είναι οι επικρατέστερες κατανομές. Για την Kolmogorov - Smirnov είναι η Johnson SB, ενώ για την Anderson-Darling και την Chi-Squared είναι η Error. Με μικρή διαφορά, ως βέλτιστη θα θεωρηθεί η κατανομή Johnson SB, λόγω της μικρότερης απόλυτης απόκλισης, όπως αυτά απεικονίζονται στον Πίνακα 3.9.

Πίνακας 3.9: Οι τρεις βέλτιστες θεωρητικές κατανομές και οι αντίστοιχες απόλυτες αποκλίσεις, όπως αυτές προέκυψαν από τους τρεις ελέγχους καλής προσαρμογής, για τις ελάχιστες θερμοκρασίες στο σταθμό-κόμβο του Ελληνικού, κατά την περίοδο 1955-2003.

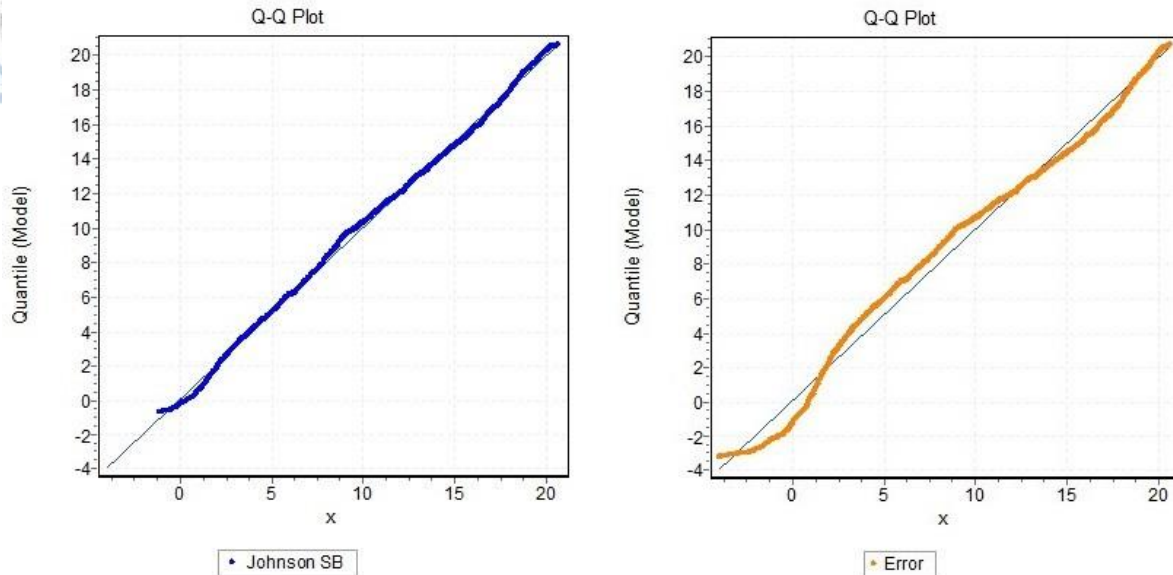
Έλεγχοι καλής προσαρμογής	Θεωρητική κατανομή	Απόλυτη απόκλιση
Kolmogorov- Smirnov	Johnson SB	8.69
Anderson- Darling	Error	8.99
Chi- Squared	Error	8.99

Αβίαστα, λοιπόν, συνάγεται το συμπέρασμα, σύμφωνα με τη μέθοδο των αποκλίσεων, ότι η Johnson SB αποτελεί την βέλτιστη επιλογή. Όμως, ο ίδιος έλεγχος, στις επόμενες θέσεις τοποθετεί τα μοντέλα Gen. Pareto και Error, ενώ οι άλλοι δύο έλεγχοι, τοποθετούν την Johnson SB προς το τέλος της κατάταξής τους, και για την ακρίβεια, για τον A-D στη θέση 32, ενώ για τον χ^2 , δεν αναφέρεται καθόλου.

Τα διαγράμματα πυκνότητας πιθανότητας παρουσιάζονται στο Σχήμα 3.9 για τις δύο αυτές κατανομές, δηλαδή Johnson SB και Error, ενώ τα ποσοστιαία διαγράμματα (Quantile Plots) απεικονίζονται στο Σχήμα 3.10, παρουσιάζοντας μια συγκριτική και εποπτική εικόνα της βέλτιστης μεταξύ αυτών κατανομής. Διαπιστώνεται ότι η κατανομή Johnson SB περιγράφει καλύτερα τις ακραίες τιμές, αφού τα απεικονιζόμενα σημεία αυτών τείνουν να τοποθετηθούν πολύ κοντά στη διαγώνιο της κατανομής.



Σχήμα 3.9: Διαγράμματα πυκνότητας πιθανότητας για τις βέλτιστες κατανομές Johnson SB και Error, για τις ελάχιστες θερμοκρασίες στο σταθμό-κόμβο του Ελληνικού, κατά την περίοδο 1955-2003.



Σχήμα 3.10: Ποσοστιαία διαγράμματα για τις βέλτιστες κατανομές Johnson SB και Error, για τις ελάχιστες θερμοκρασίες στο σταθμό-κόμβο του Ελληνικού, κατά την περίοδο 1955-2003.

Λαμβάνοντας υπόψιν τις τιμές των παραμέτρων (Πίνακας 3.10), οι οποίες προέκυψαν από την προσαρμογή των μοντέλων στις πραγματικές ακραίες τιμές, καθώς και τις σχέσεις των κατανομών από προηγούμενη παράγραφο, οι τελικές και πλήρεις μαθηματικές εκφράσεις της συνάρτησης πυκνότητας-πιθανότητας και αθροιστικής συνάρτησης της βέλτιστης κατανομής Johnson SB, παίρνουν τη μορφή:

$$f(x) = \frac{0.4926}{21.72 \sqrt{2\pi} z (1-z)} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(0.1514 + 0.4926 \ln\left(\frac{z}{1-z}\right)\right)^2\right), \quad z \equiv \frac{x+1.085}{21.72}$$

και

$$F(x) = \Phi\left(0.1514 + 0.4926 \ln\left(\frac{z}{1-z}\right)\right).$$

Πίνακας 3.10: Οι υπολογισθείσες παράμετροι της βέλτιστης θεωρητικής κατανομής, για τις ελάχιστες θερμοκρασίες στο σταθμό-κόμβο του Ελληνικού, κατά την περίοδο 1955-2003.

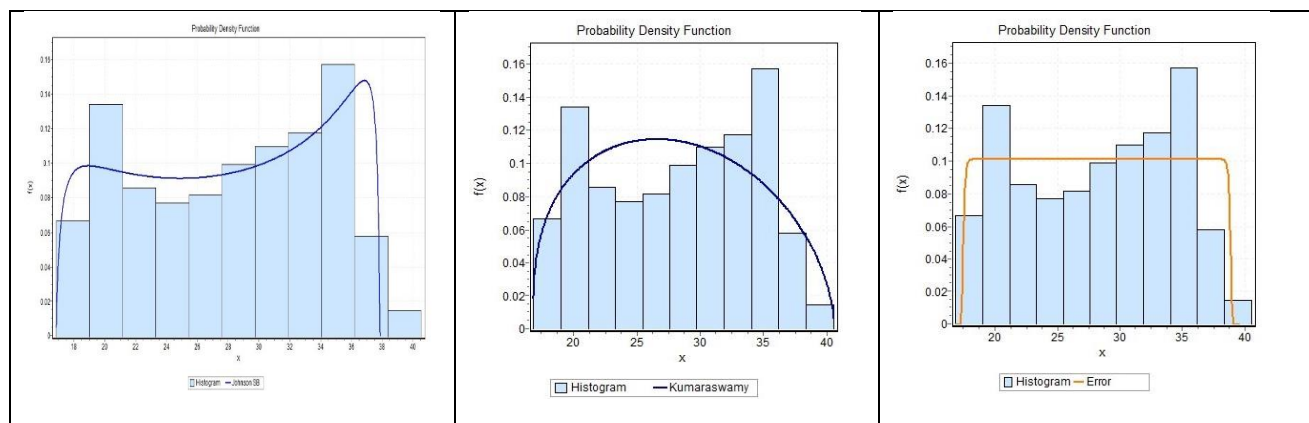
Έλεγχος καλής προσαρμογής	Θεωρητική κατανομή	παραμέτροι
Kolmogorov- Smirnov	Johnson SB	$\gamma = 0.1514$, $\delta = 0.4926$, $\lambda = 21.72$, $\xi = -1.085$

Για τις μέγιστες θερμοκρασίες του Ελληνικού κάθε έλεγχος καλής προσαρμογής προσδιορίζει διαφορετική θεωρητική κατανομή ως αυτήν που προσομοιάζει καλύτερα τις πραγματικές μέγιστες θερμοκρασίες, οι οποίες και απεικονίζονται στον Πίνακα 3.11. Από τις Johnson SB, Kumaraswamy και Error, που ουσιαστικά προτείνονται, η μέθοδος της απόλυτης απόκλισης επιδεικνύει ως καλύτερη την κατανομή Kumaraswamy, με βάση τον έλεγχο Anderson- Darling. Για τους άλλους δύο ελέγχους η κατανομή αυτή καταλαμβάνει τις θέσεις 5 και 4, αντίστοιχα. Οι επόμενες στη σειρά για τον A-D είναι η Beta και G.E.V., με την Johnson SB να είναι 50^η από τα εξήντα-ένα (61) θεωρητικά μοντέλα του συνόλου, και την Error στην 8^η θέση.

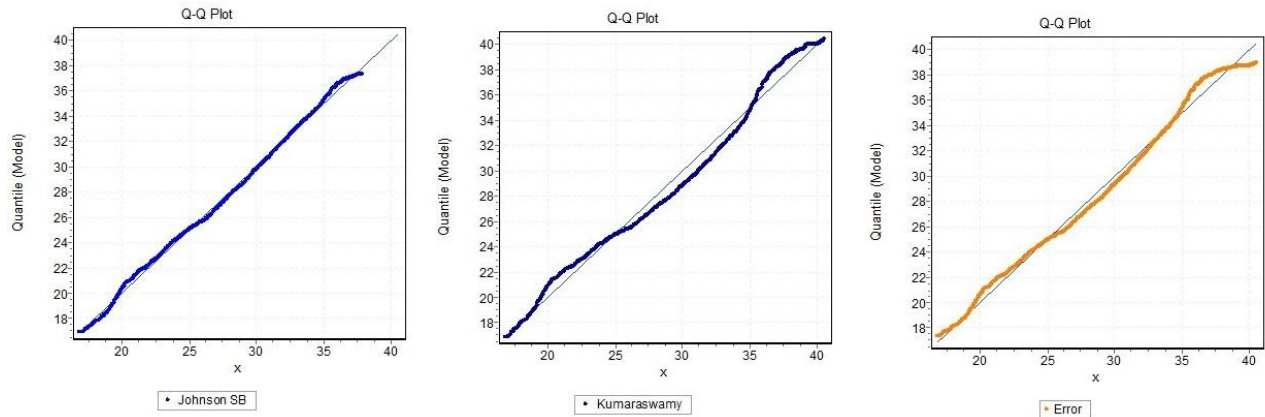
Πίνακας 3.21: Οι τρεις βέλτιστες θεωρητικές κατανομές και οι αντίστοιχες απόλυτες αποκλίσεις, όπως αυτές προέκυψαν από τους τρεις ελέγχους καλής προσαρμογής, για τις μέγιστες θερμοκρασίες στο σταθμό-κόμβο του Ελληνικού, κατά την περίοδο 1955-2003.

Έλεγχοι καλής προσαρμογής	Θεωρητική κατανομή	Απόλυτη απόκλιση
Kolmogorov- Smirnov	Johnson SB	27.85
Anderson- Darling	Kumaraswamy	27.61
Chi- Squared	Error	28.10

Επιπρόσθετη οπτική σύγκριση των τριών θεωρητικών μοντέλων κρίνεται επιθυμητή. Συγκεκριμένα, τα διαγράμματα των συναρτήσεων πυκνότητας-πιθανότητας των θεωρητικών κατανομών, Johnson SB, Kumaraswamy και Error, απεικονίζονται στο Σχήμα 3.11, ενώ τα ποσοστιαία διαγράμματα (Quantile Plots), για τις αντίστοιχες βέλτιστες κατανομές, απεικονίζονται στο Σχήμα 3.12.



Σχήμα 3.11: Διαγράμματα πυκνότητας πιθανότητας για τις βέλτιστες κατανομές Johnson SB, Kumaraswamy και Error, για τις μέγιστες θερμοκρασίες στο σταθμό-κόμβο του Ελληνικού, κατά την περίοδο 1955-2003.



Σχήμα 3.12: Ποσοστιαία διαγράμματα για τις βέλτιστες κατανομές Johnson SB, Kumaraswamy και Error, για τις μέγιστες θερμοκρασίες στο σταθμό-κόμβο του Ελληνικού, κατά την περίοδο 1955-2003.

Με βάση τις υπολογισθείσες τιμές των παραμέτρων που απεικονίζονται στον Πίνακα 3.12, και οι οποίες προέκυψαν από την προσαρμογή των μοντέλων στις πραγματικές ακραίες μέγιστες θερμοκρασίες, καθώς και τις σχέσεις των κατανομών από προηγούμενη παράγραφο, οι τελικές και πλήρεις μαθηματικές εκφράσεις της κατανομής Kumaraswamy, η οποία προσομοιάζει καλύτερα τις τιμές του δείγματος, διαμορφώνονται ως εξής:

$$f(x) = \frac{2.08z^{0.33}(1-z^{1.33})^{0.564}}{(23.72)}, \quad \text{και}$$

$$F(x) = 1 - (1 - z^{1.33})^{1.564} \quad \text{με} \quad z \equiv \frac{x-16.83}{23.72}.$$

Πίνακας 3.12: Οι υπολογισθείσες παράμετροι της βέλτιστης θεωρητικής κατανομής, για τις μέγιστες θερμοκρασίες στο σταθμό-κόμβο του Ελληνικού, κατά την περίοδο 1955-2003.

Έλεγχος καλής προσαρμογής	Θεωρητική κατανομή	Παράμετροι
Anderson- Darling	Kumaraswamy	$\alpha_1 = 1.33$, $\alpha_2 = 1.564$, $a = 16.83$, $b = 40.55$

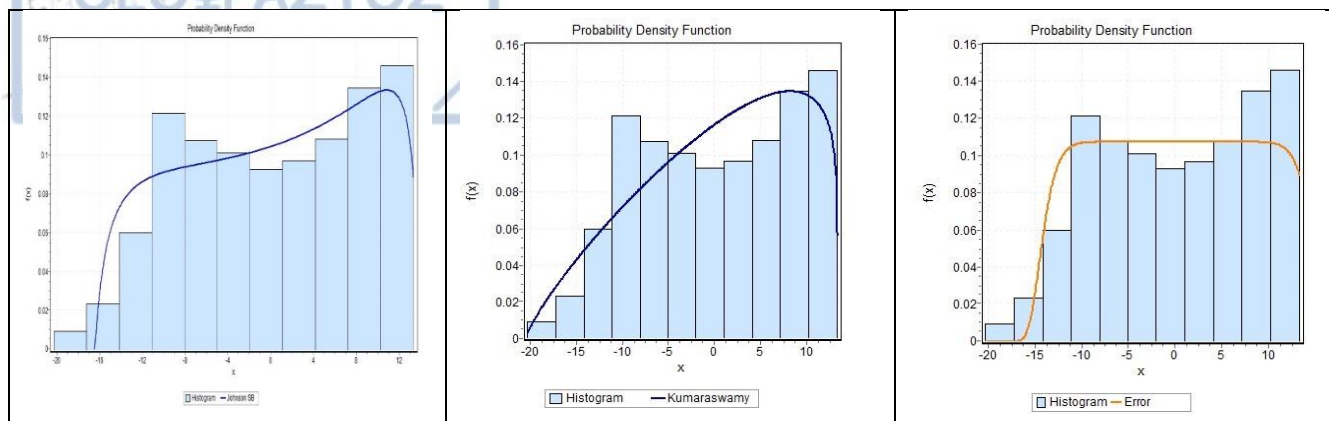
3.1.4 Σταθμός – Κόμβος Φλώρινας

Παρατηρώντας τον Πίνακα 3.13 των επικρατέστερων, σύμφωνα με τους μη παραμετρικούς ελέγχους καλής προσαρμογής, κατανομών των ακραίων ελαχίστων θερμοκρασιών του σταθμού-κόμβου της Φλώρινας, εξάγεται το συμπέρασμα ότι η κατανομή Kumaraswamy έχει την μικρότερη απόλυτη απόκλιση ανάμεσα στις πραγματικές τιμές του δείγματος και στις θεωρητικές τιμές. Με πολύ μικρές διαφορές, επομένως, η Kumaraswamy γίνεται δεκτή ως η αντιπροσωπευτικότερη θεωρητική κατανομή. Οι K-S και χ^2 έλεγχοι την κατατάσσουν και οι δύο στην 4^η θέση. Ενδιαφέρον παρουσιάζουν και τα μοντέλα που βρίσκονται στις επόμενες θέσεις του ίδιο ελέγχου. Συγκεκριμένα, ο A-D στις υπόλοιπες 4 καλύτερες θέσεις τοποθετεί με τη σειρά τις Beta, Power Function, Gen. Gamma (4P) και Gen. Extreme Value, ενώ οι κατανομές Johnson SB και Error, που είναι οι επιλογές των δύο άλλων ελέγχων, βρίσκονται αρκετά χαμηλά στην κατάταξη, στην 28^η και 19^η σειρά, αντίστοιχα.

Πίνακας 3.33: Οι τρεις βέλτιστες θεωρητικές κατανομές και οι αντίστοιχες απόλυτες αποκλίσεις, όπως αυτές προέκυψαν από τους τρεις ελέγχους καλής προσαρμογής, για τις ελάχιστες θερμοκρασίες στο σταθμό-κόμβο της Φλώρινας, κατά την περίοδο 1955-2003.

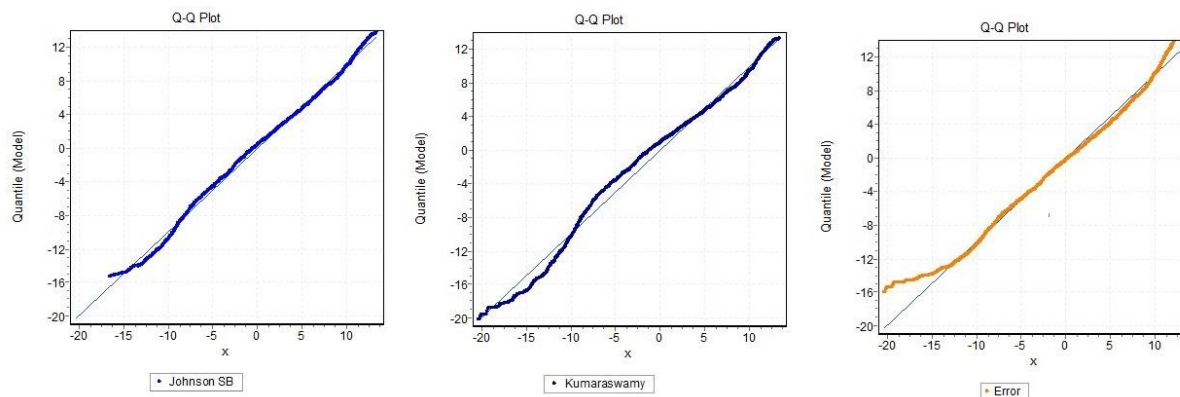
Έλεγχοι καλής προσαρμογής	Θεωρητική κατανομή	Απόλυτη απόκλιση
Kolmogorov- Smirnov	Johnson SB	7.27
Anderson- Darling	Kumaraswamy	7.26
Chi- Squared	Error	7.34

Στο Σχήμα 3.13 παρουσιάζονται τα διαγράμματα πυκνότητας πιθανότητας για τις τρεις αυτές κατανομές, δηλαδή Johnson SB, Kumaraswamy και Error.



Σχήμα 3.13: Διαγράμματα πυκνότητας πιθανότητας για τις βέλτιστες κατανομές Johnson SB, Kumaraswamy και Error, για τις ελάχιστες θερμοκρασίες στο σταθμό-κόμβο της Φλώρινας, κατά την περίοδο 1955-2003.

Στο Σχήμα 3.14 απεικονίζονται τα ποσοστιαία διαγράμματα (Quantile Plots) για τις βέλτιστες κατανομές, Johnson SB, Kumaraswamy και Error, παρουσιάζοντας μια συγκρητική και εποπτική εικόνα της βέλτιστης κατανομής. Όπως με τη μέθοδο της απόλυτης απόκλισης, έτσι και με την εποπτική εικόνα των διαγραμμάτων, οι διαφορές φαίνεται να είναι πολύ μικρές, ειδικότερα μεταξύ των δύο κατανομών, Johnson SB και Kumaraswamy, στις οποίες οι πραγματικές τιμές βρίσκονται πολύ κοντά στην διαγώνιο τους. Διαπιστώνεται ότι η κατανομή Kumaraswamy περιγράφει καλύτερα τις ακραίες τιμές, αφού τα απεικονιζόμενα σημεία αυτών τείνουν να τοποθετηθούν πολύ κοντά στη διαγώνιο της κατανομής.



Σχήμα 3.14: Ποσοστιαία διαγράμματα για τις βέλτιστες κατανομές Johnson SB, Kumaraswamy και Error, για τις ελάχιστες θερμοκρασίες στο σταθμό-κόμβο της Φλώρινας, κατά την περίοδο 1955-2003.

Με βάση τις υπολογισθείσες τιμές των παραμέτρων που απεικονίζονται στον Πίνακα 3.14, και οι οποίες προέκυψαν από την προσαρμογή των μοντέλων στις πραγματικές ακραίες τιμές, καθώς και τις σχέσεις των κατανομών από προηγούμενη παράγραφο, οι τελικές και πλήρεις μαθηματικές εκφράσεις της κατανομής Kumaraswamy, η οποία προσομοιάζει καλύτερα τις τιμές του δείγματος, διαμορφώνονται ως εξής:

$$f(x) = \frac{2.1z^{0.819}(1-z^{1.819})^{0.155}}{(33.81)},$$

και

$$F(x) = 1 - (1 - z^{1.819})^{1.155} \quad \text{με} \quad z \equiv \frac{x+20.48}{33.81}.$$

Πίνακας 3.14: Οι υπολογισθείσες παράμετροι της βέλτιστης θεωρητικής κατανομής, για τις ελάχιστες θερμοκρασίες στο σταθμό-κόμβο της Φλώρινας, κατά την περίοδο 1955-2003.

Έλεγχος καλής προσαρμογής	Θεωρητική κατανομή	Παράμετροι
Anderson- Darling	Kumaraswamy	$\alpha_1= 1.819, \alpha_2= 1.155,$ $a= -20.48, b= 13.33$

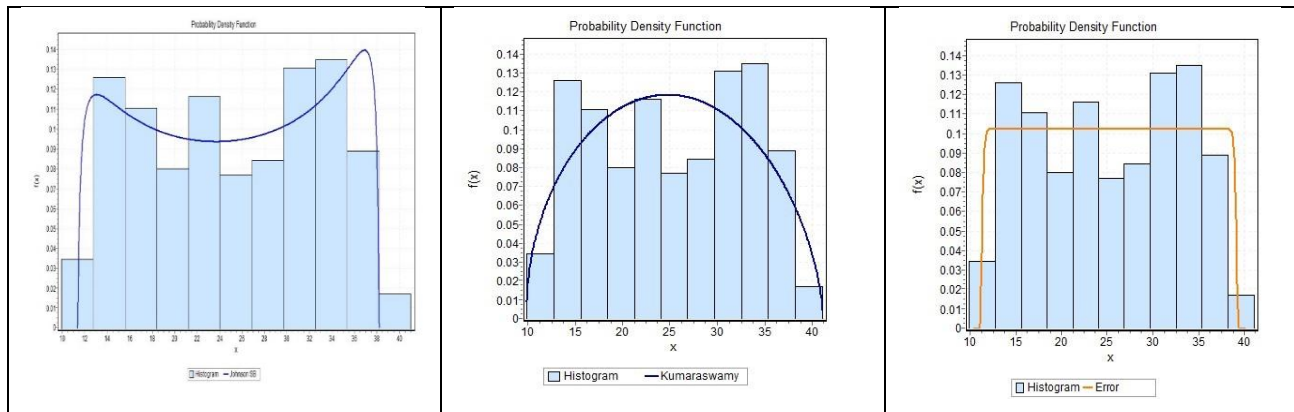
Είναι αξιοσημείωτο το γεγονός ότι παρατηρείται ιδιαίτερα μεγάλη ομοιότητα ανάμεσα στα αποτελέσματα των ακραίων ελαχίστων και των ακραίων μεγίστων θερμοκρασιών της Φλώρινας. Ο έλεγχος K-S παρουσιάζει και εδώ ως βέλτιστη την κατανομή Johnson SB, όπως ο A-D την Kumaraswamy και ο χ^2 την Error, ενώ οι τιμές των απολύτων αποκλίσεων αναδεικνύουν, και εδώ, όπως απεικονίζεται στον Πίνακα 3.15, την κατανομή Kumaraswamy ως την καταλληλότερη.

Πίνακας 3.45: Οι τρεις βέλτιστες θεωρητικές κατανομές και οι αντίστοιχες απόλυτες αποκλίσεις, όπως αυτές προέκυψαν από τους τρεις ελέγχους καλής προσαρμογής, για τις μέγιστες θερμοκρασίες στο σταθμό-κόμβο της Φλώρινας, κατά την περίοδο 1955-2003.

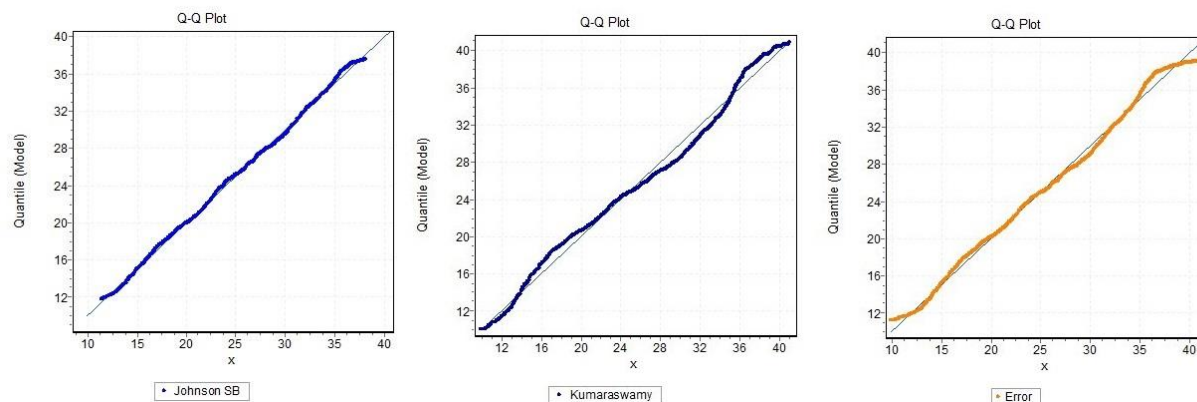
Έλεγχοι καλής προσαρμογής	Θεωρητική κατανομή	Απόλυτη απόκλιση
Kolmogorov- Smirnov	Johnson SB	24.90
Anderson- Darling	Kumaraswamy	24.66
Chi- Squared	Error	25.20

Αξίζει να αναφερθούν και τα θεωρητικά μοντέλα που βρίσκονται στις δεύτερες θέσεις των ελέγχων καλής προσαρμογής, όπως επίσης και οι θέσεις στις οποίες παρουσιάζονται τα μοντέλα Johnson SB, Kumaraswamy και Error για τους υπόλοιπους ελέγχους. Για τον πρώτο έλεγχο, δεύτερη πιο αντιπροσωπευτική κατανομή θεωρείται η Gen. Pareto, ενώ η Kumaraswamy τοποθετείται στην 5^η θέση και η Error στην 3^η. Για τον δεύτερο έλεγχο, της Kumaraswamy κατανομής έπεται η κατανομή Beta, ενώ η Johnson SB βρίσκεται στη θέση 49 και η Error στην θέση 5. Τέλος, ο τρίτος έλεγχος προτείνει την Kumaraswamy ως δεύτερη καλύτερη, ενώ για την Johnson SB δεν παρουσιάζει καμία τιμή.

Οπτική σύγκριση των τριών θεωρητικών μοντέλων κρίνεται επιθυμητή. Συγκεκριμένα, τα διαγράμματα των συναρτήσεων πυκνότητας-πιθανότητας των θεωρητικών κατανομών, Johnson SB, Kumaraswamy και Error, απεικονίζονται στο Σχήμα 3.15, ενώ τα ποσοστιαία διαγράμματα (Quantile Plots) για τις αντίστοιχες βέλτιστες κατανομές απεικονίζονται στο Σχήμα 3.16.



Σχήμα 3.15: Διαγράμματα πυκνότητας πιθανότητας για τις βέλτιστες κατανομές Johnson SB, Kumaraswamy και Error, για τις μέγιστες θερμοκρασίες στο σταθμό-κόμβο της Φλώρινας, κατά την περίοδο 1955-2003.



Σχήμα 3.16: Ποσοστιαία διαγράμματα για τις βέλτιστες κατανομές Johnson SB, Kumaraswamy και Error, για τις μέγιστες θερμοκρασίες στο σταθμό-κόμβο της Φλώρινας, κατά την περίοδο 1955-2003.

Λαμβάνοντας υπόψιν τις τιμές των παραμέτρων του Πίνακα 3.16, οι οποίες προέκυψαν από την προσαρμογή των μοντέλων στις πραγματικές ακραίες τιμές, καθώς και τις σχέσεις των κατανομών από προηγούμενη παράγραφο, οι τελικές και πλήρεις μαθηματικές εκφράσεις της συνάρτησης πυκνότητας-πιθανότητας και αθροιστικής συνάρτησης της βέλτιστης κατανομής Kumaraswamy, παίρνουν τη μορφή:

$$f(x) = \frac{2.379z^{0.466}(1-z^{1.466})^{0.623}}{(31.173)},$$

και

$$F(x) = 1 - (1 - z^{1.466})^{1.623} \quad \text{με} \quad z \equiv \frac{x-9.887}{31.173}$$

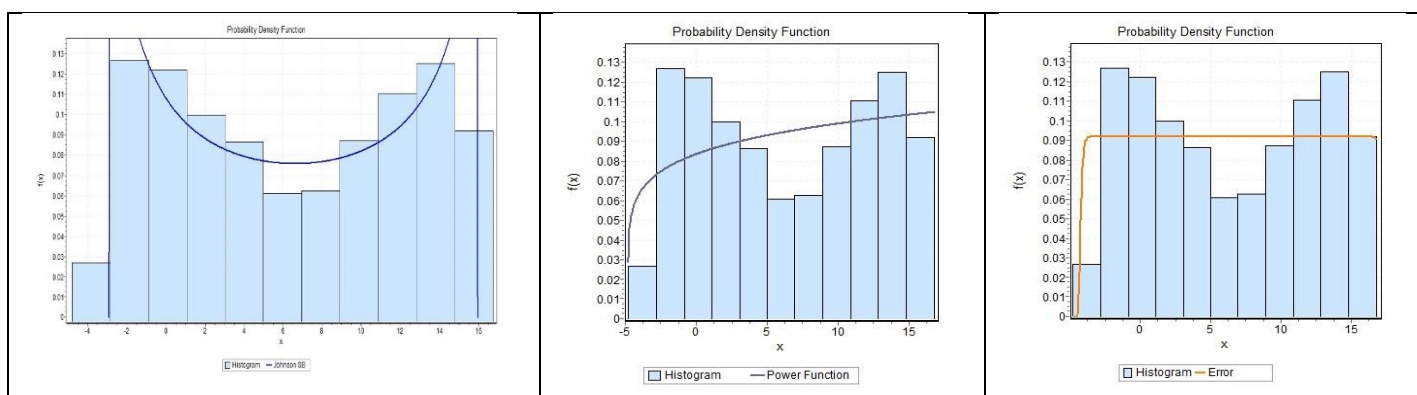
Πίνακας 3.16: Οι υπολογισθείσες παράμετροι της βέλτιστης θεωρητικής κατανομής, για τις μέγιστες θερμοκρασίες στο σταθμό-κόμβο της Φλώρινας, κατά την περίοδο 1955-2003.

Έλεγχος καλής προσαρμογής	Θεωρητική κατανομή	παραμέτροι
Anderson- Darling	Kumaraswamy	$\alpha_1= 1.466, \alpha_2= 1.623,$ $a= 9.887, b= 41.06$

Η κατανομή στην οποία προσαρμόζονται καλύτερα οι πραγματικές ακραίες ελάχιστες θερμοκρασίες της Κέρκυρας είναι η Power Function του A-D ελέγχου, έναντι της Johnson SB κατανομής του K-S και της Error κατανομής του χ^2 , που βρίσκονται στην τριάδα του Πίνακα 3.17. Η ίδια κατανομή παρουσιάζεται ως πέμπτη αντιπροσωπευτικότερη για τους άλλους δύο ελέγχους, και οι A-D και χ^2 συμφωνούν στις Beta και Kumaraswamy να βρίσκονται στις θέσεις 2 και 3 της κατάταξής τους. Αξιοσημείωτο εδώ, είναι το γεγονός ότι είκοσι-πέντε (25) από τις εξήντα-μία (61) συνολικά κατανομές θεωρούνται απολύτως ασυμβίβαστες και για τους τρεις ελέγχους καλής προσαρμογής, ενώ στις τελευταίες θέσεις και των τριών, δηλαδή, αυτή που κρίνεται ως λιγότερο κατάλληλη, είναι η Student's t.

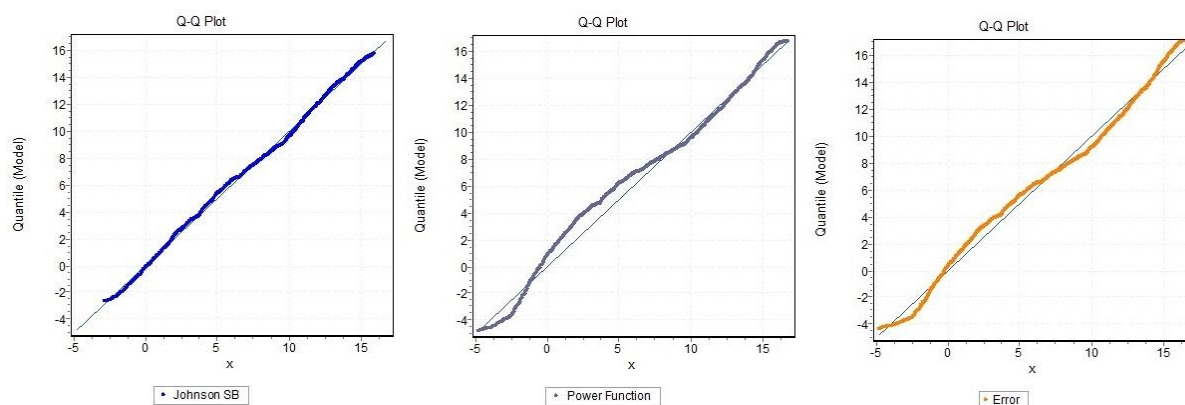
Πίνακας 3.17: Οι τρεις βέλτιστες θεωρητικές κατανομές και οι αντίστοιχες απόλυτες αποκλίσεις, όπως αυτές προέκυψαν από τους τρεις ελέγχους καλής προσαρμογής, για τις ελάχιστες θερμοκρασίες στο σταθμό-κόμβο της Κέρκυρας, κατά την περίοδο 1955-2003.

Έλεγχοι καλής προσαρμογής	Θεωρητική κατανομή	Απόλυτη απόκλιση
Kolmogorov- Smirnov	Johnson SB	6.98
Anderson- Darling	Power Function	6.82
Chi- Squared	Error	7.17



Σχήμα 3.17: Διαγράμματα πυκνότητας πιθανότητας για τις βέλτιστες κατανομές Johnson SB, Power Function και Error, για τις ελάχιστες θερμοκρασίες στο σταθμό-κόμβο της Κέρκυρας, κατά την περίοδο 1955-2003.

Τα διαγράμματα πυκνότητας πιθανότητας παρουσιάζονται στο Σχήμα 3.17 για τις τρεις αυτές κατανομές, δηλαδή Johnson SB, Power Function και Error. Στο Σχήμα 3.18 απεικονίζονται τα ποσοστιαία διαγράμματα (Quantile Plots) για τις τρεις βέλτιστες κατανομές, Johnson SB, Power Function και Error, παρουσιάζοντας μια συγκρητική και εποπτική εικόνα της βέλτιστης μεταξύ αυτών κατανομής. Διαπιστώνεται ότι η κατανομή Beta περιγράφει καλύτερα τις ακραίες τιμές, αφού τα απεικονιζόμενα σημεία αυτών τείνουν να τοποθετηθούν πολύ κοντά στη διαγώνιο της κατανομής.



Σχήμα 3.18: Ποσοστιαία διαγράμματα για τις βέλτιστες κατανομές Johnson SB, Power Function και Error, για τις ελάχιστες θερμοκρασίες στο σταθμό-κόμβο της Κέρκυρας, κατά την περίοδο 1955-2003.

Λαμβάνοντας υπόψιν τις τιμές των παραμέτρων που απεικονίζονται στον Πίνακας 3.18, οι οποίες προέκυψαν από την προσαρμογή των μοντέλων στις πραγματικές ακραίες τιμές, καθώς και τις σχέσεις των κατανομών από προηγούμενη παράγραφο, οι τελικές και πλήρεις μαθηματικές εκφράσεις της συνάρτησης πυκνότητας-πιθανότητας και αθροιστικής συνάρτησης της βέλτιστης κατανομής Power Function, παίρνουν τη μορφή:

$$f(x) = \frac{1.151(x + 4.804)^{0.151}}{(21.554)^{1.151}}$$

Και

$$F(x) = \left(\frac{x+4.804}{21.554} \right)^{1.151}.$$

Πίνακας 3.18: Οι υπολογισθείσες παράμετροι της βέλτιστης θεωρητικής κατανομής, για τις ελάχιστες θερμοκρασίες στο σταθμό-κόμβο της Κέρκυρας, κατά την περίοδο 1955-2003.

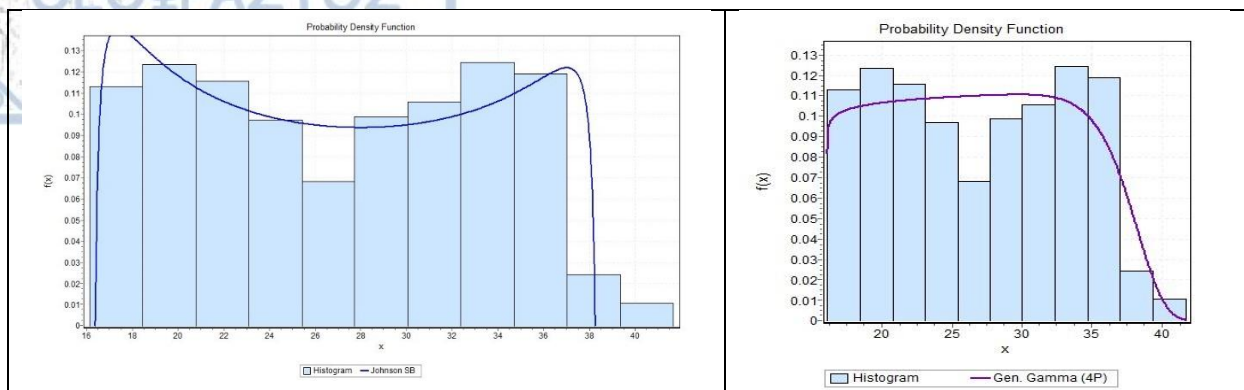
Έλεγχος καλής προσαρμογής	Θεωρητική κατανομή	παράμετροι
Anderson- Darling	Power Function	$\alpha = 1.151$, $a = -4.804$, $b = 16.75$

Σύμφωνα με τον Πίνακα 3.19, δύο είναι οι κατανομές που έχουν επιλεγεί ως οι «καλύτερες» για τις ακραίες μέγιστες θερμοκρασίες του σταθμού- κόμβου της Κέρκυρας, από τους τρεις ελέγχους. Ο K-S επιλέγει την Johnson SB και οι A-D και χ^2 συμφωνούν στην Gen. Gamma (4P). Η απόλυτη απόκλιση για την Johnson SB είναι 26.73, ενώ για την Gen. Gamma(4P) είναι 25.51. Επομένως, όπως είναι φανερό, δεκτή ως βέλτιστη κατανομή εκ των δύο είναι η Gen. Gamma(4P). Για τον K-S έλεγχο η κατανομή Gen. Gamma (4P) θεωρείται ως 5^η καλύτερη, ενώ για τους άλλους δύο ελέγχους η Johnson SB βρίσκεται στις τελευταίες θέσεις, ως μία από τις λιγότερο κατάλληλες κατανομές. Για τον A-D έλεγχο, η δεύτερη θέση ανήκει στην Kumaraswamy, ενώ για τον χ^2 στην Error.

Πίνακας 3.19: Οι τρεις βέλτιστες θεωρητικές κατανομές και οι αντίστοιχες απόλυτες αποκλίσεις, όπως αυτές προέκυψαν από τους τρεις ελέγχους καλής προσαρμογής, για τις μέγιστες θερμοκρασίες στο σταθμό-κόμβο της Κέρκυρας, κατά την περίοδο 1955-2003.

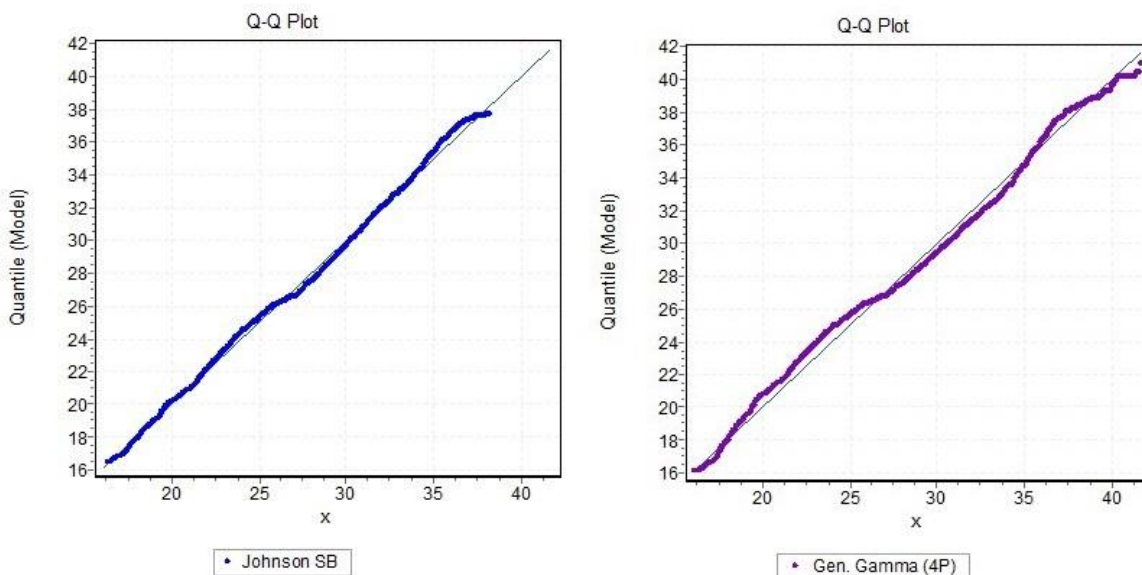
Έλεγχος καλής προσαρμογής	Θεωρητική κατανομή	Απόλυτη απόκλιση
Kolmogorov- Smirnov	Johnson SB	26.73
Anderson- Darling	Gen. Gamma(4P)	25.51
Chi- Squared	Gen. Gamma(4P)	25.51

Στο Σχήμα 3.19 παρουσιάζονται τα διαγράμματα πυκνότητας πιθανότητας για τις δύο αυτές κατανομές, δηλαδή Johnson SB και Gen. Gamma (4P).



Σχήμα 3.19: Διαγράμματα πυκνότητας πιθανότητας για τις βέλτιστες κατανομές Johnson SB και Gen. Gamma (4P), για τις μέγιστες θερμοκρασίες στο σταθμό-κόμβο της Κέρκυρας, κατά την περίοδο 1955-2003.

Στο Σχήμα 3.20 απεικονίζονται τα ποσοστιαία διαγράμματα (Quantile Plots) για τις δύο βέλτιστες κατανομές, Johnson SB, και Gen. Gamma (4P), παρουσιάζοντας μια συγκριτική και εποπτική εικόνα της βέλτιστης μεταξύ αυτών κατανομής. Αν και πολύ μικρές διαφορές φαίνεται να έχουν οι δύο κατανομές σύμφωνα με τα διαγράμματα, διαπιστώνεται ότι η κατανομή Gen. Gamma (4P) περιγράφει καλύτερα τις ακραίες τιμές, αφού τα απεικονιζόμενα σημεία αυτών τείνουν να τοποθετηθούν πολύ κοντά στη διαγώνιο της κατανομής.



Σχήμα 3.20: Ποσοστιαία διαγράμματα για τις βέλτιστες κατανομές Johnson SB και Gen. Gamma (4P), για τις μέγιστες θερμοκρασίες στο σταθμό-κόμβο της Κέρκυρας, κατά την περίοδο 1955-2003.

Λαμβάνοντας υπόψιν τις τιμές των παραμέτρων που απεικονίζονται στον Πίνακα 3.20, οι οποίες προέκυψαν από την προσαρμογή των μοντέλων στις πραγματικές ακραίες τιμές, καθώς και τις σχέσεις των κατανομών από προηγούμενη παράγραφο, οι τελικές και πλήρεις μαθηματικές εκφράσεις της συνάρτησης πυκνότητας-πιθανότητας και αθροιστικής συνάρτησης της βέλτιστης κατανομής Gen. Gamma (4P), παίρνουν τη μορφή:

$$f(x) = \frac{12.27(x-16.13)^{0.0319}}{22.22^{1.0319}\Gamma(0.0841)} \exp\left(-\left((x-16.13)/22.22\right)^{12.27}\right),$$

και

$$F(x) = \frac{\Gamma_{((x-16.13)/22.22)^{12.27}(0.0841)}}{\Gamma(0.0841)}.$$

Πίνακας 3.20: Οι υπολογισθείσες παράμετροι της βέλτιστης θεωρητικής κατανομής, για τις μέγιστες θερμοκρασίες στο σταθμό-κόμβο της Κέρκυρας, κατά την περίοδο 1955-2003.

Έλεγχος καλής προσαρμογής	Θεωρητική κατανομή	παράμετροι
A-D, και χ^2	Gen. Gamma (4P)	k= 12.27, α= 0.0841, β= 22.22, γ= 16.13

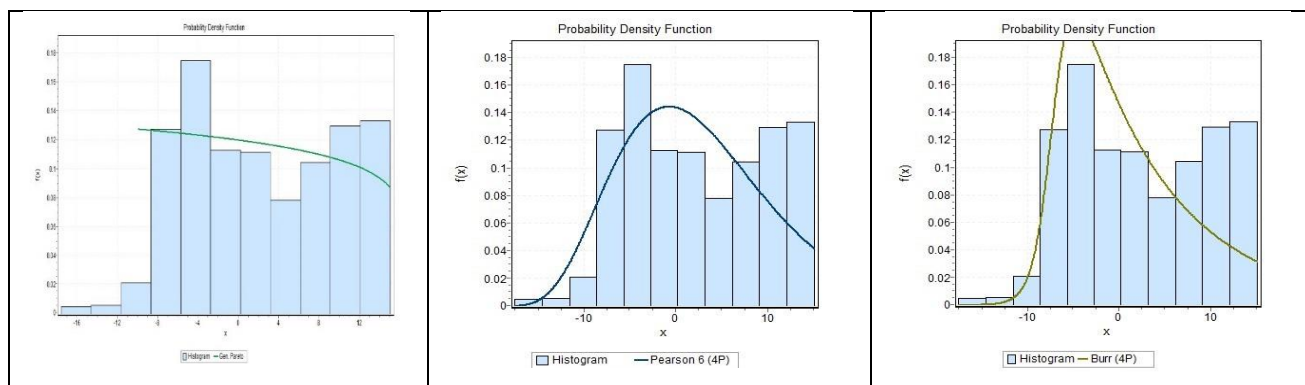
3.1.6 Σταθμός – Κόμβος Λάρισα

Για τις ακραίες ελάχιστες θερμοκρασίες του σταθμού-κόμβου της Λάρισας ο έλεγχος καλής προσαρμογής Kolmogorov-Smirnov εκτιμάει την κατανομή Gen. Pareto ως αυτήν που αντιπροσωπεύει καλύτερα τις πραγματικές ελάχιστες θερμοκρασίες, ο Anderson- Darling την Pearson 6 (4P) και ο Chi-Squared την Burr (4P) (Πίνακας 3.21). Υπολογίζοντας την απόλυτη απόκλιση της κάθε μίας από τις τρεις αυτές θεωρητικές κατανομές, εξάγεται το συμπέρασμα ότι με πολύ μικρή διαφορά η κατανομή Burr (4P) θεωρείται η πιο κατάλληλη. Για τον χ^2 , τη δεύτερη θέση καταλαμβάνει η Error και την τρίτη θέση η Pearson 6 (4P), ενώ η Gen. Pareto δεν παίρνει καμία τιμή. Η Burr για τους K-S και A-D βρίσκεται στις θέσεις 21 και 20, αντίστοιχα.

Πίνακας 3.21: Οι τρεις βέλτιστες θεωρητικές κατανομές και οι αντίστοιχες απόλυτες αποκλίσεις, όπως αυτές προέκυψαν από τους τρεις ελέγχους καλής προσαρμογής, για τις ελάχιστες θερμοκρασίες στο σταθμό-κόμβο της Λάρισας, κατά την περίοδο 1955-2003.

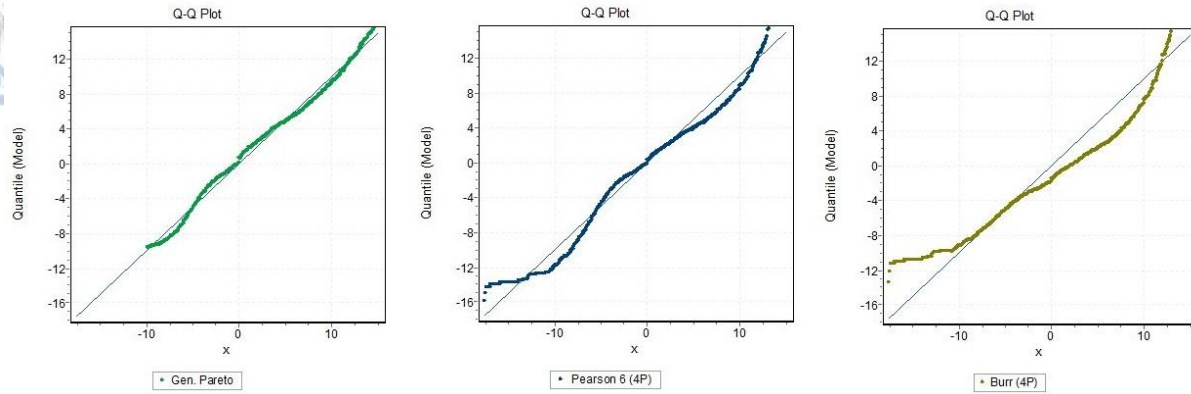
Έλεγχοι καλής προσαρμογής	Θεωρητική κατανομή	Απόλυτη απόκλιση
Kolmogorov- Smirnov	Gen. Pareto	6.59
Anderson- Darling	Pearson 6 (4P)	6.57
Chi- Squared	Burr(4P)	6.56

Στο Σχήμα 3.21 παρουσιάζονται τα διαγράμματα πυκνότητας πιθανότητας για τις τρεις αυτές κατανομές, δηλαδή Gen. Pareto, Pearson 6 (4p) και Burr (4P).



Σχήμα 3.21: Διαγράμματα πυκνότητας πιθανότητας για τις βέλτιστες κατανομές Gen. Pareto, Pearson 6 (4p) και Burr (4P), για τις ελάχιστες θερμοκρασίες στο σταθμό-κόμβο της Λάρισας, κατά την περίοδο 1955-2003.

Στο Σχήμα 3.22 απεικονίζονται τα ποσοστιαία διαγράμματα (Quantile Plots) για τις βέλτιστες κατανομές, Gen. Pareto, Pearson 6 (4p) και Burr (4P), παρουσιάζοντας μια συγκριτική και εποπτική εικόνα της βέλτιστης κατανομής. Όπως παρατηρείται, σε κανένα από τα διαγράμματα δεν φαίνεται να προσαρμόζονται καλά οι τιμές του δείγματος πάνω στη διαγώνιο της κατανομής, επομένως είναι δύσκολη η εξαγωγή κάποιου συμπεράσματος βασιζόμενου στα διαγράμματα αυτά, και κρίνεται δεκτό το αποτέλεσμα της μεθόδου τυπικών αποκλίσεων.



Σχήμα 3.22: Ποσοστιαία διαγράμματα για τις βέλτιστες κατανομές *Gen. Pareto*, *Pearson 6 (4p)* και *Burr (4P)*, για τις ελάχιστες θερμοκρασίες στο σταθμό-κόμβο της Λάρισας, κατά την περίοδο 1955-2003.

Καθώς η κατανομή *Burr (4P)* θεωρήθηκε, ως η καλύτερη κατανομή σ' αυτή την περίπτωση, στον Πίνακα 3.22 παρουσιάζονται οι υπολογισθείσες τιμές των παραμέτρων που προέκυψαν από την προσαρμογή των μοντέλων στις πραγματικές ακραίες τιμές, καθώς και οι τελικές και πλήρεις μαθηματικές εκφράσεις των συναρτήσεων πυκνότητας-πιθανότητας και αθροιστικής συνάρτησης της κατανομής *Burr (4P)*, οι οποίες διαμορφώνονται ως εξής:

Συνάρτηση πυκνότητας-πιθανότητας:

$$f(x) = \frac{0.751 \left(\frac{x+7.394}{7.394} \right)^{5.838}}{7.394 \left(1 + \left(\frac{x+7.394}{7.394} \right)^{6.838} \right)^{1.1099}} ,$$

Αθροιστική συνάρτηση:

$$F(x) = 1 - \left(1 + \left(\frac{x+7.394}{7.394} \right)^{6.838} \right)^{-0.1099} .$$

Πίνακας 3.22: Οι υπολογισθείσες παράμετροι της βέλτιστης θεωρητικής κατανομής, για τις ελάχιστες θερμοκρασίες στο σταθμό-κόμβο της Λάρισας, κατά την περίοδο 1955-2003.

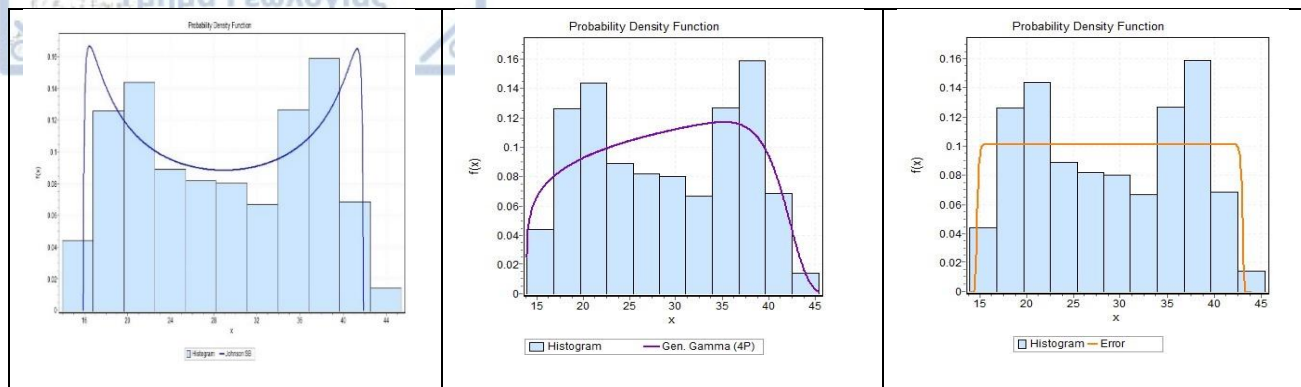
Έλεγχος καλής προσαρμογής	Θεωρητική κατανομή	παράμετροι
Chi- Squared	Burr	k= 0.1099, α= 6.838, β= 7.394, γ= -7.394

Στο δείγμα των μέγιστων θερμοκρασιών της Λάρισας οι κατανομές που φαίνεται να είναι αντιπροσωπευτικότερες σύμφωνα με τους ελέγχους καλής προσαρμογής, είναι οι Johnson SB, Gen. Gamma (4P) και Error. Από αυτές, όπως φαίνεται και στον Πίνακα 3.23, ως βέλτιστη θα θεωρηθεί η Gen. Gamma (4P), την οποία έχει επιλέξει ο έλεγχος A-D, ως αυτή με την μικρότερη απόλυτη απόκλιση. Δεύτερη καταλληλότερη θεωρείται η Johnson SB και τρίτη η Error. Για τον A-D έλεγχο, δεύτερη καταλληλότερη κατανομή είναι η Kumaraswamy και ακολουθεί η Beta και η Gen. Extreme Value. Για τον Kolmogorov-Smirnov έλεγχο, στη θέση 2 βρίσκεται το μοντέλο Uniform και στη θέση 3 το θεωρητικό μοντέλο Error. Αντίστοιχα, για τον Chi- Squared, τη θέση 2 καταλαμβάνει η Gen. Gamma (4P) κατανομή, ενώ τη θέση 3 η Kumaraswamy.

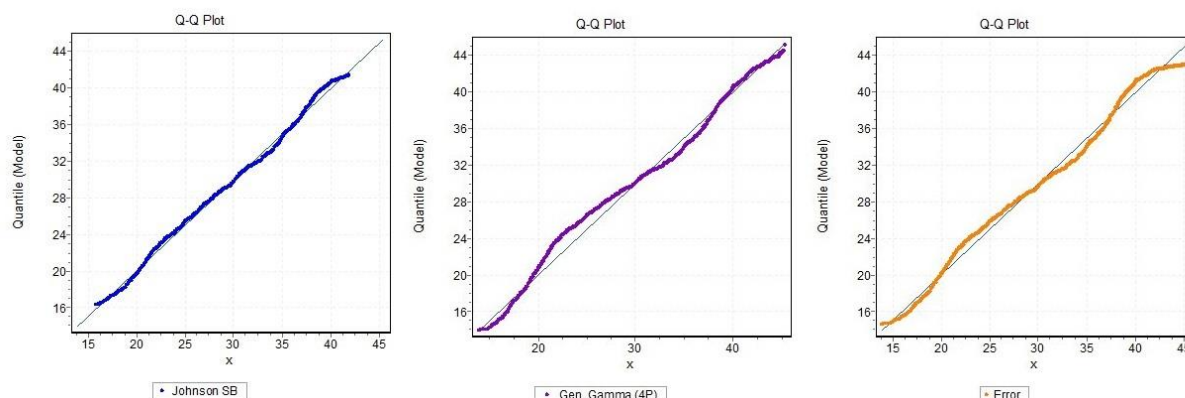
Πίνακας 3.23: Οι τρεις βέλτιστες θεωρητικές κατανομές και οι αντίστοιχες απόλυτες αποκλίσεις, όπως αυτές προέκυψαν από τους τρεις ελέγχους καλής προσαρμογής, για τις μέγιστες θερμοκρασίες στο σταθμό-κόμβο της Λάρισας, κατά την περίοδο 1955-2003.

Έλεγχοι καλής προσαρμογής	Θεωρητική κατανομή	Απόλυτη απόκλιση
Kolmogorov- Smirnov	Johnson SB	28.55
Anderson- Darling	Gen. Gamma (4P)	27.35
Chi- Squared	Error	28.85

Οπτική σύγκριση των τριών θεωρητικών μοντέλων κρίνεται επιθυμητή. Συγκεκριμένα, τα διαγράμματα των συναρτήσεων πυκνότητας-πιθανότητας των θεωρητικών κατανομών, Johnson SB, Gen, Gamma (4P) και Error, απεικονίζονται στο Σχήμα 3.23, ενώ τα ποσοστιαία διαγράμματα (Quantile Plots) για τις αντίστοιχες βέλτιστες κατανομές απεικονίζονται στο Σχήμα 3.24.



Σχήμα 3.23: Διαγράμματα πυκνότητας πιθανότητας για τις βέλτιστες κατανομές Johnson SB, Gen, Gamma (4P) και Error, για τις μέγιστες θερμοκρασίες στο σταθμό-κόμβο της Λάρισας, κατά την περίοδο 1955-2003.



Σχήμα 3.24: Ποσοστιαία διαγράμματα για τις βέλτιστες κατανομές Johnson SB, Gen, Gamma (4P) και Error, για τις μέγιστες θερμοκρασίες στο σταθμό-κόμβο της Λάρισας, κατά την περίοδο 1955-2003.

Λαμβάνοντας υπόψιν τις τιμές των παραμέτρων του Πίνακα 3.24, οι οποίες προέκυψαν από την προσαρμογή των μοντέλων στις πραγματικές ακραίες τιμές, καθώς και τις σχέσεις των κατανομών από προηγούμενη παράγραφο, οι τελικές και πλήρεις μαθηματικές εκφράσεις της συνάρτησης πυκνότητας-πιθανότητας και της αθροιστικής συνάρτησης της βέλτιστης κατανομής Gen. Gamma (4P), παίρνουν τη μορφή:

$$f(x) = \frac{14.86(x-13.94)^{0.197}}{28.42^{1.197}\Gamma(0.0806)} \exp\left(-\left(\frac{(x-13.94)}{28.42}\right)^{14.86}\right),$$

και

$$F(x) = \frac{\Gamma((x-13.94)/28.42)^{14.86}(0.0806)}{\Gamma(0.0806)}.$$

Πίνακας 3.24: Οι υπολογισθείσες παράμετροι της βέλτιστης θεωρητικής κατανομής, για τις μέγιστες θερμοκρασίες στο σταθμό-κόμβο της Λάρισας, κατά την περίοδο 1955-2003.

Έλεγχος καλής προσαρμογής	Θεωρητική κατανομή	παράμετροι
Anderson- Darling	Gen. Gamma (4P)	k= 14.86, α= 0.0806, β= 28.42, γ= 13.94

3.1.7 Σταθμός – Κόμβος Θεσσαλονίκης

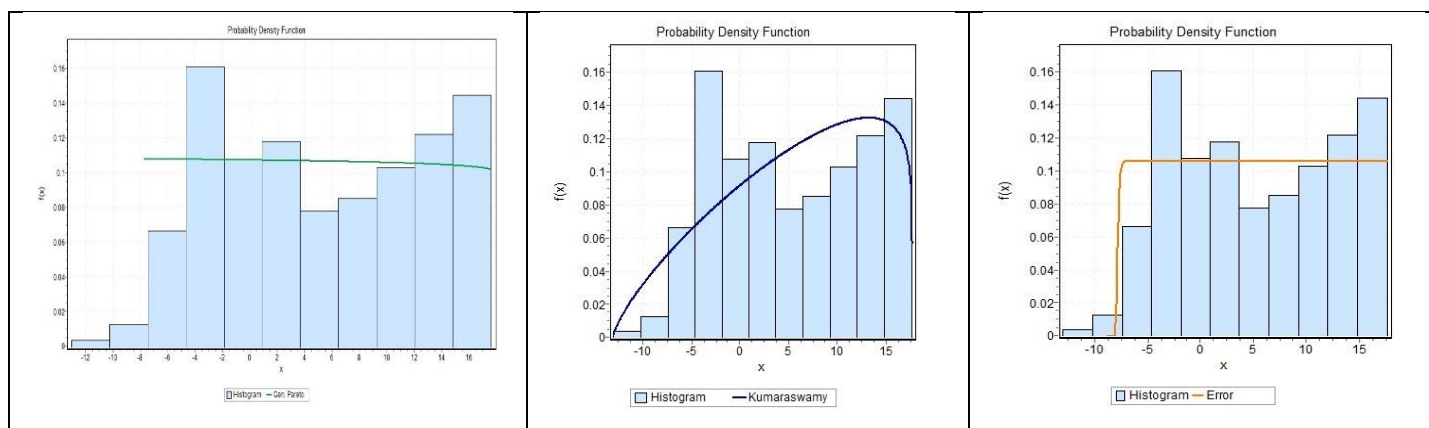
Οι ακραίες ελάχιστες θερμοκρασίες του σταθμού-κόμβου της Θεσσαλονίκης, κατά τους ελέγχους καλής προσαρμογής Kolmogorov-Smirnov, Anderson-Darling, Chi-Squared, φαίνεται να προσαρμόζονται καλύτερα στις θεωρητικές κατανομές: Gen. Pareto, Kumaraswamy και Error, αντίστοιχα. Η μικρότερη απόκλιση των τριών ανήκει στην Gen. Pareto, η οποία και θεωρείται βέλτιστη για τα μελετώμενα δεδομένα. Για τον K-S οι επόμενες στην κατάταξη κατανομές είναι η Johnson SB και η Error. Η Gen. Pareto για τον A-D καταλαμβάνει την 29^η θέση, ενώ για τον Χ², δεν παίρνει κάποια τιμή.

Πίνακας 3.25: Οι τρεις βέλτιστες θεωρητικές κατανομές και οι αντίστοιχες απόλυτες αποκλίσεις, όπως αυτές προέκυψαν από τους τρεις ελέγχους καλής προσαρμογής, για τις ελάχιστες θερμοκρασίες στο σταθμό-κόμβο της Θεσσαλονίκης, κατά την περίοδο 1955-2003.

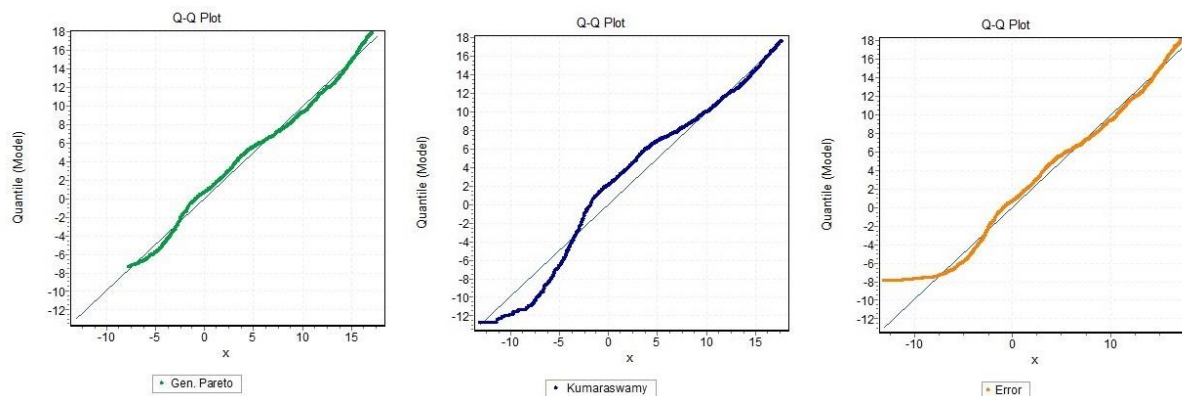
Έλεγχος καλής προσαρμογής	Θεωρητική κατανομή	Απόλυτη απόκλιση
Kolmogorov- Smirnov	Gen. Pareto	7.24
Anderson- Darling	Kumaraswamy	7.41
Chi- Squared	Error	7.60

Παράλληλα παρουσιάζονται και τα διαγράμματα πυκνότητας πιθανότητας (Σχήμα 3.25)

και τα ποσοστιαία διαγράμματα (Quantile Plots) (Σχήμα 3.26), της κάθε μίας, τα οποία όπως είναι φανερό, συμφωνούν με την επιλογή της Gen. Pareto ως πιο κατάλληλης για αυτά τα δεδομένα, αφού τα απεικονιζόμενα σημεία της τείνουν να τοποθετηθούν πολύ κοντά στη διαγώνιο της κατανομής.



Σχήμα 3.25: Διαγράμματα πυκνότητας πιθανότητας για τις βέλτιστες κατανομές Gen. Pareto, Kumaraswamy και Error, για τις ελάχιστες θερμοκρασίες στο σταθμό-κόμβο της Θεσσαλονίκης, κατά την περίοδο 1955-2003.



Σχήμα 3.26: Ποσοστιαία διαγράμματα για τις βέλτιστες κατανομές Gen. Pareto, Kumaraswamy και Error, για τις ελάχιστες θερμοκρασίες στο σταθμό-κόμβο της Θεσσαλονίκης, κατά την περίοδο 1955-2003.

Με βάση τις υπολογισθείσες τιμές των παραμέτρων της βέλτιστης κατανομής που απεικονίζονται στον Πίνακα 3.26, η συνάρτηση πυκνότητας – πιθανότητας ορίζεται ως:



$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{25.85} \left(1 - 0.983 \frac{(x + 7.712)}{25.85} \right)^{-1-1/-0.983}, & k \neq 0 \\ \frac{1}{25.85} \exp \left(-\frac{(x + 7.712)}{25.85} \right), & k = 0 \end{cases}$$

ενώ η συνάρτηση αθροιστικής κατανομής περιγράφεται από τη σχέση:

$$F(x) = \begin{cases} \exp(-(1 - 0.983z)^{-1/-0.983}), & k \neq 0 \\ \exp(-z - \exp(-z)), & k = 0 \end{cases}$$

Πίνακας 3.26: Οι υπολογισθείσες παράμετροι της βέλτιστης θεωρητικής κατανομής, για τις ελάχιστες θερμοκρασίες στο σταθμό-κόμβο της Θεσσαλονίκης, κατά την περίοδο 1955-2003.

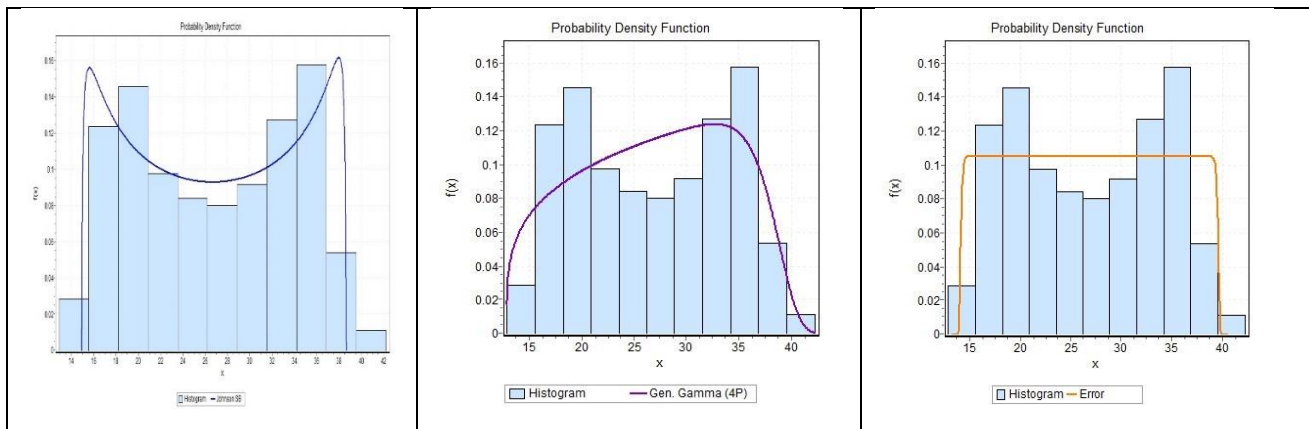
Έλεγχος καλής προσαρμογής	Θεωρητική κατανομή	παράμετροι
Kolmogorov- Smirnov	Gen. Pareto	k= -0.983, σ= 25.85, μ= -7.712

Οι τρεις κατανομές που επιλέχθηκαν με βάση τους ελέγχους καλής προσαρμογής με τις πραγματικές μέγιστες θερμοκρασίες της Θεσσαλονίκης σε ετήσια βάση και απεικονίζονται στον Πίνακα 3.27 είναι: Johnson SB, Gen. Gamma (4P) και Error. Εδώ ως βέλτιστη ενδείκνυται η Gen. Gamma (4P) με απόλυτη απόκλιση 25.33, έναντι της Johnson SB με απόλυτη απόκλιση 26.54 και της Error με απόλυτη απόκλιση 26.84. Ενδιαφέρον αποτελεί το γεγονός ότι η Johnson SB, η οποία βρίσκεται στην πρώτη θέση του ελέγχου K-S, βρίσκεται πολύ χαμηλά στην κατάταξη για τους άλλους δύο, και συγκεκριμένα για τον A-D στην 51^η θέση, ενώ για τον χ^2 δεν παίρνει καμία τιμή. Σε αντίθεση, οι άλλες δύο κατανομές βρίσκονται αρκετά ψηλά στους υπόλοιπους ελέγχους. Αναλυτικότερα, η Gen. Gamma (4P) καταλαμβάνει την 5^η και 2^η θέση και η Error τις θέσεις 3 και 5. Η μία κατανομή που δεν ταιριάζει απολύτως με τα δεδομένα μας, για κανέναν από τους τρεις ελέγχους, είναι η Johnson SU.

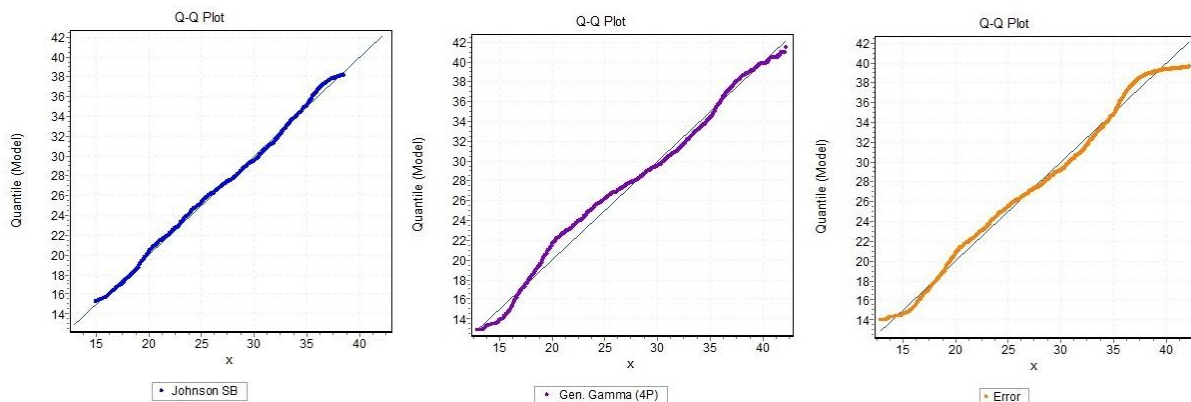
Πίνακας 3.27: Οι τρεις βέλτιστες θεωρητικές κατανομές και οι αντίστοιχες απόλυτες αποκλίσεις, όπως αυτές προέκυψαν από τους τρεις ελέγχους καλής προσαρμογής, για τις μέγιστες θερμοκρασίες στο σταθμό-κόμβο της Θεσσαλονίκης, κατά την περίοδο 1955-2003.

Έλεγχοι καλής προσαρμογής	Θεωρητική κατανομή	Απόλυτη απόκλιση
Kolmogorov- Smirnov	Johnson SB	26.54
Anderson- Darling	Gen. Gamma (4P)	25.33
Chi- Squared	Error	26.84

Παράλληλα παρουσιάζονται και τα διαγράμματα πυκνότητας πιθανότητας (Σχήμα 3.27) και τα ποσοστιαία διαγράμματα (Quantile Plots) (Σχήμα 3.28), της κάθε μίας.



Σχήμα 3.27: Διαγράμματα πυκνότητας πιθανότητας για τις βέλτιστες κατανομές Johnson SB, Gen. Gamma (4P) και Error, για τις ελάχιστες θερμοκρασίες στο σταθμό-κόμβο της Θεσσαλονίκης, κατά την περίοδο 1955-2003.



Σχήμα 3.28: Ποσοστιαία διαγράμματα για τις βέλτιστες κατανομές Johnson SB, Gen. Gamma (4P) και Error, για τις ελάχιστες θερμοκρασίες στο σταθμό-κόμβο της Θεσσαλονίκης, κατά την περίοδο 1955-2003.

Οι μαθηματικές εκφράσεις της Gen. Gamma (4P), σύμφωνα με τις παραμέτρους που απεικονίζονται στον Πίνακα 3.28, παίρνουν τη μορφή:

$$f(x) = \frac{14.72(x-12.88)^{0.265}}{26.04^{1.265}\Gamma(0.086)} \exp\left(-\left(\frac{(x-12.88)}{26.04}\right)^{14.72}\right),$$

$$F(x) = \frac{\Gamma((x-12.88)/26.04)^{14.72}(0.086)}{\Gamma(0.086)}.$$

Πίνακας 3.28: Οι υπολογισθείσες παράμετροι της βέλτιστης θεωρητικής κατανομής, για τις μέγιστες θερμοκρασίες στο σταθμό-κόμβο της Θεσσαλονίκης, κατά την περίοδο 1955-2003.

Έλεγχος καλής προσαρμογής	Θεωρητική κατανομή	παράμετροι
Anderson- Darling	Gen. Gamma	k= 14.72, α= 0.086, β= 26.04, γ= 12.88



3.2 Κατανομές των Ακραίων Θερμοκρασιών της Θεσσαλονίκης σε Εποχιακή Βάση

Η παρακάτω μελέτη έχει εκπονηθεί για όλους τους σταθμούς-κόμβους που έχουν ήδη αναφερθεί. Όμως έχει επιλεγεί για να παρουσιαστεί μόνο ο σταθμός-κόμβος της Θεσσαλονίκης για τις εποχιακές κατανομές των ακραίων θερμοκρασιών.

3.2.1 Ελάχιστες Θερμοκρασίες

Όπως έχει ήδη δειχθεί, Πίνακας 3.25, οι ακραίες ελάχιστες θερμοκρασίες για τον σταθμό-κόμβο της Θεσσαλονίκης, προσομοιάζουν και ακολουθούν καλύτερα την κατανομή Ge. Pareto, σύμφωνα με τον Kolmogorov-Smirnov έλεγχο καλής προσαρμογής. Όμως, με βάση τους άλλους δύο ελέγχους καλής προσαρμογής, δηλαδή του Anderson-Darling και Chi-Squared, οι κατανομές Kumaraswamy και Error, φαίνεται να προσαρμόζονται καλύτερα, αντίστοιχα.

Το εύλογο ερώτημα που πρέπει να απαντηθεί είναι, αν οι εποχιακές ακραίες ελάχιστες θερμοκρασίες ακολουθούν παρόμοια συμπεριφορά. Για το λόγο αυτό ερευνήθηκαν διεξοδικά οι βέλτιστες κατανομές των ελαχίστων θερμοκρασιών του σταθμού-κόμβου της Θεσσαλονίκης σε εποχιακή βάση.

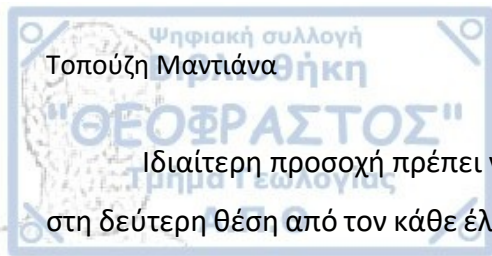
Στην παρακάτω εποχιακή ανάλυση και συγκεκριμένα στον γενικό Πίνακα 3.29, παρουσιάζονται οι τρεις συνεχείς θεωρητικές κατανομές, που κρίθηκαν και αποδείχθηκαν οι καταλληλότερες, σύμφωνα με τα αποτελέσματα των Kolmogorov-Smirnov, Anderson-Darling και Chi-Squared ελέγχων καλής προσαρμογής των θεωρητικών αυτών μοντέλων για τις πραγματικές ελάχιστες θερμοκρασίες, όπως αυτές παρατηρήθηκαν για κάθε μία από τις τέσσερις εποχές στο σταθμό-κόμβο της Θεσσαλονίκης, κατά την περίοδο 1955 – 2003.

Πίνακας 3.29 Παρουσίαση των θεωρητικών κατανομών που προσεγγίζουν καλύτερα τα δεδομένα των ακραίων ελαχίστων θερμοκρασιών στο σταθμό-κόμβο της Θεσσαλονίκης, εποχιακά, και οι αντίστοιχες απόλυτες αποκλίσεις τους, σύμφωνα με τους τρεις ελέγχους καλής προσαρμογής: Kolmogorov-Smirnov, Anderson-Darling και Chi-Squared.

	<u>Χειμώνας</u>	<u>Άνοιξη</u>	<u>Καλοκαίρι</u>	<u>Φθινόπωρο</u>
Kolmogorov-Smirnov	Johnson SB	Error	Gen. Extreme Value	Error
Απόλυτη απόκλιση	4.36	4.84	13.89	6.46
Anderson-Darling	Johnson SB	Error	Pert	Error
Απόλυτη απόκλιση	4.36	4.84	14.26	6.46
Chi-Squared	Gumbel Min	Frechet (3P)	Kumaraswamy	Error
Απόλυτη απόκλιση	3.48	4.31	14.40	6.46
<u>Βέλτιστη κατανομή</u>	<i>Gumbel Min</i>	<i>Frechet (3P)</i>	<i>Gen. Extreme Value</i>	<i>Error</i>

α) Χειμώνας

Όπως προκύπτει από τα αποτελέσματα των μη παραμετρικών ελέγχων K-S και A-D, το θεωρητικό μοντέλο Johnson SB τοποθετείται στην πρώτη θέση της χειμερινής κατάταξης, ενώ σύμφωνα με τον χ^2 έλεγχο η κατανομή που προσεγγίζει καλύτερα τις ελάχιστες τιμές στην υπό μελέτη περιοχή είναι η Gumbel Min. Με άλλα λόγια, η πρώτη θέση της χειμερινής κατάταξης καταλαμβάνεται από τις θεωρητικές κατανομές Johnson SB και Gumbel Min για τους προαναφερθέντες αντίστοιχα ελέγχους, σε αντίθεση με τις ετήσιες τιμές ελάχιστης θερμοκρασίας, στις οποίες οι αντίστοιχοι έλεγχοι είχαν υποδείξει τις: Gen. Pareto, Kumaraswamy και Error. Ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζει το θεωρητικό μοντέλο Johnson SB, καθώς, πέραν της πρώτης θέσης στην οποία συναντάται τόσο για τον Kolmogorov-Smirnov, όσο και για τον Anderson-Darling έλεγχο, τοποθετείται στην πέμπτη θέση σύμφωνα με το Chi-Squared τεστ. Επιπροσθέτως, αξίζει να σημειωθεί, ότι το θεωρητικό μοντέλο Gumbel Min, προσεγγίζει και αυτό με τη σειρά του πολύ ικανοποιητικά τις χειμερινές ακραίες ελάχιστες θερμοκρασίες, καθώς σύμφωνα με τους αναλυτικούς ελέγχους Kolmogorov-Smirnov και Anderson-Darling κατατάσσεται στην 3^η θέση.



Τοπούζη Μαντιάνα

Ιδιαίτερη προσοχή πρέπει να δοθεί και στα θεωρητικά μοντέλα, τα οποία κατατάχθηκαν στη δεύτερη θέση από τον κάθε έλεγχο καλής προσαρμογής, καθώς τα μοντέλα αυτά αποτελούν με τη σειρά τους μερικές από τις καλύτερες επιλογές προσέγγισης των πραγματικών καταγραφών των ελάχιστων θερμοκρασιών στη Θεσσαλονίκη, μέσα από ένα σύνολο 61 συνεχών θεωρητικών κατανομών. Συγκεκριμένα, ενδιαφέρει παρουσιάζει το γεγονός ότι οι έλεγχοι K-S και A-D συμφωνούν και για τη δεύτερη θέση της κατάταξής τους βάζοντας την κατανομή Beta ως δεύτερη καταλληλότερη, ενώ ο έλεγχος χ^2 τοποθετεί το μοντέλο Kumaraswamy στην ανάλογη θέση. Προχωρώντας στις επόμενες θέσεις της κατάταξης των K-S και A-D, διαπιστώνεται, και αξίζει να σημειωθεί, ότι ένα μεγάλο πλήθος κατανομών κατέχει ακριβώς την ίδια θέση και στους δύο ελέγχους. Πιο συγκεκριμένα, όπως αναφέρθηκε και προηγουμένως, στην 3^η θέση τοποθετείται η Gumbel Min, την 4^η θέση καταλαμβάνει η Weibull (3P), ακολουθεί η Kumaraswamy στην 5^η θέση, έπειτα για την 6^η θέση οι δύο έλεγχοι δεν συμφωνούν, αφού ο πρώτος βάζει την Gen. Extreme Value, ενώ ο δεύτερος την Gen. Gamma (4P), αλλά για την 7^η θέση συγκλίνουν πάλι στην Log- Logistic (3P). Έπειτα από αυτές, δείχνουν να συμφωνούν και σε πολλές ακόμη, και ακόμη και στις περιπτώσεις που δεν ταυτίζονται απόλυτα οι θέσεις των κατανομών στους δύο ελέγχους, η διαφορές τους είναι πολύ μικρές.

Ωστόσο, ο απώτερος σκοπός της μελέτης αυτής έγκειται στην επιλογή ενός θεωρητικού μοντέλου, που θα περιγράφει στο βέλτιστο δυνατό βαθμό τις ακραίες ελάχιστες χειμερινές θερμοκρασίες της Θεσσαλονίκης κατά τη μελετώμενη περίοδο. Η επίτευξη του στόχου πραγματοποιείται με τον υπολογισμό της απόλυτης απόκλισης μεταξύ των πραγματικών και των εκτιμώμενων τιμών καθενός από τα δύο μοντέλα του Πίνακα 3.29. Έτσι, όπως είναι φανερό, ανάμεσα στις Johnson SB και Gumbel Min κατανομές, η μικρότερη απόκλιση παρουσιάζεται στην δεύτερη και κατά συνέπεια η Gumbel Min θεωρείται η βέλτιστη εκ των δύο.

β) Άνοιξη

Για τις ακραίες ελάχιστες θερμοκρασίες που σημειώθηκαν κατά την εαρινή περίοδο στη Θεσσαλονίκη, και σύμφωνα με τον Πίνακα 3.29, διαπιστώνεται ότι η θεωρητική κατανομή Error αποτελεί το ιδανικότερο μοντέλο προσομοίωσης των τιμών, με βάση τα αποτελέσματα των

ελέγχων K-S και A-D. Όσον αφορά τον χ^2 , την πρώτη θέση καταλαμβάνει η Frechet (3P). Ιδιαίτερου ενδιαφέροντος, ωστόσο, χρήζει η θέση των προαναφερθέντων βέλτιστων μοντέλων στην εαρινή κατάταξη των υπόλοιπων ελέγχων καλής προσαρμογής. Ειδικότερα, αξιοσημείωτη φαίνεται να είναι η θέση στην οποία τοποθετείται η θεωρητική κατανομή Error για τον Chi-Squared μη παραμετρικό έλεγχο, καθώς απαντάται στα τρία αντιπροσωπευτικότερα μοντέλα, πράγμα που σημαίνει ότι αδιαμφισβήτητα η κατανομή αυτή αποτελεί μια πολύ καλή επιλογή. Εντούτοις, αξίζει να αναφερθεί ότι το Frechet (3P) μοντέλο, που αποτελεί την ιδανικότερη επιλογή για τον χ^2 , για τους άλλους δύο ελέγχους δεν βρίσκεται σε υψηλή θέση κατάταξης, αλλά καταλαμβάνει τις θέσεις 20 και 21. Οι Kolmogorov-Smirnov και Anderson-Darling συμφωνούν και στην επιλογή της Johnson SB ως δεύτερη αντιπροσωπευτικότερη κατανομή, ενώ ο Chi-Squared σε αυτή τη θέση κατατάσσει την Chi-Squared (2P) (βλέπε Παράρτημα).

Από την άλλη μεριά, οι τρεις μη παραμετρικοί έλεγχοι που χρησιμοποιήθηκαν στην παρούσα διατριβή, συγκλίνουν στο γεγονός ότι είκοσι-πέντε (25) από τις εξήντα-μία (61) θεωρητικές κατανομές δεν εμφάνισαν καμία προσαρμογή στις ακραίες ελάχιστες θερμοκρασίες της εποχής της άνοιξης για τη Θεσσαλονίκη.

Η επιλογή, του θεωρητικού μοντέλου που προσομοιώνει καλύτερα τις τιμές των ελαχίστων ακραίων θερμοκρασιών στη Θεσσαλονίκη για τη χρονική περίοδο 1955-2003 την άνοιξη, επιτυγχάνεται με τη χρήση των τιμών των παραμέτρων των κατανομών Error και Frechet (3P), διαδικασία που ακολουθήθηκε και σε προηγούμενες παραγράφους για την επιλογή του μοντέλου με τη βέλτιστη προσαρμογή. Όπως προκύπτει από τον Πίνακα 3.29, η απόλυτη απόκλιση που σημειώνεται μεταξύ των πραγματικών και υπολογισμένων θερμοκρασιών της Error κατανομής ανέρχεται στις 4.84 μονάδες, ενώ για την Frechet (3P) στις 4.31 μονάδες. Επομένως, με ελάχιστη διαφορά ανάμεσα στα δύο μοντέλα, το μοντέλο Frechet (3P) είναι αυτό που αναγνωρίζεται ως το βέλτιστο εργαλείο πρόβλεψης των ακραίων ελαχίστων θερμοκρασιών που καταγράφηκαν στη μελετώμενη περιοχή και περίοδο, την άνοιξη.



Σύμφωνα με τους Kolmogorov-Smirnov, Anderson-Darling και Chi-Squared ελέγχους καλής προσαρμογής των εξήντα-ένα συνεχών θεωρητικών κατανομών στις θερινές ακραίες ελάχιστες θερμοκρασίες που σημειώθηκαν στη Θεσσαλονίκη τη χρονική περίοδο 1955 – 2003, τα ιδανικότερα μοντέλα προσομοίωσης αποτελούν οι Gen. Extreme Value, Pert και Kumaraswamy αντίστοιχα (Πίνακας 3.29). Αξιοσημείωτο είναι το γεγονός ότι και οι τρεις αυτές κατανομές αποτελούν ιδιαίτερα καλές επιλογές για όλους τους ελέγχους. Αναλυτικότερα, η Gen. Extreme Value, η οποία καταλαμβάνει την πρώτη θέση στην κατάταξη του ελέγχου Kolmogorov-Smirnov, βρίσκεται μέσα στην καταλληλότερη πεντάδα και για τους άλλους δύο ελέγχους καλής προσαρμογής (θέσεις 5 και 4 αντίστοιχα). Σχεδόν το ίδιο ισχύει και για την Pert, όπου δεν βρίσκεται στην πρώτη πεντάδα, αλλά στην πρώτη εξάδα των άλλων δύο ελέγχων, αφού για τον K-S καταλαμβάνει την 4^η θέση, ενώ για τον χ^2 την 6^η. Αλλά και η Kumaraswamy, που αποτελεί την πρώτη επιλογή του Chi-Squared, αποτελεί, επίσης, μία από τις πρώτες επιλογές και των άλλων δύο ελέγχων, αφού από τον K-S τοποθετείται στην 5^η θέση και από τον A-D στην 3^η (βλέπε Παράστημα).

Την υπόλοιπη πεντάδα για τον κάθε έλεγχο συμπληρώνουν οι Johnson SB και Beta στις θέσεις 2 και 3 αντίστοιχα για τον K-S, και στις θέσεις 2 και 4 για τον A-D, ενώ ο χ^2 τοποθετεί τις Johnson SB, Log-Pearson 3 και Burr (4P) στη 2^η, 3^η και 4^η θέση. Όσον αφορά στις κατανομές που παρουσιάζουν τις χειρότερες προσαρμογές στο δείγμα που μελετάται, οι τρεις έλεγχοι καλής προσαρμογής συγκλίνουν στις θεωρητικές κατανομές Levy, Student's t και Error Function, ενώ κανένας από τους τρεις δεν δύναται να εφαρμοστεί στο μοντέλο Johnson SU.

Από το σύνολο των εξήντα-ένα (61) θεωρητικών μοντέλων που υιοθετήθηκαν στην παρούσα διατριβή, η προσοχή επικεντρώνεται στις τρεις θεωρητικές κατανομές που καταλαμβάνουν τις καλύτερες θέσεις σύμφωνα με τους τρεις αναλυτικούς ελέγχους καλής προσαρμογής. Η απόλυτη απόκλιση που σημειώνεται μεταξύ των πραγματικών και θεωρητικών τιμών θερμοκρασίας της θεωρητικής κατανομής Gen. Extreme Value είναι μικρότερη από αυτές των Pert και Kumaraswamy, όπως φαίνεται στον Πίνακα 3.29. Η διαφορά αυτή, που διακρίνεται μεταξύ των αποκλίσεων των τριών θεωρητικών κατανομών, καθιστά την Gen. Extreme Value ως

την ικανότερη να προσομοιώσει τις ακραίες ελάχιστες θερμοκρασίες της μελετώμενης περιοχής και περιόδου.

δ) Φθινόπωρο

Για την εποχή του φθινοπώρου και τις ελάχιστες τιμές θερμοκρασιών που σημειώθηκαν στην Θεσσαλονίκη κατά την περίοδο 1955-2003 οι τρεις έλεγχοι καλής προσαρμογής, ομόφωνα, για πρώτη φορά στην παρούσα εργασία, συγκλίνουν στην επιλογή της κατανομής Error, ως καταλληλότερης, σύμφωνα με τα αποτελέσματα που παρουσιάζονται στον Πίνακα 3.29. Γεγονός που αδιαμφισβήτητα την καθιστά βέλτιστη για το συγκεκριμένο δείγμα. Αξίζει να αναφερθούν και κάποιες ακόμα θεωρητικές κατανομές που βρέθηκαν ψηλά στην κατάταξη των τριών αυτών ελέγχων. Η Beta είναι μία από αυτές, και καταλαμβάνει την 5^η, 2^η και 4^η θέση για τους τρεις ελέγχους αντίστοιχα, σύμφωνα με τη σειρά που παρουσιάζονται στον Πίνακα 33. Επιπλέον, η Kumaraswamy βρίσκεται στην 6^η θέση για τον Kolmogorov-Smirnov και στη 3^η θέση για τους άλλους δύο ελέγχους. Ενδιαφέρον αποτελεί το γεγονός ότι ενώ για τα περισσότερα μοντέλα οι θέσεις κατάταξης για τους τρεις ελέγχους φαίνεται να είναι παρόμοιες, δεν ισχύει το ίδιο για την κατανομή Uniform, η οποία για τον έλεγχο K-S βρίσκεται στην 4^η θέση, για τον A-D τοποθετείται στη θέση 30, ενώ για τον χ^2 δεν λαμβάνει καμία τιμή. Από τα εξήντα-ένα θεωρητικά μοντέλα, οι τρεις έλεγχοι συμφωνούν ότι τα είκοσι-πέντε από αυτά δεν δύνανται να περιγράψουν τις ακραίες ελάχιστες θερμοκρασίες της υπό μελέτη περιοχής και χρονικής περιόδου.

Εν κατακλείδι, συνοψίζοντας τα παραπάνω αποτελέσματα, η θεωρητική κατανομή Gumbel Min αποτελεί το αντιπροσωπευτικότερο μοντέλο εκτίμησης των ακραίων ελαχίστων θερμοκρασιών για την εποχή του χειμώνα, η Frechet (3P) για την περίοδο της άνοιξης, η Gen. Extreme Value για τη θερινή περίοδο της μελέτης μας και η Error αποτελεί τη βέλτιστη κατανομή για τις τιμές του φθινοπώρου στην περιοχή της Θεσσαλονίκης την χρονική περίοδο 1955-2003.

Όπως έχει ήδη δειχθεί, Πίνακας 3.27, οι ακραίες μέγιστες θερμοκρασίες για τον σταθμό-κόμβο της Θεσσαλονίκης, προσομοιάζουν και ακολουθούν καλύτερα την κατανομή Gen. Gamma (4P), σύμφωνα με τον Anderson-Darling έλεγχο καλής προσαρμογής. Όμως, με βάση τους άλλους δύο ελέγχους καλής προσαρμογής, δηλαδή του Kolmogorov-Smirnov και Chi-Squared, οι κατανομές Johnson SB και Error, φαίνεται να προσαρμόζονται καλύτερα, αντίστοιχα.

Το εύλογο ερώτημα που πρέπει να απαντηθεί είναι, αν οι εποχιακές ακραίες μέγιστες θερμοκρασίες ακολουθούν παρόμοια συμπεριφορά. Για το λόγο αυτό ερευνήθηκαν διεξοδικά οι βέλτιστες κατανομές των ελαχίστων θερμοκρασιών του σταθμού-κόμβου της Θεσσαλονίκης σε εποχιακή βάση.

Στην παρακάτω εποχιακή ανάλυση και συγκεκριμένα στον γενικό Πίνακα 3.30, παρουσιάζονται οι τρεις συνεχείς θεωρητικές κατανομές, που κρίθηκαν και αποδείχθηκαν οι καταλληλότερες, σύμφωνα με τα αποτελέσματα των Kolmogorov-Smirnov, Anderson-Darling και Chi-Squared ελέγχων καλής προσαρμογής των θεωρητικών αυτών μοντέλων για τις πραγματικές ελάχιστες θερμοκρασίες, όπως αυτές παρατηρήθηκαν για κάθε μία από τις τέσσερις εποχές στο σταθμό-κόμβο της Θεσσαλονίκης, κατά την περίοδο 1955 – 2003.

Πίνακας 3.30 Παρουσίαση των θεωρητικών κατανομών που προσεγγίζουν καλύτερα τα δεδομένα των ακραίων μεγίστων θερμοκρασιών της Θεσσαλονίκης εποχιακά και οι αντίστοιχες απόλυτες αποκλίσεις τους, σύμφωνα με τους τρεις ελέγχους καλής προσαρμογής.

	<u>Χειμώνας</u>	<u>Άνοιξη</u>	<u>Καλοκαίρι</u>	<u>Φθινόπωρο</u>
Kolmogorov-Smirnov	Pearson 5	Beta	Log- Logistic	Johnson SB
Απόλυτη απόκλιση	16.76	25.09	34.65	27.47
Anderson-Darling	Gen. Extreme Value	Beta	Burr	Dagum
Απόλυτη απόκλιση	16.29	25.09	35.25	25.18
Chi- Squared	Log-Gamma	Kumaraswamy	Burr	Dagum
Απόλυτη απόκλιση	40.99	25.01	35.25	25.18
<u>Βέλτιστη κατανομή</u>	Gen. Extreme Value	Kumaraswamy	Log- Logistic	Dagum

Στον Πίνακα 3.30 παρουσιάζονται οι τρεις συνεχείς θεωρητικές κατανομές, που κρίθηκαν καταλληλότερες, σύμφωνα με τα αποτελέσματα των Kolmogorov- Smirnov, Anderson- Darling και Chi- Squared ελέγχων καλής προσαρμογής, εκ των εξήντα-ένα (61) συνολικά θεωρητικών μοντέλων, για τις πραγματικές μέγιστες θερμοκρασίες που παρατηρήθηκαν για κάθε μία από τις τέσσερις εποχές στη Θεσσαλονίκη την περίοδο 1955 – 2003.

α) Χειμώνας

Σύμφωνα με τους Kolmogorov-Smirnov, Anderson-Darling και Chi-Squared ελέγχους καλής προσαρμογής των εξήντα-ένα συνεχών θεωρητικών κατανομών στις χειμερινές ακραίες ελάχιστες θερμοκρασίες που σημειώθηκαν στη Θεσσαλονίκη τη χρονική περίοδο 1955 – 2003, τα ιδανικότερα μοντέλα προσομοίωσης αποτελούν οι Pearson 5, Gen. Extreme Value και Log-Gamma αντίστοιχα. Ιδιαίτερου ενδιαφέροντος, ωστόσο, χρήζει η θέση των προαναφερθέντων βέλτιστων μοντέλων στην χειμερινή κατάταξη των υπόλοιπων ελέγχων καλής προσαρμογής. Αναλυτικότερα, το μοντέλο Pearson 5 που βρίσκεται στην πρώτη θέση του ελέγχου Kolmogorov-Smirnov, για τον έλεγχο Chi-Squared βρίσκεται, επίσης, σε πολύ υψηλή θέση και συγκεκριμένα στη δεύτερη. Με τους δύο αυτούς ελέγχους, όμως, δεν φαίνεται να συμφωνεί ο τρίτος, ο οποίος κατατάσσει την κατανομή Pearson 5 λίγο πιο χαμηλά, στην 16^η θέση. Για την Gen. Extreme Value υπάρχει μικρότερη διαφορά θέσεων, αφού καταλαμβάνει την 4^η στον έλεγχο Kolmogorov-Smirnov και την 11^η στον Chi-Squared. Ενώ παρόμοιο μοτίβο με την Pearson 5, σε σχέση με τη θέση της στους άλλους ελέγχους, ακολουθεί και η Log-Gamma, η οποία είναι τοποθετημένη στη 2^η υψηλότερη θέση για τον Kolmogorov-Smirnov αλλά στη 14^η για τον Anderson-Darling. Όσον αφορά στις κατανομές που παρουσιάζουν τις χειρότερες προσαρμογές στο δείγμα που μελετάται, οι τρεις έλεγχοι καλής προσαρμογής συγκλίνουν στις θεωρητικές κατανομές Levy, Student's t και Error Function, ενώ κανένας από τους τρεις δεν δύναται να εφαρμοστεί στο μοντέλο Johnson SU (βλ. Παράρτημα).

Ωστόσο, ο απώτερος σκοπός της μελέτης αυτής έγκειται στην επιλογή ενός θεωρητικού μοντέλου, που θα περιγράφει στο βέλτιστο δυνατό βαθμό τις ακραίες μέγιστες χειμερινές θερμοκρασίες της Θεσσαλονίκης κατά τη μελετώμενη περίοδο. Η επίτευξη του στόχου

πραγματοποιείται με τον υπολογισμό της απόλυτης απόκλισης μεταξύ των πραγματικών και των εκτιμώμενων τιμών, καθενός από τα τρία μοντέλα του Πίνακα 3.30 της στήλης του «χειμώνα».

Έτσι, όπως είναι φανερό, ανάμεσα στις Pearson 5, Gen. Extreme Value και Log-Gamma κατανομές, η μικρότερη απόκλιση παρουσιάζεται στην δεύτερη και κατά συνέπεια η Gen. Extreme Value θεωρείται η βέλτιστη εκ των τριών.

β) Άνοιξη

Για τις ακραίες μέγιστες θερμοκρασίες που σημειώθηκαν κατά την εαρινή περίοδο στη Θεσσαλονίκη, η θεωρητική κατανομή Beta αποτελεί το ιδανικότερο μοντέλο προσομοίωσης των τιμών σύμφωνα με τα αποτελέσματα των ελέγχων K-S και A-D (Πίνακας 3.30). Όσον αφορά τον χ^2 , την πρώτη θέση καταλαμβάνει η Kumaraswamy. Ιδιαίτερου ενδιαφέροντος, ωστόσο, χρήζει η θέση των προαναφερθέντων βέλτιστων μοντέλων στην εαρινή κατάταξη των υπόλοιπων ελέγχων καλής προσαρμογής. Ειδικότερα, αξιοσημείωτη φαίνεται να είναι η θέση στην οποία τοποθετείται η θεωρητική κατανομή Beta για τον Chi-Squared μη παραμετρικό έλεγχο, καθώς απαντάται στα τρία πρώτα αντιπροσωπευτικότερα μοντέλα, πράγμα που σημαίνει ότι αδιαμφισβήτητα η κατανομή αυτή αποτελεί μια πολύ καλή επιλογή. Επιπροσθέτως, αξίζει να αναφερθεί ότι και η Kumaraswamy είναι μια από τις καταλληλότερες κατανομές για το δείγμα μας, εφόσον πέρα του ότι καταλαμβάνει την πρώτη θέση για τον χ^2 έλεγχο, τοποθετείται στη 2^η θέση από τους δύο άλλους. . Όσον αφορά στις κατανομές που παρουσιάζουν τις χειρότερες προσαρμογές στο δείγμα που μελετάται, οι τρεις έλεγχοι καλής προσαρμογής συγκλίνουν στις θεωρητικές κατανομές Rice, Student's t και Error Function, ενώ κανένας από τους τρεις δεν δύναται να εφαρμοστεί στο μοντέλο Johnson SU (βλέπε Παράρτημα).

Η επιλογή, του θεωρητικού μοντέλου που προσομοιώνει καλύτερα τις τιμές των μεγίστων ακραίων θερμοκρασιών στη Θεσσαλονίκη για τη χρονική περίοδο 1955-2003 την άνοιξη, επιτυγχάνεται με τη χρήση των τιμών των παραμέτρων των κατανομών Beta και Kumaraswamy, διαδικασία που ακολουθήθηκε και σε προηγούμενες παραγράφους για την επιλογή του μοντέλου με τη βέλτιστη προσαρμογή. Όπως προκύπτει από τον Πίνακα 3.30, η απόλυτη απόκλιση που σημειώνεται μεταξύ των πραγματικών και υπολογισμένων

Θερμοκρασιών της Beta κατανομής ανέρχεται στις 25.09 μονάδες, ενώ για την Kumaraswamy στις 25.01 μονάδες. Η διαφορά ανάμεσα στις δύο αυτές τιμές είναι ιδιαίτερα μικρή, και λαμβάνοντας υπόψη και την παραπάνω παράγραφο, όπου αναφέρεται ότι και τα δύο μοντέλα καταλαμβάνουν πολύ υψηλές θέσεις στην κατάταξη όλων των ελέγχων, μπορούμε να συμπεράνουμε ότι οι δύο αυτές κατανομές τείνουν να προσομοιώσουν στον ίδιο βαθμό τα δεδομένα των θερμοκρασιών που ερευνώνται, ωστόσο, με ελάχιστη διαφορά ανάμεσα στα δύο μοντέλα, το μοντέλο Kumaraswamy είναι αυτό που αναγνωρίζεται ως το βέλτιστο εργαλείο πρόβλεψης των ακραίων ελαχίστων θερμοκρασιών που καταγράφηκαν στη μελετώμενη περιοχή και περίοδο, την άνοιξη.

γ) Καλοκαίρι

Όπως προκύπτει από τα αποτελέσματα των μη παραμετρικών ελέγχων X^2 και A-D, που παρουσιάζονται στον Πίνακα 3.30, το θεωρητικό μοντέλο Burr τοποθετείται στην πρώτη θέση της θερινής κατάταξης, ενώ σύμφωνα με τον K-S έλεγχο η κατανομή που προσεγγίζει καλύτερα τις ελάχιστες τιμές στην υπό μελέτη περιοχή είναι η Log- Logistic στην πρώτη θέση και η Burr στη 2^η, πράγμα που σημαίνει ότι αδιαμφισβήτητα η κατανομή αυτή αποτελεί μια πολύ καλή επιλογή. Όσον αφορά τους άλλους δύο ελέγχους, στη 2^η θέση τοποθετούν από κοινού την Log- Logistic (3P), ενώ την Log- Logistic την κατατάσσουν στην τέταρτη. Την 3^η θέση στην κατάταξη και των δύο αυτών ελέγχων, που δείχνουν να συγκλίνουν ιδιαίτερα οι επιλογές τους, καταλαμβάνει η Burr (4P) (βλέπε Παράρτημα).

Από το σύνολο των εξήντα-ένα (61) θεωρητικών μοντέλων που υιοθετήθηκαν στην παρούσα διατριβή, η προσοχή επικεντρώνεται στις δύο θεωρητικές κατανομές που καταλαμβάνουν τις καλύτερες θέσεις σύμφωνα με τους τρεις αναλυτικούς ελέγχους καλής προσαρμογής. Η απόλυτη απόκλιση που σημειώνεται μεταξύ των πραγματικών και θεωρητικών τιμών θερμοκρασίας της θεωρητικής κατανομής Log- Logistic είναι μικρότερη από αυτήν της Burr. Η διαφορά αυτή που διακρίνεται μεταξύ των αποκλίσεων των δύο θεωρητικών κατανομών καθιστά την Log- Logistic ως την ικανότερη να προσομοιώσει τις ακραίες μέγιστες θερμοκρασίες της μελετώμενης περιοχής και περιόδου.

Παρατηρώντας τα αποτελέσματα του Πίνακα 3.30, η θεωρητική κατανομή Johnson SB φαίνεται να καταλαμβάνει την πρώτη θέση στη φθινοπωρινή κατάταξη, σύμφωνα με τον Kolmogorov-Smirnov έλεγχο καλής προσαρμογής. Από την άλλη πλευρά, η Dagum κατανομή προτείνεται ως η βέλτιστη επιλογή σύμφωνα με τα αποτελέσματα των ελέγχων καλής προσαρμογής Anderson-Darling και Chi-Squared. Αξιοπρόσεκτη είναι, ωστόσο, και η θέση που καταλαμβάνουν οι προαναφερθείσες βέλτιστες κατανομές στην κατάταξη των υπολοίπων ελέγχων καλής προσαρμογής. Ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζει η θέση της Johnson SB στους άλλους ελέγχους, αφού για τον A-D τοποθετείται στη θέση 40, ενώ για τον χ^2 δεν λαμβάνει καμία τιμή. Αντίθετα, η Dagum αναγνωρίζεται ως πολύ αντιπροσωπευτική από όλους τους ελέγχους, αφού, εκτός από την πρώτη θέση που βρίσκεται στην κατάταξη των ελέγχων Anderson-Darling και Chi-Squared, για τον K-S έλεγχο καταλαμβάνει την 4^η θέση. Αξιοπρόσεκτο, επίσης, είναι το γεγονός ότι, ανάλογα με την Johnson SB, έτσι και η Gen. Pareto κατανομή, ενώ βρίσκεται στη 2^η θέση του K-S ελέγχου, για τον A-D τοποθετείται στη θέση 50, ενώ για τον χ^2 δεν λαμβάνει καμία τιμή. Τη 2^η θέση για τον A-D καλύπτει η θεωρητική κατανομή Kumaraswamy και για τον χ^2 το θεωρητικό μοντέλο Gumbel Min. Όσον αφορά στις κατανομές που παρουσιάζουν τις χειρότερες προσαρμογές στο δείγμα που μελετάται, οι τρεις έλεγχοι καλής προσαρμογής συγκλίνουν στις θεωρητικές κατανομές Levy, Student's t και Error Function, ενώ κανένας από τους τρεις δεν δύναται να εφαρμοστεί στο μοντέλο Johnson SU.

Όπως φαίνεται από την τελευταία στήλη του Πίνακα 3.30, η απόλυτη απόκλιση που σημειώνεται μεταξύ των πραγματικών και εκτιμώμενων τιμών του μοντέλου Johnson SB αγγίζει τις 27.47 μονάδες. Αντίθετα, η απόλυτη απόκλιση μεταξύ των πραγματικών και υπολογισμένων τιμών των φθινοπωρινών μέγιστων θερμοκρασιών της θεωρητικής κατανομής Dagum, προσεγγίζει τις 25.18 μονάδες. Επομένως, με τη διαφορά της τάξεως των 2.29 μονάδων, η Dagum αναγνωρίζεται ως το βέλτιστο μοντέλο εκτίμησης των ακραίων μέγιστων θερμοκρασιών στη Θεσσαλονίκη τη φθινοπωρινή περίοδο.

3.3 Εκτιμώμενες ακραίες θερμοκρασίες

Γενικά, η παραγωγή εκτιμώμενων ακραίων θερμοκρασιών για διάφορες περιόδους επανάληψης είναι υψίστης σημασίας και ανεκτίμητου ενδιαφέροντος. Στην παρούσα μελέτη, λόγω του μεγάλου μεγέθους του δικτύου, δεν έγιναν εκτιμήσεις για όλες τις πόλεις, αλλά για δύο από αυτές: Θεσσαλονίκη, Λάρισα. Οι εκτιμήσεις έγιναν τόσο για τις ελάχιστες θερμοκρασίες, όσο και για τις μέγιστες θερμοκρασίες. Χρησιμοποιήθηκαν οι θεωρητικές κατανομές που σε κάθε περίπτωση αποτελούν το βέλτιστο μοντέλο προσομοίωσης των ετήσιων ακραίων θερμοκρασιών, για την παραγωγή των εκτιμώμενων ακραίων θερμοκρασιών σε ετήσια βάση για τις εξής προκαθορισμένες περιόδους επανάληψης: 2, 5, 10, 20, 50, 100 και 200 έτη. Επιπλέον, παρουσιάζονται οι περίοδοι επιστροφής επτά μεγίστων και ελαχίστων καταγραφών ακραίων θερμοκρασιών που σημειώθηκαν στους δύο αυτούς σταθμούς-κόμβους για τη μελετώμενη χρονική περίοδο.

Για τον προσδιορισμό των εκτιμήσεων αυτών, οι ακραίες ελάχιστες (μέγιστες) τιμές των δύο σταθμών-κόμβων τοποθετηθήκαν σε φθίνουσα (αύξουσα) σειρά και επιλέχθηκαν οι εκατό (100) τελευταίες (οι εκατό (100) πρώτες) τιμές των κατατάξεων, ώστε να υπολογιστούν οι περίοδοι επιστροφής τους. Από αυτές τις εκατό τιμές, στην παρούσα εργασία, θεωρήθηκε προτιμότερο να παρουσιαστούν στους παρακάτω πίνακες οι επτά (7) ακραίες τιμές, που εμφανίζουν το μεγαλύτερο ενδιαφέρον. Παρακάτω παρουσιάζονται αυτές των σταθμών-κόμβων της Θεσσαλονίκης και της Λάρισας, για τις ελάχιστες και μέγιστες ακραίες θερμοκρασίες.

3.3.1 Θεσσαλονίκη

Ακραίες ελάχιστες θερμοκρασίες

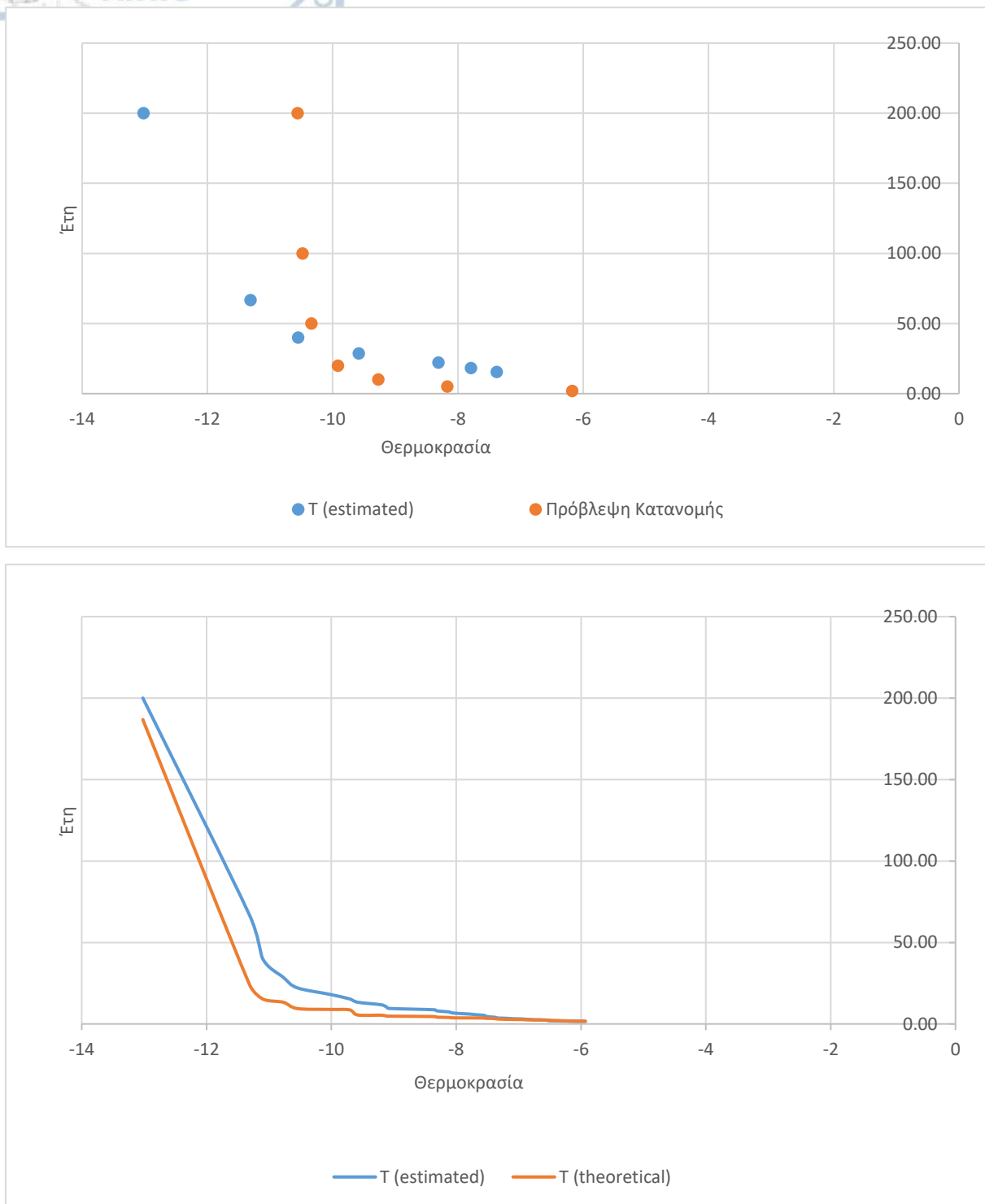
Με βάση τα αποτελέσματα ανάλυσης που παρουσιάζονται στον Πίνακα 3.25 για τις ελάχιστες θερμοκρασίες, για το σταθμό-κόμβο της Θεσσαλονίκης, και εφαρμόζοντας την

θεωρητική κατανομή Gen. Pareto ως τη βέλτιστη, υπολογίσθηκαν και εκτιμήθηκαν οι ελάχιστες ακραίες θερμοκρασίες που προέκυψαν από προκαθορισμένες περιόδους επανάληψης. Επίσης, εκτιμήθηκαν οι περίοδοι επανάληψης των ελάχιστων θερμοκρασιών της μελετώμενης περιόδου, για τον σταθμό-κόμβο της Θεσσαλονίκης. Όλα αυτά τα χαρακτηριστικά απεικονίζονται στον Πίνακα 3.31. Έτσι προβλέπεται ότι η εκτιμώμενη θερμοκρασία των -7.38°C , θα λάβει χώρα στην περιοχή της Θεσσαλονίκης, μια φορά κάθε δεκαπέντε (15), περίπου, χρόνια, κατά την εκτιμώμενη περίοδο επανάληψης, ενώ μία φορά κάθε τρία (3) έτη, κατά τη θεωρητική περίοδο επανάληψης. Επιπρόσθετα, η θερμοκρασία των -13.02°C εκτιμάται ότι θα παρουσιαστεί ξανά, έπειτα από 200 έτη, ενώ σύμφωνα με τη βέλτιστη θεωρητική κατανομή Gen. Pareto, το χρονικό διάστημα επανεμφάνισης θα είναι στα 187, περίπου, έτη, στοιχείο που υποδηλώνει ότι το εν λόγω μοντέλο προσδίδει μικρότερη της πραγματικής περιόδου επανάληψης. Σύμφωνα, τώρα, με το συγκεκριμένο μοντέλο (Gen. Pareto), στη μελετώμενη περιοχή θα παρατηρούνται θερμοκρασίες των -6.18°C κάθε δύο περίπου έτη, ενώ για βάθος χρόνου 200 ετών, εκτιμά θερμοκρασίες της τάξεως των -10.56°C .

Πίνακας 3.31. Παρουσίαση των εκτιμώμενων ελάχιστων ακραίων θερμοκρασιών (x_T) που προέκυψαν από προκαθορισμένες περιόδους επανάληψης, στα αριστερά, και των εκτιμώμενων περιόδων επανάληψης (T) των ελάχιστων θερμοκρασιών της μελετώμενης περιόδου, στα δεξιά, για τον σταθμό-κόμβο της Θεσσαλονίκης.

x_T εκτιμώμενες θερμοκρασίες	T περίοδος επανάληψης σε έτη	P πιθανότητα εμφάνισης	x_m εκτιμώμενες θερμοκρασίες	T εκτιμώμενη περίοδος επανάληψης σε έτη	$P\%$ πιθανότητα εμφάνισης	T theoretical	P theoretical
-6.18	2	0,5000	-13.02	200.00	0.5	186.78	0.01
-8.17	5	0,2000	-11.31	66.67	1.5	24.04	0.02
-9.27	10	0,1000	-10.55	40.00	2.5	9.47	0.03
-9.92	20	0,0500	-9.58	28.57	3.5	5.50	0.08
-10.34	50	0,0200	-8.31	22.22	4.5	4.15	0.19
-10.48	100	0,0100	-7.79	18.18	5.5	3.68	0.24
-10.56	200	0,0050	-7.38	15.38	6.5	3.24	0.29

Παρακάτω, στο Σχήμα 3.29 παρατίθενται τα διαγράμματα που συνδυάζουν τα αποτελέσματα του παραπάνω πίνακα.



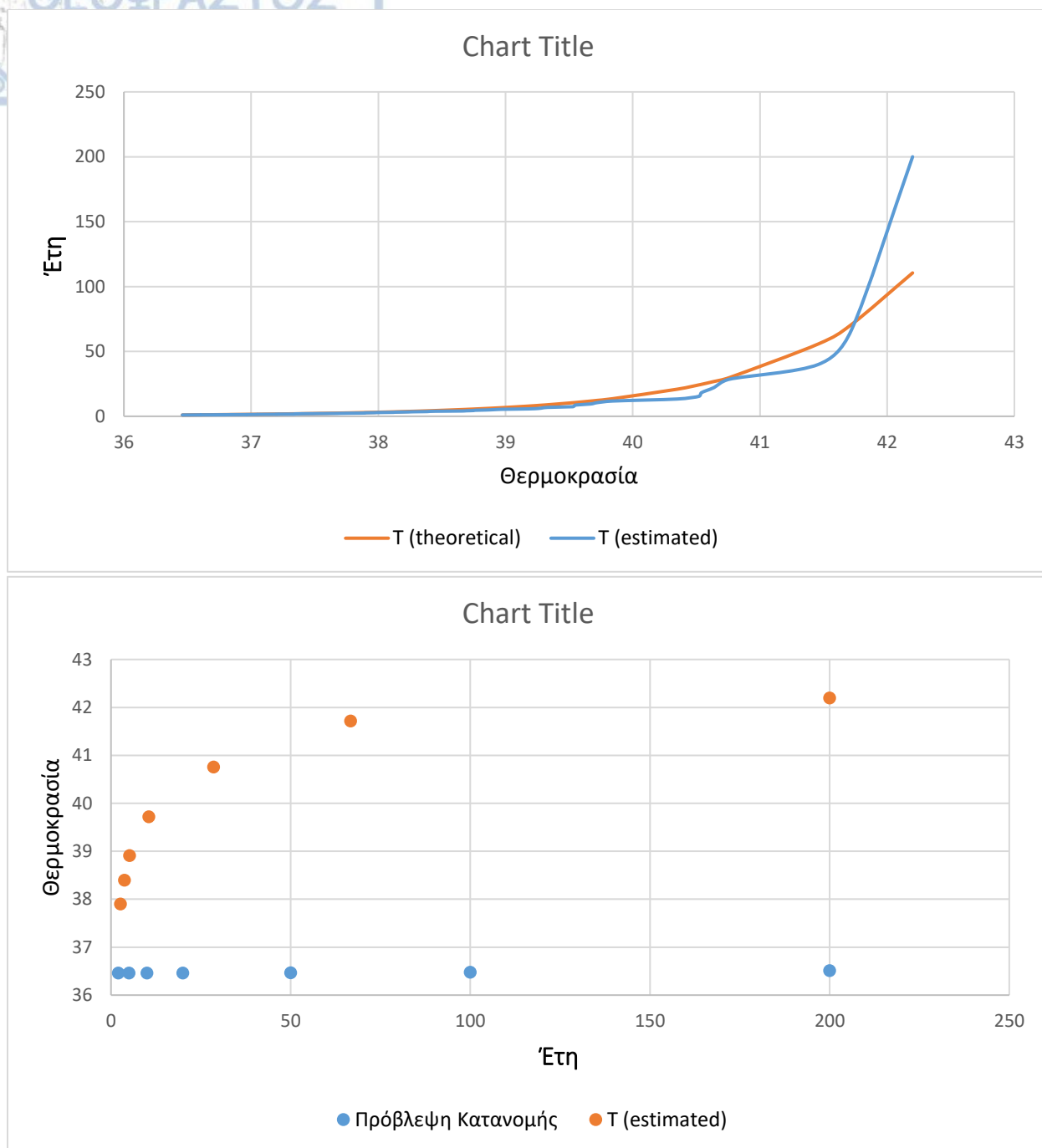
Σχήμα 3.29: Απεικόνιση των εκτιμώμενων ελάχιστων ακραίων θερμοκρασιών και των εκτιμώμενων περιόδων επανάληψης των ελάχιστων θερμοκρασιών της μελετώμενης περιόδου, για τον σταθμό-κόμβο της Θεσσαλονίκης.

Με βάση τα αποτελέσματα ανάλυσης που παρουσιάζονται στον Πίνακα 3.27 για τις μέγιστες θερμοκρασίες, για το σταθμό-κόμβο της Θεσσαλονίκης, και εφαρμόζοντας την θεωρητική κατανομή Gen. Gamma (4P) ως τη βέλτιστη, υπολογίσθηκαν και εκτιμήθηκαν οι μέγιστες ακραίες θερμοκρασίες που προέκυψαν από προκαθορισμένες περιόδους επανάληψης. Επίσης, εκτιμήθηκαν οι περίοδοι επανάληψης των μεγίστων θερμοκρασιών της μελετώμενης περιόδου, για τον σταθμό-κόμβο της Θεσσαλονίκης. Όλα αυτά τα χαρακτηριστικά απεικονίζονται στον Πίνακα 3.32. Έτσι προβλέπεται ότι η εκτιμώμενη θερμοκρασία των 37.9 °C, θα λάβει χώρα στην περιοχή της Θεσσαλονίκης, μια φορά κάθε δεκαπέντε (15), περίπου, χρόνια, κατά την εκτιμώμενη περίοδο επανάληψης, ενώ μία φορά κάθε τρία (3) έτη, κατά τη θεωρητική περίοδο επανάληψης. Επιπρόσθετα, η θερμοκρασία των 42.2 °C εκτιμάται ότι θα παρουσιαστεί ξανά, έπειτα από 200 έτη, ενώ σύμφωνα με τη βέλτιστη θεωρητική κατανομή Gen. Gamma (4P), το χρονικό διάστημα επανεμφάνισης θα είναι στα 110, περίπου, έτη, στοιχείο που υποδηλώνει ότι το εν λόγω μοντέλο προσδίδει μικρότερη της πραγματικής περιόδου επανάληψης. Σύμφωνα, τώρα, με το συγκεκριμένο μοντέλο (Gen. Gamma (4P)), στη μελετώμενη περιοχή θα παρατηρούνται θερμοκρασίες των 36.46 °C κάθε δύο περίπου έτη, ενώ για βάθος χρόνου 200 ετών, εκτιμά θερμοκρασίες της τάξεως των 36.51 °C.

Πίνακας 3.32. Παρουσίαση των εκτιμώμενων μέγιστων ακραίων θερμοκρασιών (χτ) που προέκυψαν από προκαθορισμένες περιόδους επανάληψης, στα αριστερά, και των εκτιμώμενων περιόδων επανάληψης (Τ) των μέγιστων θερμοκρασιών της μελετώμενης περιόδου, στα δεξιά, για τον σταθμό-κόμβο της Θεσσαλονίκης.

Χτ	Τ	Ρ	Χm	Τ	Ρ %	Τ	Ρ
εκτιμώμενες θερμοκρασίες	περίοδος επανάληψης σε έτη	πιθανότητα εμφάνισης	εκτιμώμενες θερμοκρασίες	εκτιμώμενη περίοδος επανάληψης σε έτη	πιθανότητα εμφάνισης	theoretical	theoretical
36.46	2	0,5000	42.20	200.00	0.5	110.50	0.99
36.46	5	0,2000	41.72	66.67	1.5	70.78	0.99
36.46	10	0,1000	40.76	40.00	2.5	29.85	0.97
36.46	20	0,0500	39.72	28.57	3.5	12.25	0.92
36.47	50	0,0200	38.91	22.22	4.5	6.34	0.84
36.48	100	0,0100	38.40	18.18	5.5	4.26	0.77
36.51	200	0,0050	37.90	15.38	6.5	2.92	0.66

Παρακάτω, στο Σχήμα 3.30 παρατίθενται τα διαγράμματα που συνδυάζουν τα αποτελέσματα του παραπάνω πίνακα.



Σχήμα 3.30: Απεικόνιση των εκτιμώμενων μέγιστων ακραίων θερμοκρασιών και των εκτιμώμενων περιόδων επανάληψης των μέγιστων θερμοκρασιών της μελετώμενης περιόδου, για τον σταθμό-κόμβο της Θεσσαλονίκης.

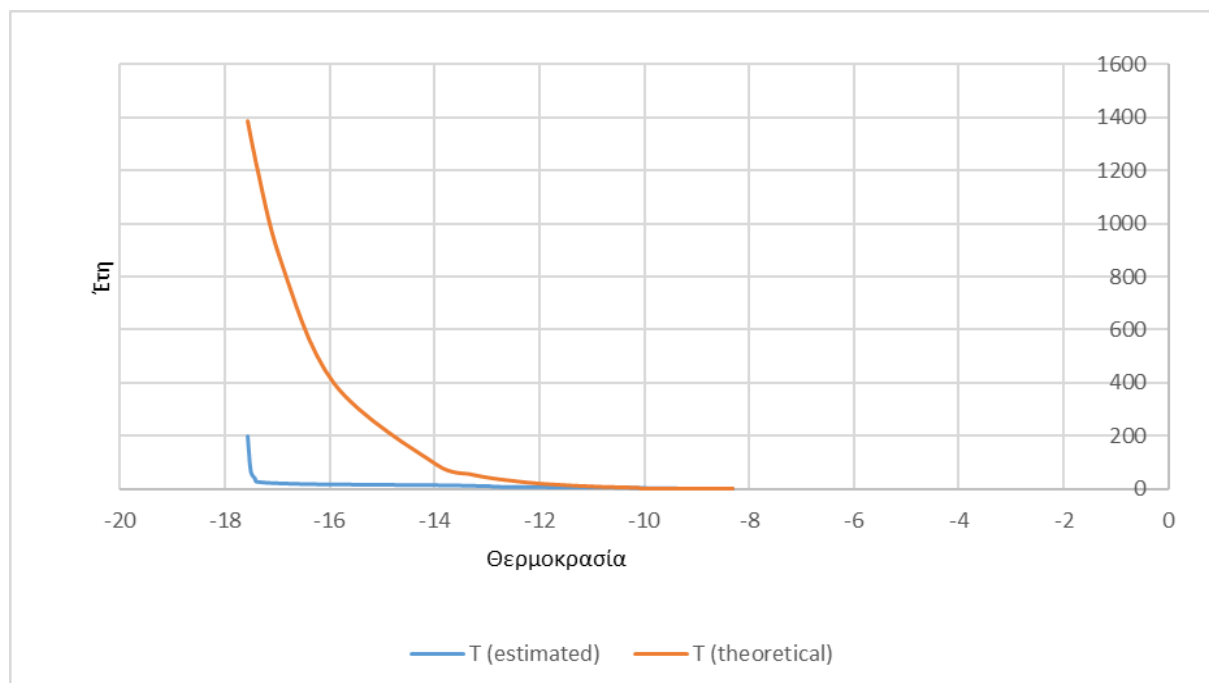
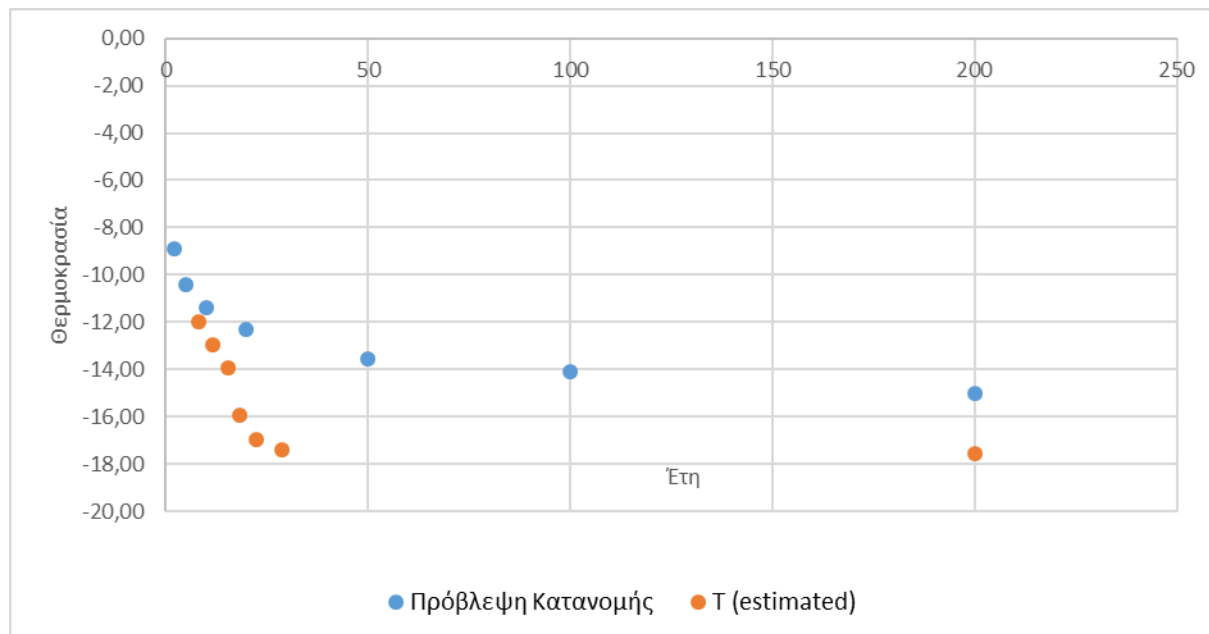
Ακραίες ελάχιστες θερμοκρασίες

Με βάση τα αποτελέσματα ανάλυσης που παρουσιάζονται στον Πίνακα 3.21 για τις ελάχιστες θερμοκρασίες, για το σταθμό-κόμβο της Λάρισας, και εφαρμόζοντας την θεωρητική κατανομή Burr (4P) ως τη βέλτιστη, υπολογίσθηκαν και εκτιμήθηκαν οι ελάχιστες ακραίες θερμοκρασίες που προέκυψαν από προκαθορισμένες περιόδους επανάληψης. Επίσης, εκτιμήθηκαν οι περίοδοι επανάληψης των ελάχιστων θερμοκρασιών της μελετώμενης περιόδου, για τον σταθμό-κόμβο της Λάρισας. Όλα αυτά τα χαρακτηριστικά απεικονίζονται στον Πίνακα 3.33. Έτσι προβλέπεται ότι η εκτιμώμενη θερμοκρασία των -12.0°C , θα λάβει χώρα στην περιοχή της Λάρισας, μια φορά κάθε είκοσι-ένα (21), περίπου, χρόνια, κατά την εκτιμώμενη περίοδο επανάληψης. Επιπρόσθετα, η θερμοκρασία των -17.57°C εκτιμάται ότι θα παρουσιαστεί ξανά, έπειτα από 200 έτη, ενώ σύμφωνα με τη βέλτιστη θεωρητική κατανομή Burr (4P), το χρονικό διάστημα επανεμφάνισης θα είναι στα 1386, περίπου, έτη, στοιχείο που υποδηλώνει ότι το εν λόγω μοντέλο προσδίδει πολύ μεγαλύτερη της πραγματικής περιόδου επανάληψης. Σύμφωνα, τώρα, με το συγκεκριμένο μοντέλο (Burr (4P)), στη μελετώμενη περιοχή θα παρατηρούνται θερμοκρασίες των $-8,89^{\circ}\text{C}$ κάθε δύο περίπου έτη, ενώ για βάθος χρόνου 200 ετών, εκτιμά θερμοκρασίες της τάξεως των -15.01°C .

Πίνακας 3.33. Παρουσίαση των εκτιμώμενων ελάχιστων ακραίων θερμοκρασιών (x_T) που προέκυψαν από προκαθορισμένες περιόδους επανάληψης, στα αριστερά, και των εκτιμώμενων περιόδων επανάληψης (T) των ελάχιστων θερμοκρασιών της μελετώμενης περιόδου, στα δεξιά, για τον σταθμό-κόμβο της Λάρισας.

x_T εκτιμώμενες θερμοκρασίες	T περίοδος επανάληψης σε έτη	P πιθανότητα εμφάνισης	x_m εκτιμώμενες θερμοκρασίες	T εκτιμώμενη περίοδος επανάληψης σε έτη	$P\%$ πιθανότητα εμφάνισης	T theoretical	P theoretical
-8.89	2	0,5000	-17.57	200.00	0.5	1386.63	0.000001
-10.39	5	0,2000	-17.40	66.67	1.5	1219.17	0.00001
-11.38	10	0,1000	-16.94	40.00	2.5	860.70	0.0001
-12.33	20	0,0500	-15.92	28.57	3.5	397.87	0.001
-13.56	50	0,0200	-13.94	22.22	4.5	89.30	0.01
-14.09	100	0,0100	-12.95	18.18	5.5	42.49	0.02
-15.01	200	0,0050	-11.99	15.38	6.5	20.82	0.05

Παρακάτω, στο Σχήμα 3.31 παρατίθενται τα διαγράμματα που συνδυάζουν τα αποτελέσματα του παραπάνω πίνακα.



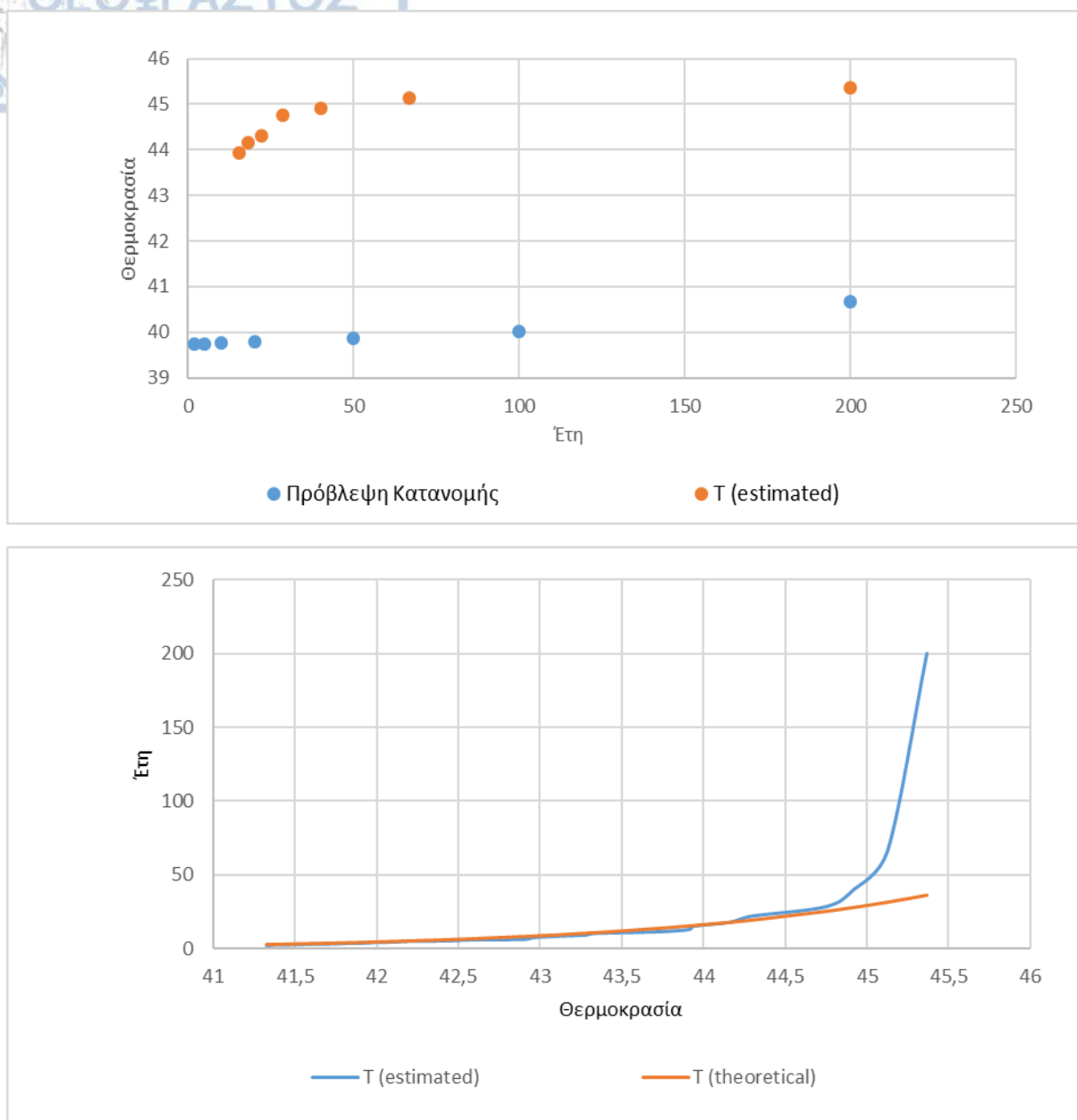
Σχήμα 3.31: Απεικόνιση των εκτιμώμενων ελάχιστων ακραίων θερμοκρασιών και των εκτιμώμενων περιόδων επανάληψης των ελάχιστων θερμοκρασιών της μελετώμενης περιόδου, για τον σταθμό-κόμβο της Λάρισας.

Με βάση τα αποτελέσματα ανάλυσης που παρουσιάζονται στον Πίνακα 3.23 για τις μέγιστες θερμοκρασίες, για το σταθμό-κόμβο της Λάρισας, και εφαρμόζοντας την θεωρητική κατανομή Gen. Gamma (4P) ως τη βέλτιστη, υπολογίσθηκαν και εκτιμήθηκαν οι μέγιστες ακραίες θερμοκρασίες που προέκυψαν από προκαθορισμένες περιόδους επανάληψης. Επίσης, εκτιμήθηκαν οι περίοδοι επανάληψης των μεγίστων θερμοκρασιών της μελετώμενης περιόδου, για τον σταθμό-κόμβο της Λάρισας. Όλα αυτά τα χαρακτηριστικά απεικονίζονται στον Πίνακα 3.34. Έτσι προβλέπεται ότι η εκτιμώμενη θερμοκρασία των 43.94 °C, θα λάβει χώρα στην περιοχή της Λάρισας, μια φορά κάθε δεκαπέντε (15), περίπου, χρόνια, κατά την εκτιμώμενη περίοδο επανάληψης. Επιπρόσθετα, η θερμοκρασία των 45.37 °C εκτιμάται ότι θα παρουσιαστεί ξανά, έπειτα από 200 έτη, ενώ σύμφωνα με τη βέλτιστη θεωρητική κατανομή Gen. Gamma (4P), το χρονικό διάστημα επανεμφάνισης θα είναι στα 35.97, περίπου, έτη, στοιχείο που υποδηλώνει ότι το εν λόγω μοντέλο προσδίδει πολύ μικρότερη της πραγματικής περιόδου επανάληψης. Σύμφωνα, τώρα, με το συγκεκριμένο μοντέλο (Gen. Gamma (4P)), στη μελετώμενη περιοχή θα παρατηρούνται θερμοκρασίες των 39.74 °C κάθε δύο περίπου έτη, ενώ για βάθος χρόνου 200 ετών, εκτιμά θερμοκρασίες της τάξεως των 40.66 °C.

Πίνακας 3.34. Παρουσίαση των εκτιμώμενων μέγιστων ακραίων θερμοκρασιών (x_T) που προέκυψαν από προκαθορισμένες περιόδους επανάληψης, στα αριστερά, και των εκτιμώμενων περιόδων επανάληψης (T) των μέγιστων θερμοκρασιών της μελετώμενης περιόδου, στα δεξιά, για τον σταθμό-κόμβο της Λάρισας.

x_T	T	P	x_m	T	$P \%$	T	P
εκτιμώμενες θερμοκρασίες	περίοδος επανάληψης σε έτη	πιθανότητα εμφάνισης	εκτιμώμενες θερμοκρασίες	εκτιμώμενη περίοδος επανάληψης σε έτη	πιθανότητα εμφάνισης	theoretical	theoretical
39.74	2	0,5000	45.37	200.00	0.5	35.97	0.97
39.75	5	0,2000	45.13	66.67	1.5	31.38	0.97
39.76	10	0,1000	44.92	40.00	2.5	27.83	0.96
39.80	20	0,0500	44.75	28.57	3.5	25.24	0.96
39.86	50	0,0200	44.30	22.22	4.5	19.45	0.95
40.01	100	0,0100	44.17	18.18	5.5	18.03	0.94
40.66	200	0,0050	43.94	15.38	6.5	15.75	0.94

Παρακάτω, στο Σχήμα 3.32 παρατίθενται τα διαγράμματα που συνδυάζουν τα αποτελέσματα του παραπάνω πίνακα.



Σχήμα 3.32: Απεικόνιση των εκτιμώμενων μέγιστων ακραίων θερμοκρασιών και των εκτιμώμενων περιόδων επανάληψης των μέγιστων θερμοκρασιών της μελετώμενης περιόδου, για τον σταθμό-κόμβο της Λάρισας.

Κεφάλαιο 4^ο

Συμπεράσματα

4.1 Συνοπτικά – συγκριτικά αποτελέσματα

Με απώτερο σκοπό τη σύνθεση, αλλά και σύγκριση των αποτελεσμάτων που προέκυψαν από τον μαθηματικό προσδιορισμό των βέλτιστων θεωρητικών κατανομών-μοντέλων, σύμφωνα με τους μη παραμετρικούς ελέγχους καλής προσαρμογής των πραγματικών ελάχιστων και μέγιστων θερμοκρασιών, για κάθε ένα σταθμό-κόμβο, δημιουργήθηκαν οι Πίνακες 4.1, 4.2 και 4.3, όπου παρουσιάζονται τα συνοπτικά αποτελέσματα της παραπάνω ανάλυσης. Ουσιαστικά παρουσιάζονται οι θεωρητικές κατανομές που προσεγγίζουν καλύτερα τα δεδομένα των ημερήσιων ακραίων θερμοκρασιών όλων των κόμβων του δικτύου, οι αντίστοιχες απόλυτες αποκλίσεις τους, σύμφωνα με τους τρεις ελέγχους καλής προσαρμογής, καθώς και η βέλτιστη κατανομή, μαζί με τις παραμέτρους της.

Οι Πίνακες 4.1 και 4.2 απεικονίζουν τις θεωρητικές κατανομές και τα χαρακτηριστικά αυτών, ξεχωριστά για τις ελάχιστες και μέγιστες θερμοκρασίες, ενώ ο Πίνακας 4.3 τις συγκεντρώνει όλες μαζί.

Στον Πίνακα 4.1 παρουσιάζονται τα αποτελέσματα που αφορούν στις ελάχιστες θερμοκρασίες κάθε σταθμού-κόμβου και την κατανομή που ο καθένας από τους ελέγχους καλής προσαρμογής προτείνει ως καταλληλότερη, όπως επίσης και οι παράμετροι της βέλτιστης εκ των τριών κατανομών, για κάθε περίπτωση.

Πίνακας 4.1: Παρουσίαση των θεωρητικών κατανομών που προσεγγίζουν καλύτερα τα δεδομένα των ημερήσιων ακραίων ελαχίστων θερμοκρασιών όλων των κόμβων του δικτύου, οι αντίστοιχες απόλυτες αποκλίσεις τους, σύμφωνα με τους τρεις ελέγχους καλής προσαρμογής και η βέλτιστη κατανομή (με πιο σκούρο μαύρο χρώμα) μαζί με τις παραμέτρους της ανάλογα με την κατηγορία τους.

	<u>Αγρίνιο</u> <u>min</u>	<u>Αλεξ/πολη</u> <u>min</u>	<u>Ελληνικό</u> <u>min</u>	<u>Φλώρινα</u> <u>min</u>	<u>Κέρκυρα</u> <u>min</u>	<u>Λάρισα</u> <u>min</u>	<u>Θεσ/νίκη</u> <u>min</u>
Kolmogorov-Smirnov	Johnson SB	Johnson SB	Johnson SB	Johnson SB	Johnson SB	Gen. Pareto	Gen. Pareto
Απόλυτη απόκλιση	6.40	6.53	8.69	7.27	6.98	6.59	7.24
Anderson-Darling	Error	Beta	Error	Kumaraswamy	Power Function	Pearson 6	Kumaraswamy
Απόλυτη απόκλιση	6.54	6.51	8.99	7.26	6.82	6.57	7.41
Chi-Squared	Error	Error	Error	Error	Error	Burr	Error
Απόλυτη απόκλιση	6.54	6.65	8.99	7.34	7.17	6.56	7.60
Βέλτιστη κατανομή	Johnson SB	Beta	Johnson SB	Kumaraswamy	Power Function	Burr	Gen. Pareto
Παράμετροι	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓
Σχήματος	$\gamma=0.07$, $\delta=0.43$	$\alpha_1=1.781$, $\alpha_2=1.362$	$\gamma=0.1514$, $\delta=0.4926$	$\alpha_1=1.819$, $\alpha_2=1.155$	$\alpha=1.151$	$k=0.1099$, $\alpha=6.838$	$k=14.72$
Κλίμακας	$\lambda=19.73$		$\lambda=21.72$			$\beta=7.394$	$\sigma=25.85$
Θέσης	$\xi=-4.91$		$\xi=-1.085$			$\gamma=-7.394$	$\mu=-7.712$
Ορίου		$a=-14.05$, $b=15.25$		$a=-20.48$, $b=13.33$	$a=-4.804$, $b=16.75$		

Όπως προκύπτει από τον πίνακα, οι βέλτιστες κατανομές είναι αρκετά διαφορετικές για κάθε σταθμό-κόμβο, εκτός από το Αγρίνιο και το Ελληνικό, όπου συγκλίνουν και οι δύο στην θεωρητική κατανομή της Johnson SB. Οι τρεις από τις επτά καλύτερες κατανομές προέρχονται από τον έλεγχο K-S, άλλες τρεις από τον A-D και μία μόνο από τον τρίτο έλεγχο χ^2 .

Όσον αφορά στις παραμέτρους, οι παράμετροι σχήματος, οι οποίες υπάρχουν σε όλες τις περιπτώσεις, φαίνεται να έχουν μικρές τιμές στους περισσότερους κόμβους. Πιο συγκεκριμένα, τις μικρότερες τιμές τις έχει το Αγρίνιο και το Ελληνικό, οι οποίες παρουσιάζουν και την ίδια κατανομή, ενώ η μεγαλύτερη ανήκει στη Θεσσαλονίκη με την κατανομή Gen. Pareto. Οι τέσσερις μόνο από τις κατανομές περιέχουν παραμέτρους κλίμακας στις συναρτήσεις τους, και είναι οι ίδιες που περιέχουν και παραμέτρους θέσης. Οι τιμές που παίρνουν για την κλίμακα είναι γενικά μεγάλες, με μεγαλύτερη αυτή της Θεσσαλονίκης και με αρκετά μεγάλη διαφορά

από την μικρότερη, η οποία ανήκει στην κατανομή Burr της Λάρισας. Αντίθετα, οι παράμετροι θέσης παίρνουν σε όλες τις περιπτώσεις τιμές που βρίσκονται κάτω από το μηδέν, με μικρότερες αυτές της Θεσσαλονίκης και της Λάρισας, όπου εδώ, αξίζει να σημειωθεί ότι, για τη Λάρισα η παράμετρος κλίμακας έχει την ακριβώς αντίθετη τιμή από αυτήν που έχει η παράμετρος θέσης της. Τέλος, οι παράμετροι ορίου παρουσιάζονται μόνο στις κατανομές στις οποίες δεν υπάρχουν οι δύο προαναφερθείσες. Η παράμετρος a , όπως φαίνεται, είναι αρνητική παντού με μεγάλη διαφορά ανάμεσα στις τρεις τιμές, ενώ αντίθετα, η παράμετρος b είναι θετική με πολύ μικρές διαφορές.

Πίνακας 4.2: Παρουσίαση των θεωρητικών κατανομών που προσεγγίζουν καλύτερα τα δεδομένα των ημερήσιων ακραίων μεγίστων θερμοκρασιών όλων των κόμβων του δικτύου, οι αντίστοιχες απόλυτες αποκλίσεις τους, σύμφωνα με τους τρεις ελέγχους καλής προσαρμογής και η βέλτιστη κατανομή (με πιο σκούρο μαύρο χρώμα) μαζί με τις παραμέτρους της ανάλογα με την κατηγορία τους.

	<u>Αγρίνιο</u> max	<u>Αλεξ/πολη</u> max	<u>Ελληνικό</u> max	<u>Φλώρινα</u> max	<u>Κέρκυρα</u> max	<u>Λάρισα</u> max	<u>Θεσ/νίκη</u> max
Kolmogorov-Smirnov	Johnson SB	Johnson SB	Johnson SB	Johnson SB	Johnson SB	Johnson SB	Johnson SB
Απόλυτη απόκλιση	28.36	25.64	27.85	24.90	26.73	28.55	26.54
Anderson-Darling	Gen. Gamma (4P)	Gen. Gamma (4P)	Kumarasw amy	Kumarasw amy	Gen. Gamma (4P)	Gen. Gamma (4P)	Gen. Gamma (4P)
Απόλυτη απόκλιση	27.17	24.43	27.61	24.66	25.51	27.35	25.33
Chi-Squared	Gen. Gamma (4P)	Dagum	Error	Error	Gen. Gamma (4P)	Error	Error
Απόλυτη απόκλιση	27.17	23.32	28.10	25.20	25.51	28.85	26.84
Βέλτιστη κατανομή	Gen. Gamma (4P)	Dagum	Kumaraswa my	Kumaraswa my	Gen. Gamma (4P)	Gen. Gamma (4P)	Gen. Gamma (4P)
Παράμετροι	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓
Σχήματος	$k=16.7,$ $\alpha=0.0631$	$k=0.1067,$ $\alpha=25.17$	$\alpha_1=1.33,$ $\alpha_2=1.564$	$\alpha_1=1.466,$ $\alpha_2=1.623$	$k=12.27,$ $\alpha=0.0841$	$k=14.86,$ $\alpha=0.0806$	$k=14.72,$ $\alpha=0.086$
Κλίμακας	$\beta=24.16$	$\beta=35.75$			$\beta=22.22$	$\beta=28.42$	$\beta=26.04$
Θέσης	$\gamma=16.5$				$\gamma=16.13$	$\gamma=13.94$	$\gamma=12.88$
Ορίου			$a=16.83,$ $b=40.55$	$a=9.887,$ $b=41.06$			

Στον Πίνακα 4.2 παρουσιάζονται οι κατανομές που επιλέχθηκαν για τις μέγιστες θερμοκρασίες των σταθμών-κόμβων και προβάλλονται οι πιο αντιπροσωπευτικές. Στην

περίπτωση αυτή, είναι αξιοπρόσεκτο το γεγονός ότι η Gen. Gamma (4P) κατανομή, καταλαμβάνει την πρώτη θέση ως βέλτιστη για το πλήθος των τεσσάρων κόμβων (Αγρίνιο, Κέρκυρα, Λάρισα, Θεσσαλονίκη), η Kumaraswamy για δύο κόμβους (Αθήνα/ Ελληνικό, Φλώρινα) και η έβδομη είναι η Dagum για ένα (Αλεξανδρούπολη). Αξίζει, επιπλέον, να τονιστεί ότι όλες οι βέλτιστες κατανομές, εκτός της Dagum, προέρχονται από τον έλεγχο Anderson-Darling, ενώ ο Kolmogorov-Smirnov δεν έχει υποδείξει καμία που τελικά να έχει χαρακτηριστεί ως η καταλληλότερη. Αναλυτικότερα, η μοναδική κατανομή που προτείνει ο έλεγχος αυτός, για τις μέγιστες θερμοκρασίες των σταθμών-κόμβων, είναι η Johnson SB.

Για τις παραμέτρους σχήματος, παρατηρείται ότι οι πόλεις με την ίδια θεωρητική κατανομή παρουσιάζουν πολύ μικρές διαφορές στις τιμές, και ειδικότερα στη Λάρισα και στη Θεσσαλονίκη η ομοιότητα είναι πολύ μεγάλη. Οι ίδιες παράμετροι της Gen. Gamma (4P) έχουν αρκετά μεγάλη διαφορά σε σχέση με αυτές της Kumaraswamy, και ακόμα μεγαλύτερη με τις αντίστοιχες της Dagum. Παραμέτρους κλίμακας και θέσης περιέχουν μόνο οι πόλεις με την Gen. Gamma (4P), με εξαίρεση την Dagum, η οποία έχει παράμετρο κλίμακας. Και σε αυτές τις παραμέτρους οι τιμές είναι κοντά και για τους τέσσερις κόμβους, και ειδικότερα, οι τιμές του Αγρινίου με της Κέρκυρας και οι τιμές της Λάρισας με της Θεσσαλονίκης. Οι παράμετροι ορίου ανήκουν στην Kumaraswamy και στους κόμβους Ελληνικό και Φλώρινα. Η παράμετρος a παρουσιάζει μια διαφορά της τάξεως των 7 βαθμών ανάμεσα στις δύο αυτές πόλεις, ενώ η παράμετρος b πολύ μικρότερη, της τάξεως του 0.5.

Εν συνεχεία παρατίθεται ο Πίνακας 4.3, όπου παρουσιάζονται συγκεντρωτικά τα αποτελέσματα του κάθε κόμβου, τόσο για τις ελάχιστες, όσο και για τις μέγιστες θερμοκρασίες μαζί και αποτελεί μια συγχώνευση των δύο παραπάνω πινάκων.

	<u>Αγρίνιο</u> <u>min</u>	<u>Αγρίνιο</u> <u>max</u>	<u>Αλεξανδ</u> <u>ρούπολη</u> <u>min</u>	<u>Αλεξανδ</u> <u>ρούπολη</u> <u>max</u>	<u>Ελληνικό</u> <u>min</u>	<u>Ελληνικό</u> <u>max</u>	<u>Φλώρινα</u> <u>min</u>	<u>Φλώρινα</u> <u>max</u>	<u>Κέρκυρα</u> <u>min</u>	<u>Κέρκυρα</u> <u>max</u>	<u>Λάρισα</u> <u>min</u>	<u>Λάρισα</u> <u>max</u>	<u>Θεσ/νί</u> <u>κη min</u>	<u>Θεσ/νί</u> <u>κη max</u>
Kolmogorov - Smirnov	Johnson SB	Johnso n SB	Johnson SB	Johnson SB	Johnson SB	Johnson SB	Johnson SB	Johnson SB	Johnson SB	Johnson SB	Gen. Pareto	Johnson SB	Gen. Pareto	Johnson SB
Απόλυτη απόκλιση	6.40	28.36	6.53	25.64	8.69	27.85	7.27	24.90	6.98	26.73	6.59	28.55	7.24	26.54
Anderson-Darling	Error	Gen. Gamma (4P)	Beta	Gen. Gamma (4P)	Error	Kumara swamy	Kumaras wamy	Kumaras wamy	Power Function	Gen. Gamma (4P)	Pearso n 6	Gen. Gamma (4P)	Kumar aswam y	Gen. Gamma (4P)
Απόλυτη απόκλιση	6.54	27.17	6.51	24.43	8.99	27.61	7.26	24.66	6.82	25.51	6.57	27.35	7.41	25.33
Chi-Squared	Error	Gen. Gamma (4P)	Error	Dagum	Error	Error	Error	Error	Error	Gen. Gamma (4P)	Burr	Error	Error	Error
Απόλυτη απόκλιση	6.54	27.17	6.65	23.32	8.99	28.10	7.34	25.20	7.17	25.51	6.56	28.85	7.60	26.84
Βέλτιστη κατανομή	Johnson SB	Gen. Gamma (4P)	Beta	Dagum	Johnson SB	Kumara swamy	Kumaras wamy	Kumaras wamy	Power Function	Gen. Gamma (4P)	Burr	Gen. Gamma (4P)	Gen. Pareto	Gen. Gamma (4P)
Παράμετροι	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓
Σχήματος	$\gamma=0.07, \delta=0.43$	$\kappa=16.7, \alpha=0.0631$	$\alpha_1=1.781, \alpha_2=1.362$	$\kappa=0.1067, \alpha=25.17$	$\gamma=0.1514, \delta=0.4926$	$\alpha_1=1.33, \alpha_2=1.564$	$\alpha_1=1.819, \alpha_2=1.155$	$\alpha_1=1.466, \alpha_2=1.623$	$\alpha=1.151$	$\kappa=12.27, \alpha=0.0841$	$\kappa=0.1099, \alpha=6.838$	$\kappa=14.86, \alpha=0.0806$	$\kappa=14.72$	$\kappa=14.72, \alpha=0.086$
Κλίμακας	$\lambda=19.73$	$\beta=24.16$		$\beta=35.75$	$\lambda=21.72$					$\beta=22.22$	$\beta=7.394$	$\beta=28.42$	$\sigma=25.85$	$\beta=26.04$
Θέσης	$\xi=-4.91$	$\gamma=16.5$			$\xi=-1.085$					$\gamma=16.13$	$\gamma=-7.394$	$\gamma=13.94$	$\mu=-7.712$	$\gamma=12.88$
Ορίου			$a=-14.05, b=15.25$			$a=16.83, b=40.55$	$a=-20.48, b=13.33$	$a=9.887, b=41.06$	$a=-4.804, b=16.75$					

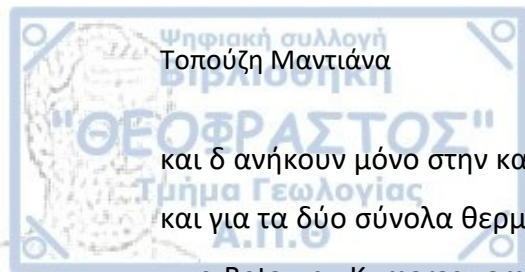
Πίνακας 4.3: Παρουσίαση των θεωρητικών κατανομών που προσεγγίζουν καλύτερα τα δεδομένα των ημερήσιων ακραίων ελαχίστων και μεγίστων θερμοκρασιών όλων των κόμβων του δικτύου, οι αντίστοιχες απόλυτες αποκλίσεις τους, σύμφωνα με τους τρεις ελέγχους καλής προσαρμογής και η βέλτιστη κατανομή (με πιο σκούρο μαύρο χρώμα) μαζί με τις παραμέτρους της ανάλογα με την κατηγορία τους.

Στον Πίνακα 4.3, παρουσιάζονται και οι επτά σταθμοί-κόμβοι, για τις μέγιστες και τις ελάχιστες θερμοκρασίες, μαζί με τις τρεις πιο αντιπροσωπευτικές κατανομές, σύμφωνα με τους ελέγχους καλής προσαρμογής και με τις αντίστοιχες απόλυτες αποκλίσεις. Με σκούρο χρώμα, σημειώνονται αυτές που έχουν χαρακτηριστεί ως βέλτιστες. Στο κάτω μέρος του Πίνακα 4.3 παρουσιάζονται οι αντίστοιχες παράμετροι των βέλτιστων κατανομών ταξινομημένες ανάλογα με το είδος τους.

Είναι αξιοπρόσεκτο ότι ο έλεγχος K-S προτείνει την Johnson SB κατανομή ως καταλληλότερη για τα δώδεκα (12) από τα δεκατέσσερα (14) σύνολα θερμοκρασιών του δικτύου της διατριβής αυτής, ενώ για τα άλλα δύο θεωρεί καταλληλότερη την κατανομή Gen. Pareto. Ωστόσο, αξίζει να σημειωθεί, ότι μόνο τρεις από αυτές αναγνωρίζονται, τελικά, ως βέλτιστες. Αντίστοιχα, η πλειοψηφία των εκτιμήσεων του ελέγχου χ^2 παρουσιάζει την Error ως την θεωρητική κατανομή στην οποία προσαρμόζονται καλύτερα τα δεδομένα. Ωστόσο, στον χ^2 έλεγχο, αν και ανήκουν τέσσερεις από όλες τις τελικές βέλτιστες κατανομές, η Error δεν εμφανίζεται σε καμία από τις περιπτώσεις αυτές. Σύμφωνα με τα παραπάνω, γίνεται εύκολα αντιληπτό, ότι ο A-D έλεγχος καλής προσαρμογής έχει υποδείξει το μεγαλύτερο πλήθος των βέλτιστων κατανομών, και πιο συγκεκριμένα εννέα (9) εκ των δεκατεσσάρων (14) καταλληλότερων κατανομών προέρχονται από τον έλεγχο αυτό, γεγονός που τον καθιστά πιο αξιόπιστο, σε σχέση με τους άλλους δύο ελέγχους.

Συγκρίνοντας, τώρα, τις κατανομές που αντιστοιχούν στις ελάχιστες και μέγιστες θερμοκρασίες κάθε κόμβου, οδηγούμαστε στο συμπέρασμα, ότι δεν ακολουθείται κάποιο συστηματικό μοτίβο. Ο μόνος κόμβος που οι κατανομές των ελαχίστων και μεγίστων θερμοκρασιών είναι ίδιες, είναι η Φλώρινα με την κατανομή Kumaraswamy. Η κατανομή Gen. Gamma (4P) εμφανίζεται τέσσερεις φορές στα αποτελέσματα ως καταλληλότερη, και είναι για μέγιστες θερμοκρασίες σε όλες τις περιπτώσεις. Ακολουθεί η Kumaraswamy που εμφανίζεται τρεις φορές, και η Johnson SB με δύο. Οι υπόλοιπες κατανομές παρουσιάζονται από μία φορά.

Τέλος, στο κομμάτι των παραμέτρων, οι k παράμετροι, είδους σχήματος, που ανήκουν στην κατανομή Gen. Gamma (4P) φαίνεται να κυμαίνονται σε παρόμοιες τιμές μεταξύ τους, με μεγάλη διαφορά, όμως, από τις δύο άλλες, των κατανομών Dagum και Burr. Το ίδιο ακριβώς ισχύει και για τις παραμέτρους α. Οι παράμετροι γ



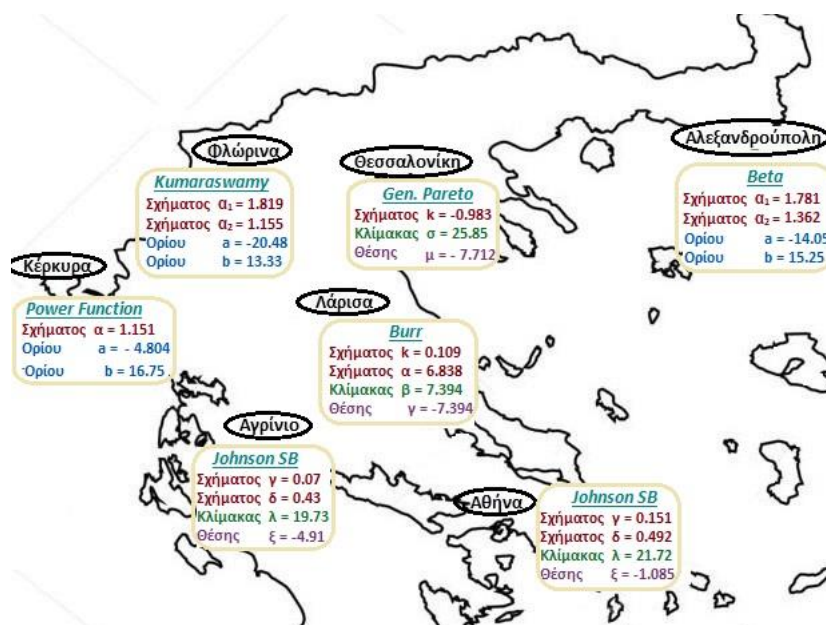
Τοπούζη Μαντιάνα

και δ ανήκουν μόνο στην κατανομή Johnson SB και παρουσιάζουν πολύ μικρές τιμές και για τα δύο σύνολα θερμοκρασιών στο οποία εμφανίζονται. Οι α_1 και α_2 ανήκουν στις Beta και Kumaraswamy και όλες παρουσιάζουν τιμές από 1.3 έως 1.8. Όσες κατανομές περιέχουν παραμέτρους κλίμακας, παρατηρείται να λαμβάνουν σχετικά μεγάλες τιμές, από 19 ως 35, με εξαίρεση την παράμετρο της Burr. Για τις παραμέτρους θέσης, οι διαφορές ανάμεσα στις τιμές είναι μεγαλύτερες, με την μικρότερη τιμή να παρουσιάζεται στην παράμετρο $\xi = -1.085$ της κατανομής Johnson SB για τις ελάχιστες θερμοκρασίες στο Ελληνικό, και την μεγαλύτερη $\gamma = 16.5$ για την Gen. Gamma (4P) και τις μέγιστες θερμοκρασίες του Αγρινίου. Τέλος, οι παράμετροι ορίου υπάρχουν μόνο στις κατανομές Beta, Kumaraswamy και Power Function, και παρατηρούνται πολύ μεγάλες διαφορές στις τιμές τους. Από -20.48 ως και 16.83 για την a, ενώ για την b η ελάχιστη είναι 13.33 και η μέγιστη 41.06. Στην περίπτωση της b, πολύ κοντά στις τιμές βρίσκονται αυτές που ανήκουν στις ελάχιστες θερμοκρασίες των κόμβων Αλεξανδρούπολη, Ελληνικό και Κέρκυρα, και αντίστοιχα κοντά βρίσκονται αυτές που ανήκουν στις μέγιστες θερμοκρασίες των πόλεων Ελληνικό και Φλώρινα.

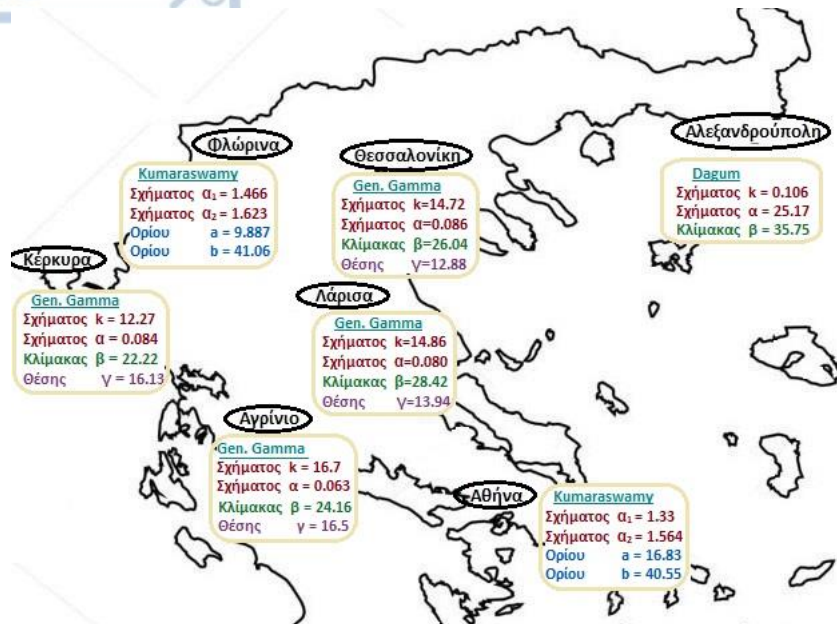
Μια πιο εποπτική εικόνα της παραπάνω ανάλυσης, παρουσιάζονται στα Σχήματα 4.1, 4.2 και 4.3, όπου απεικονίζεται το δίκτυο των σταθμών-κόμβων που μελετήθηκαν/εξετάστηκαν στην παρούσα διατριβή μαζί με τα αποτελέσματά τους.



Σχήμα 4.1: Το δίκτυο των επτά σταθμών-κόμβων που αναλύονται με τις βέλτιστες κατανομές τους. Με μπλέ χρώμα είναι τα θεωρητικά μοντέλα που επιλέχθηκαν για τις ακραίες ελάχιστες θερμοκρασίες, ενώ με κόκκινο είναι τα μοντέλα που επιλέχθηκαν για τις ακραίες μέγιστες θερμοκρασίες.



Σχήμα 4.2: Οι σταθμοί-κόμβοι του δικτύου με τις βέλτιστες κατανομές που προσδιορίστηκαν για τις ακραίες ελάχιστες θερμοκρασίες τους και με τις παραμέτρους κάθε κατανομής, ανάλογα με το είδος τους.



Σχήμα 4.3: Οι σταθμοί-κόμβοι του δικτύου με τις βέλτιστες κατανομές που προσδιορίστηκαν για τις ακραίες μέγιστες θερμοκρασίες τους και με τις παραμέτρους κάθε κατανομής, ανάλογα με το είδος τους.

Βιβλιογραφία

- Berger, J.O., 1985: Statistical decision theory and Bayesian analysis (2nd ed.). New York: Springer.
- Bolfarine, H., 1987: Minimax prediction in finite populations. *Communications in Statistics—Theory and Methods*, 16, 3683–3700.
- Douka, M., Karacostas, T., 2017: Statistical analyses of extreme rainfall events in Thessaloniki, Greece. (2017) *Atmospheric Research*, 208, pp. 60-77. DOI: 10.1016/j.atmosres.2017.08.025
- Douka, M., and T. S. Karacostas, 2018: Statistical characteristics of extreme precipitation events at Thessaloniki, based upon observed and modelled values. *Acta Geobalcanica*, Vol. 2, Issue 2, DOI: <https://doi.org/10.18509/AGB.2018.09>, UDC:551.578.1:551.506.3.
- Fisher, R.A., 1922: On the mathematical foundation of theoretical statistics. *Phil. Trans. A*, 222, 309-368.
- Fisher, R.A., Tippet, L.H.C., 1928: Limiting forms of the frequency distribution of the largest and smallest member of a sample. *Proc. Cambridge Philosophical Society*, 24, 180–190.
- Gumbel, E.J., 1958: *Statistics of Extremes*. Columbia University Press, New York, 156-302.
- Hosking, J.R.M., 1990: L-Moments: Analysis and Estimation of Distributions Using Linear Combinations of Order Statistics, *Journal of the Royal Statistical Society. Series B (Methodological)*, 52, 105-124.
- Johnson, N.L., 1949: Systems of frequency curves generated by methods of translation. *Biometrika*, 36, 149-176.
- Kolmogorov, A.M., 1961: A refinement of previous hypotheses concerning the local structure of turbulence in viscous incompressible fluid at high Reynolds number. *J. Fluid Mech.*, 177, 133-166.
- Patsika, C., and T. S. Karacostas, 2018: Modeling of precipitation based upon the upper-air synoptic circulation types. *Acta Geobalcanica*, Vol. 2, Issue 2, DOI: <https://doi.org/10.18509/AGB.2018.09>, UDC:551.578.1:551.506.3.
- Pearson, K., 1900: On the criterion that a given system of deviations from the probable in the case of a correlated system of variables is such that it can be reasonably supposed to have arisen from random sampling. *Phil. Mag.*, 50, 157-175. Reprinted in K. Pearson (1956), 339-357.
- RamachandraRao, A., Hamed, K.H., 2000: *Flood Frequency Analysis*. CRC Press, Boca Raton, Florida, USA, 6–7.
- Robert n. Rodriguez, 1977, A guide to the burr type xii distributions, *Biometrika*, Volume 64, Issue 1, April 1977, Pages 129–134



Τοπούζη Μαντιάνα

- Stigler, S.M., 1981: Gauss and the Invention of Least Squares. Ann. Stat., 9, 465–474.
- S.M. Papalexiou, and D. Koutsoyiannis 2009, An all-timescales rainfall probability distribution
- Pandu R. Tadikamalla, A Look at the Burr and Related Distributions, International Statistical Review / Revue Internationale de Statistique, 1980, pp. 337-344
- Δούκα Μαρία, Καρακώστας Θεόδωρος, 2018: Στατιστική Μελέτη των Έντονων Βροχοπτώσεων στη Θεσσαλονίκη για την χρονική περίοδο 1947-2003, Θεσσαλονίκη, 23- 41.
- Κολυβά-Μαχαίρα, Φ., 1998: Μαθηματική Στατιστική, Τόμος Ι, Εκτιμητική, Εκδόσεις Ζήτη, Θεσσαλονίκη, 40-41, 169 και 182-183.
- Φαρμάκης, Ν., 2001: Στατιστική, Περιληπτική Θεωρία, Ασκήσεις, Εκδόσεις Χριστοδουλίδη, Θεσσαλονίκη, 25-27.
- Φαρμάκης, Ν., 2009: Εισαγωγή στη Δειγματοληψία Εκδόσεις Χριστοδουλίδη, Θεσσαλονίκη, 45-47

Παράρτημα

Ακολουθούν οι πίνακες με την κατάταξη των κατανομών από τους τρεις ελέγχους καλής προσαρμογής σε ετήσια βάση.

#	Distribution	Αγρίνιο - ελάχιστες						Αλεξανδρούπολη - ελάχιστες					
		Kolmogorov Smirnov		Anderson Darling		Chi-Squared		Kolmogorov Smirnov		Anderson Darling		Chi-Squared	
		Statistic	Rank	Statistic	Rank	Statistic	Rank	Statistic	Rank	Statistic	Rank	Statistic	Rank
1	Beta	0.0887	6	19.33	5	234.4	4	0.0607	6	8.591	1	109.2	4
2	Burr (4P)	0.1165	21	37.47	19	280.9	14	0.0814	14	18.64	6	135.2	7
3	Cauchy	0.1576	28	57.12	24	577.5	28	0.1321	29	40.48	23	326.4	27
4	Chi-Squared (2P)	0.1216	22	38.09	20	299.6	18	0.1125	25	24.08	20	147.1	14
5	Dagum (4P)	0.2201	33	174.2	32	614.9	30	0.482	36	633.0	35	1423.0	32
6	Erlang (3P)	0.1946	31	90.69	29	419.9	25	0.0887	20	22.01	18	144.5	12
7	Error	0.056	3	18.61	1	183.0	1	0.0318	3	34.36	21	36.97	1
8	Error Function	0.2687	34	323.4	35	1319.0	32	0.1769	32	89.44	32	407.2	28
9	Exponential (2P)	0.1995	32	123.8	31	369.2	22	0.2497	33	171.4	33	525.2	30
10	Fatigue Life (3P)	0.1151	20	34.3	10	231.3	3	0.0811	13	20.86	14	164.1	18
11	Frechet (3P)	0.1223	23	37.33	18	269.7	12	0.0962	23	21.06	15	119.4	5
12	Gamma (3P)	0.1141	18	32.07	7	207.3	2	0.0882	19	20.03	9	145.2	13
13	Gen. Extreme Value	0.0978	9	32.51	8	309.5	19	0.068	8	15.87	4	140.4	9
14	Gen. Gamma (4P)	0.0866	5	18.76	3	252.0	8	0.058	5	12.26	3	136.1	8
15	Gen. Pareto	0.0546	2	43.48	22	N/A		0.0317	2	87.82	30	N/A	
16	Gumbel Max	0.1327	25	55.04	23	357.3	21	0.1244	28	43.6	24	273.9	24
17	Gumbel Min	0.1518	27	77.11	28	527.6	27	0.1189	27	49.84	27	325.4	26
18	Hypersecant	0.1442	26	71.77	27	485.9	26	0.1157	26	45.99	26	279.1	25
19	Inv. Gaussian (3P)	0.1147	19	34.72	11	241.1	7	0.0764	10	19.94	8	153.5	17
20	Johnson SB	0.0427	1	199.5	33	N/A		0.0309	1	75.86	29	N/A	
21	Kumaraswamy	0.0887	7	19.15	4	234.6	5	0.061	7	8.629	2	105.5	3
22	Laplace	0.1638	29	94.06	30	599.0	29	0.1387	30	64.37	28	408.9	29
23	LIV (2P)	0.4475	35	259.7	34	689.9	31	0.4784	35	306.3	34	1206.0	31
24	Log-Logistic (3P)	0.1069	10	35.01	12	256.4	11	0.0808	12	22.01	19	190.5	22
25	Logistic	0.1306	24	57.36	25	408.0	24	0.1003	24	34.73	22	230.7	23
26	Lognormal (3P)	0.1131	16	35.83	13	278.8	13	0.0833	17	20.15	11	143.2	11
27	Normal	0.1084	12	38.78	21	388.6	23	0.0781	11	20.66	13	173.6	19
28	Pearson 5 (3P)	0.1115	15	36.6	17	295.7	17	0.0894	21	20.61	12	141.3	10
29	Pearson 6 (4P)	0.1112	14	36.48	16	294.6	15	0.0827	16	20.11	10	147.7	15
30	Pert	0.1136	17	36.45	15	295.0	16	0.0852	18	21.16	16	174.7	20
31	Power Function	0.0923	8	18.65	2	255.6	9	0.0737	9	17.14	5	148.5	16
32	Rayleigh (2P)	0.1083	11	31.17	6	234.6	6	0.0917	22	21.45	17	91.12	2
33	Student's t	0.4808	36	1298.0	36	4364.0	33	0.4261	34	1099.0	36	4089.0	33
34	Triangular	0.1739	30	66.12	26	314.5	20	0.1389	31	44.31	25	179.3	21
35	INFORM	0.0561	4	36.28	14	N/A		0.0318	4	87.89	31	N/A	
36	Weibull (3P)	0.1085	13	32.62	9	255.6	10	0.0821	15	18.71	7	135.2	6
37	Burr	No fit (data min < 0)						No fit					
38	Chi-Squared	No fit (data min < 0)						No fit					
39	Dagum	No fit (data min < 0)						No fit					
40	Erlang	No fit (data min < 0)						No fit					
41	Exponential	No fit (data min < 0)						No fit					
42	Fatigue Life	No fit (data min < 0)						No fit					
43	Frechet	No fit (data min < 0)						No fit					
44	Gamma	No fit (data min < 0)						No fit					
45	Gen. Gamma	No fit (data min < 0)						No fit					
46	Inv. Gaussian	No fit (data min < 0)						No fit					
47	Johnson SU	No fit						No fit					
48	LIV	No fit (data min < 0)						No fit					
49	Log-Gamma	No fit						No fit					
50	Log-Logistic	No fit (data min < 0)						No fit					
51	Log-Pearson 3	No fit						No fit					
52	Lognormal	No fit (data min < 0)						No fit					
53	Nakagami	No fit						No fit					
54	Pareto	No fit						No fit					
55	Pareto 2	No fit						No fit					
56	Pearson 5	No fit (data min < 0)						No fit					
57	Pearson 6	No fit (data min < 0)						No fit					
58	Rayleigh	No fit (data min < 0)						No fit					
59	Reciprocal	No fit						No fit					
60	Rice	No fit						No fit					
61	Weibull	No fit (data min < 0)						No fit					

#	Distribution	Αγρίνιο - μέγιστες						Αλεξανδρούπολη - μέγιστες					
		Kolmogorov Smirnov		Anderson Darling		Chi-Squared		Kolmogorov Smirnov		Anderson Darling		Chi-Squared	
		Statistic	Rank	Statistic	Rank	Statistic	Rank	Statistic	Rank	Statistic	Rank	Statistic	Rank
1	Beta	0.0806	7	9.057	2	109.5	5	0.0618	5	8.882	3	126.4	6
2	Burr	0.0859	10	22.22	8	142.3	8	0.0931	18	21.51	10	145.2	9
3	Burr (4P)	0.118	31	24.5	20	195.4	33	0.1531	47	60.66	47	208.0	35
4	Cauchy	0.1402	45	40.06	41	252.1	39	0.1417	45	37.98	37	158.9	17
5	Chi-Squared	0.1354	43	27.66	31	153.4	10	0.1505	46	43.04	40	220.5	37
6	Chi-Squared (2P)	0.1392	44	29.72	36	172.8	18	0.1186	36	28.04	28	146.6	10
7	Dagum	0.1108	23	20.64	6	99.01	3	0.0896	12	17.08	5	78.45	1
8	Dagum (4P)	0.2115	53	101.7	52	359.7	47	0.4079	56	583.6	58	1607.0	52
9	Erlang	0.1316	42	28.99	35	181.0	20	0.176	51	58.33	46	278.9	44
10	Erlang (3P)	0.1566	50	36.6	39	194.6	32	0.0957	22	23.33	18	176.0	28
11	Error	0.0455	3	17.1	4	76.46	2	0.0474	3	18.75	7	136.8	8
12	Error Function	0.9898	59	8786.0	60	7.050E+5	55	0.9616	59	6736.0	60	1.603E+5	56
13	Exponential	0.4427	56	301.6	56	2773.0	52	0.4073	55	266.6	56	2151.0	53
14	Exponential (2P)	0.143	46	68.03	50	333.3	45	0.1698	50	88.57	52	291.6	45
15	Fatigue Life	0.1198	33	25.63	25	193.1	28	0.1137	35	27.99	27	157.4	16
16	Fatigue Life (3P)	0.098	16	23.72	14	167.5	15	0.0902	14	23.08	14	155.0	14
17	Frechet	0.1499	48	43.3	43	313.8	43	0.1584	48	49.94	43	277.8	43
18	Frechet (3P)	0.1221	34	25.97	28	186.8	23	0.1137	34	27.43	26	163.8	22
19	Gamma	0.1148	28	26.8	29	198.8	36	0.104	27	29.42	30	219.0	36
20	Gamma (3P)	0.1233	35	25.84	26	193.5	30	0.0897	13	23.33	17	165.1	23
21	Gen. Extreme Value	0.085	8	18.92	5	149.5	9	0.0809	8	17.46	6	115.6	3
22	Gen. Gamma	0.1123	24	24.6	21	188.7	24	0.1015	25	25.75	24	176.8	29
23	Gen. Gamma (4P)	0.0592	5	5.586	1	62.73	1	0.0664	7	7.321	1	80.2	2
24	Gen. Pareto	0.0456	4	47.42	45	N/A		0.0401	2	54.9	45	N/A	
25	Gumbel Max	0.145	47	48.15	47	334.5	46	0.1354	43	53.28	44	401.7	47
26	Gumbel Min	0.1314	40	44.28	44	293.4	42	0.1111	32	38.14	38	257.5	38
27	Hypersecant	0.1314	41	48.65	48	322.3	44	0.1219	39	45.37	42	321.4	46
28	Inv. Gaussian	0.1127	25	36.07	38	283.2	41	0.1193	37	38.46	39	272.7	42
29	Inv. Gaussian (3P)	0.0915	11	23.87	17	171.3	17	0.0948	21	23.24	16	160.2	19
30	Johnson SB	0.0297	1	98.12	51	N/A		0.0277	1	67.98	49	N/A	
31	Kumaraswamy	0.0801	6	9.059	3	107.8	4	0.062	6	8.866	2	125.1	4
32	Laplace	0.1557	49	66.81	49	452.5	49	0.1382	44	61.7	48	422.2	48
33	LIV	0.5743	58	437.9	58	4750.0	54	0.5638	58	400.3	57	3694.0	55
34	LIV (2P)	0.379	55	149.7	55	772.4	50	0.414	57	178.6	54	807.8	51
35	Log-Gamma	0.1251	37	27.85	32	191.9	26	0.122	40	31.66	31	189.4	33
36	Log-Logistic	0.1294	39	30.42	37	193.3	29	0.1211	38	31.67	32	189.3	32
37	Log-Logistic (3P)	0.0944	13	24.3	18	168.0	16	0.0868	11	22.88	12	147.7	11
38	Log-Pearson 3	0.1105	22	23.68	13	182.9	21	0.0942	20	23.18	15	161.7	20
39	Logistic	0.116	29	37.54	40	252.3	40	0.1082	30	35.4	36	261.8	40
40	Lognormal	0.1196	32	25.9	27	194.5	31	0.1126	33	28.15	29	159.2	18
41	Lognormal (3P)	0.1011	18	23.79	15	166.2	14	0.0928	16	23.02	13	167.0	24
42	Nakagami	0.1066	19	28.66	34	199.6	37	0.1101	31	32.38	35	259.5	39
43	Normal	0.0939	12	23.59	12	159.7	11	0.0902	15	22.69	11	149.9	12
44	Pareto	0.1963	52	116.0	54	407.0	48	0.2269	53	153.8	53	457.0	49
45	Pareto 2	0.4862	57	361.9	57	2869.0	53	0.3877	54	247.6	55	2216.0	54
46	Pearson 5	0.1264	38	27.91	33	192.6	27	0.1247	41	31.7	33	191.1	34
47	Pearson 5 (3P)	0.1082	21	24.44	19	184.3	22	0.0936	19	24.54	20	175.5	27
48	Pearson 6	0.1235	36	27.3	30	189.2	25	0.1019	26	26.05	25	182.4	30
49	Pearson 6 (4P)	0.1001	17	23.83	16	161.0	13	0.0961	23	24.3	19	170.3	25
50	Pert	0.1076	20	24.89	22	177.0	19	0.0963	24	21.29	9	153.0	13
51	Power Function	0.0973	15	21.27	7	N/A		0.0863	9	13.42	4	188.2	31
52	Rayleigh	0.2376	54	114.4	53	896.4	51	0.1968	52	85.98	51	775.6	50
53	Rayleigh (2P)	0.1147	27	25.18	24	195.9	34	0.1045	28	24.86	23	162.3	21
54	Reciprocal	0.097	14	23.34	11	219.0	38	0.1621	49	75.18	50	270.7	41
55	Rice	0.114	26	22.73	9	134.7	6	0.1055	29	24.59	21	130.0	7
56	Student's t	0.9982	60	7086.0	59	8.547E+5	56	0.9968	60	6586.0	59	5.747E+5	57
57	Triangular	0.1592	51	41.72	42	160.8	12	0.125	42	31.77	34	155.3	15
58	INFORM	0.0455	2	47.53	46	N/A		0.0475	4	44.53	41	N/A	
59	Weibull	0.085	9	23.11	10	140.1	7	0.0867	10	20.27	8	126.1	5
60	Weibull (3P)	0.1177	30	25.13	23	196.3	35	0.093	17	24.66	22	173.7	26
61	Johnson SU	No fit						No fit					

Μία Συγκριτική Μελέτη των Θεωρητικών Κατανομών Ακραίων Τιμών της Θερμοκρασίας
του Αέρα στη Βόρεια και Κεντρική Ελλάδα

#	Distribution	Ελληνικό- ελάχιστες						Κέρκυρα- ελάχιστες					
		Kolmogorov Smirnov		Anderson Darling		Chi-Squared		Kolmogorov Smirnov		Anderson Darling		Chi-Squared	
		Statistic	Rank	Statistic	Rank	Statistic	Rank	Statistic	Rank	Statistic	Rank	Statistic	Rank
1	Beta	0.0777	7	15.9	4	201.0	14	0.0694	7	10.42	3	135.4	2
2	Burr (4P)	0.0845	11	22.34	9	179.2	6	0.1358	24	43.32	23	144.5	4
3	Cauchy	0.1505	29	50.75	25	435.4	27	0.1426	27	47.49	24	263.0	23
4	Chi-Squared (2P)	0.1302	26	41.84	23	315.1	23	0.1163	20	30.98	11	197.3	12
5	Dagum (4P)	0.2779	33	308.5	34	757.8	31	0.2644	33	281.1	34	847.2	31
6	Erlang (3P)	0.1592	31	68.44	28	305.2	21	0.1447	29	36.11	21	209.8	21
7	Error	0.0636	3	14.12	1	140.0	1	0.0465	3	11.97	5	114.0	1
8	Error Function	0.4334	34	1042.0	35	3055.0	32	0.3496	34	691.0	35	2404.0	32
9	Exponential (2P)	0.1971	32	111.8	31	323.4	24	0.1569	32	97.92	31	269.3	24
10	Fatigue Life (3P)	0.0921	20	23.86	12	172.0	5	0.1037	15	30.94	10	197.3	13
11	Frechet (3P)	0.0935	21	25.12	16	198.2	13	0.1271	23	32.43	18	193.4	11
12	Gamma (3P)	0.0896	15	22.04	6	153.0	2	0.1218	21	29.9	9	184.4	10
13	Gen. Extreme Value	0.0844	9	23.7	11	237.5	19	0.0892	9	25.64	6	169.5	7
14	Gen. Gamma (4P)	0.0689	5	15.11	2	171.4	4	0.0698	8	11.28	4	154.1	6
15	Gen. Pareto	0.0482	2	54.29	26	N/A		0.0458	2	38.96	22	N/A	
16	Gumbel Max	0.1079	23	39.56	22	269.7	20	0.143	28	53.95	27	347.5	26
17	Gumbel Min	0.1423	28	77.64	30	506.0	29	0.1368	26	58.88	28	357.1	27
18	Hypersecant	0.1357	27	57.83	27	404.1	26	0.1362	25	60.68	29	400.9	28
19	Inv. Gaussian (3P)	0.0919	19	24.21	13	183.1	8	0.1052	16	31.49	17	203.3	18
20	Johnson SB	0.0431	1	180.8	32	N/A		0.0284	1	131.6	32	N/A	
21	Kumaraswamy	0.0774	6	15.81	3	196.6	12	0.0693	6	10.35	2	135.8	3
22	Laplace	0.1562	30	76.61	29	500.7	28	0.1554	31	80.94	30	547.2	30
23	LIV (2P)	0.4375	35	245.0	33	661.4	30	0.4236	35	206.7	33	530.1	29
24	Log-Logistic (3P)	0.0918	18	25.29	17	184.4	9	0.0996	11	31.08	14	203.0	17
25	Logistic	0.1209	25	45.91	24	351.1	25	0.1219	22	47.73	25	298.1	25
26	Lognormal (3P)	0.0906	17	25.06	15	201.6	15	0.1015	13	31.03	12	197.6	14
27	Normal	0.0984	22	30.62	21	310.0	22	0.0993	10	31.16	15	204.8	19
28	Pearson 5 (3P)	0.089	13	26.08	18	214.5	16	0.1101	17	31.44	16	202.5	16
29	Pearson 6 (4P)	0.0892	14	26.17	19	215.3	17	0.0997	12	31.04	13	205.1	20
30	Pert	0.0906	16	24.32	14	216.4	18	0.1015	14	33.28	19	210.7	22
31	Power Function	0.0824	8	17.05	5	187.6	10	0.0691	5	9.565	1	148.1	5
32	Rayleigh (2P)	0.0846	12	22.64	10	191.3	11	0.1129	19	28.98	7	180.2	8
33	Student's t	0.6912	36	2967.0	36	7910.0	33	0.5845	36	1879.0	36	5258.0	33
34	Triangular	0.1097	24	29.58	20	167.9	3	0.1553	30	50.09	26	198.2	15
35	INFORM	0.0637	4	22.08	7	N/A		0.0466	4	35.22	20	N/A	
36	Weibull (3P)	0.0844	10	22.13	8	181.3	7	0.1126	18	29.12	8	181.6	9
37	Burr	No fit						No fit					
38	Chi-Squared	No fit						No fit					
39	Dagum	No fit						No fit					
40	Erlang	No fit						No fit					
41	Exponential	No fit						No fit					
42	Fatigue Life	No fit						No fit					
43	Frechet	No fit						No fit					
44	Gamma	No fit						No fit					
45	Gen. Gamma	No fit						No fit					
46	Inv. Gaussian	No fit						No fit					
47	Johnson SU	No fit						No fit					
48	LIV	No fit						No fit					
49	Log-Gamma	No fit						No fit					
50	Log-Logistic	No fit						No fit					
51	Log-Pearson 3	No fit						No fit					
52	Lognormal	No fit						No fit					
53	Nakagami	No fit						No fit					
54	Pareto	No fit						No fit					
55	Pareto 2	No fit						No fit					
56	Pareto 5	No fit						No fit					
57	Pearson 6	No fit						No fit					
58	Rayleigh	No fit						No fit					
59	Reciprocal	No fit						No fit					
60	Rice	No fit						No fit					
61	Weibull	No fit						No fit					

#	Distribution	Ελληνικό - μέγιστες						Κέρκυρα - μέγιστες					
		Kolmogorov Smirnov		Anderson Darling		Chi-Squared		Kolmogorov Smirnov		Anderson Darling		Chi-Squared	
		Statistic	Rank	Statistic	Rank	Statistic	Rank	Statistic	Rank	Statistic	Rank	Statistic	Rank
1	Beta	0.065	6	9.067	2	117.2	3	0.0618	7	8.556	3	127.7	5
2	Burr	0.0834	17	15.65	7	131.6	9	0.0951	29	19.23	7	151.9	10
3	Burr (4P)	0.0835	18	19.76	21	176.3	19	0.0963	31	22.24	19	187.8	34
4	Cauchy	0.135	47	34.03	41	260.6	43	0.143	49	37.37	42	286.3	44
5	Chi-Squared	0.0873	20	19.66	20	220.9	34	0.0744	9	16.35	5	155.5	11
6	Chi-Squared (2P)	0.1202	43	27.17	36	177.2	20	0.1031	38	23.85	29	147.6	8
7	Dagum	0.0919	24	15.3	6	108.2	2	0.0823	12	23.03	26	196.7	37
8	Dagum (4P)	0.5106	57	860.8	58	2826.0	52	0.6381	58	1594.0	58	6792.0	55
9	Erlang	0.1654	50	52.17	46	209.7	31	0.0974	34	23.94	30	159.5	13
10	Erlang (3P)	0.0906	22	19.84	23	186.0	23	0.0948	28	29.23	37	301.7	46
11	Error	0.0546	3	15.79	8	65.58	1	0.0429	3	33.42	39	60.08	2
12	Error Function	0.9969	59	1.010E+4	60	2.385E+6	57	0.9932	59	9039.0	60	1.070E+6	57
13	Exponential	0.4549	55	289.3	55	2836.0	53	0.4546	56	299.9	56	2586.0	52
14	Exponential (2P)	0.1834	51	77.83	49	385.3	48	0.1464	50	60.28	47	332.1	47
15	Fatigue Life	0.1011	31	23.95	27	225.1	37	0.093	27	22.57	23	173.2	21
16	Fatigue Life (3P)	0.0788	12	18.36	14	168.7	13	0.0839	14	21.55	14	166.4	18
17	Frechet	0.152	49	47.68	44	312.2	45	0.1387	48	39.66	43	241.8	40
18	Frechet (3P)	0.106	35	25.33	32	246.2	42	0.0999	36	23.32	28	181.1	31
19	Gamma	0.0971	28	24.12	29	193.7	25	0.0884	22	23.24	27	183.4	32
20	Gamma (3P)	0.0892	21	19.84	22	196.5	26	0.1076	42	24.0	31	184.9	33
21	Gen. Extreme Value	0.067	7	12.34	3	132.7	10	0.0726	8	16.94	6	141.3	6
22	Gen. Gamma	0.094	27	21.74	25	204.3	29	0.0861	18	21.65	15	178.0	28
23	Gen. Gamma (4P)	0.1325	46	44.11	43	231.4	40	0.045	5	4.616	1	54.97	1
24	Gen. Pareto	0.0407	2	102.3	51	N/A		0.0371	2	62.25	49	N/A	
25	Gumbel Max	0.132	45	52.24	47	334.2	47	0.1184	43	42.74	44	291.4	45
26	Gumbel Min	0.1066	37	25.93	33	159.9	11	0.1356	46	42.77	45	263.6	41
27	Hypersecant	0.1157	41	36.98	42	245.1	41	0.1219	44	44.24	46	273.7	42
28	Inv. Gaussian	0.1097	39	30.5	39	290.5	44	0.1046	40	31.87	38	275.1	43
29	Inv. Gaussian (3P)	0.0775	9	18.05	11	170.6	14	0.091	25	22.84	24	197.0	38
30	Johnson SB	0.0382	1	94.19	50	N/A		0.0314	1	83.07	51	N/A	
31	Kumaraswamy	0.0644	5	9.003	1	117.7	4	0.061	6	8.543	2	120.8	4
32	Laplace	0.1393	48	50.61	45	325.2	46	0.1467	51	61.28	48	389.3	49
33	Levy	0.5868	58	405.6	57	4806.0	55	0.5712	57	432.7	57	4439.0	54
34	Levy (2P)	0.3941	54	147.7	54	853.5	50	0.3645	54	139.2	54	784.9	50
35	Log-Gamma	0.1063	36	26.62	34	222.2	36	0.0993	35	24.51	33	172.1	20
36	Log-Logistic	0.1105	40	27.28	37	198.8	27	0.1036	39	27.69	35	194.0	35
37	Log-Logistic (3P)	0.0797	15	18.55	16	179.9	21	0.0788	10	22.11	17	175.0	23
38	Log-Pearson 3	0.0842	19	18.52	15	181.8	22	0.0859	17	21.23	10	175.3	25
39	Logistic	0.1005	29	28.6	38	201.7	28	0.1067	41	33.88	40	218.6	39
40	Lognormal	0.1006	30	24.01	28	220.9	35	0.093	26	22.84	25	175.7	26
41	Lognormal (3P)	0.0792	13	18.57	17	171.7	17	0.08	11	21.3	11	158.7	12
42	Nakagami	0.0926	25	24.93	31	205.8	30	0.084	15	24.24	32	174.9	22
43	Normal	0.0779	10	18.05	10	170.7	15	0.0849	16	20.93	9	159.6	14
44	Pareto	0.2156	52	118.6	52	470.4	49	0.1848	52	103.7	52	367.5	48
45	Pareto 2	0.4926	56	335.6	56	2930.0	54	0.4475	55	292.5	55	2587.0	53
46	Pearson 5	0.108	38	26.99	35	231.0	39	0.1021	37	24.63	34	171.2	19
47	Pearson 5 (3P)	0.0918	23	20.67	24	187.4	24	0.0829	13	21.33	12	164.9	17
48	Pearson 6	0.1048	33	24.46	30	217.5	33	0.0873	19	22.18	18	176.2	27
49	Pearson 6 (4P)	0.0785	11	18.15	13	170.8	16	0.0877	20	22.02	16	175.3	24
50	Pert	0.0794	14	14.68	4	120.4	5	0.0965	32	22.47	20	164.0	16
51	Power Function	0.1168	42	17.42	9	172.1	18	0.1339	45	28.01	36	195.2	36
52	Rayleigh	0.2523	53	126.3	53	1024.0	51	0.2512	53	117.3	53	819.9	51
53	Rayleigh (2P)	0.1013	32	23.2	26	225.3	38	0.0881	21	22.57	22	178.8	29
54	Reciprocal	0.1249	44	33.24	40	212.8	32	0.091	24	15.92	4	161.5	15
55	Rice	0.0933	26	18.07	12	122.0	6	0.0889	23	19.54	8	93.98	3
56	Student's t	0.9982	60	6295.0	59	8.717E+5	56	0.9981	60	6794.0	59	7.950E+5	56
57	Triangular	0.1057	34	19.48	19	126.3	7	0.1384	47	34.18	41	143.8	7
58	Uniform	0.0547	4	55.73	48	N/A		0.043	4	77.37	50	N/A	
59	Weibull	0.0763	8	14.84	5	131.4	8	0.0967	33	21.52	13	150.8	9
60	Weibull (3P)	0.0819	16	19.03	18	166.3	12	0.0956	30	22.51	21	180.7	30
61	Johnson SU	No fit						No fit					

Μία Συγκριτική Μελέτη των Θεωρητικών Κατανομών Ακραίων Τιμών της Θερμοκρασίας
του Αέρα στη Βόρεια και Κεντρική Ελλάδα

#	Distribution	Φλώρινα- ελάχιστες						Λάρισα - ελάχιστες					
		Kolmogorov Smirnov		Anderson Darling		Chi-Squared		Kolmogorov Smirnov		Anderson Darling		Chi-Squared	
		Statistic	Rank	Statistic	Rank	Statistic	Rank						
1	Beta	0.0498	3	7.403	2	96.55	3	0.1021	17	22.12	3	278.3	19
2	Burr (4P)	0.1533	32	82.2	30	193.7	22	0.1091	21	33.46	20	106.0	1
3	Cauchy	0.1503	31	43.95	25	310.3	26	0.1339	28	48.06	23	562.8	27
4	Chi-Squared (2P)	0.1136	27	30.0	21	142.1	12	0.1164	25	30.44	19	235.9	6
5	Dagum (4P)	0.7987	36	2937.0	36	1.356E+4	33	0.1071	20	30.17	18	265.3	16
6	Erlang (3P)	0.0778	10	21.26	7	136.6	9	0.1067	19	27.11	16	248.7	9
7	Error	0.0576	6	25.72	19	46.91	1	0.0556	3	24.16	11	131.2	2
8	Error Function	0.0963	21	23.81	17	164.9	18	0.1676	32	92.58	32	511.1	26
9	Exponential (2P)	0.2734	33	214.2	33	606.7	30	0.3369	34	247.2	34	906.8	30
10	Fatigue Life (3P)	0.0889	15	22.75	13	160.9	15	0.086	8	23.72	9	256.0	14
11	Frechet (3P)	0.1085	25	26.31	20	86.2	2	0.1687	33	55.9	27	N/A	
12	Gamma (3P)	0.0932	20	23.39	16	153.8	13	0.0851	7	23.16	7	237.5	7
13	Gen. Extreme Value	0.0653	8	16.38	5	129.4	7	0.0796	5	20.06	2	232.5	5
14	Gen. Gamma (4P)	0.0717	9	13.81	4	140.6	11	0.0886	12	23.36	8	245.1	8
15	Gen. Pareto	0.0329	2	114.4	31	N/A		0.0469	1	98.86	33	N/A	
16	Gumbel Max	0.1294	29	56.66	27	292.3	25	0.1153	24	38.13	21	250.8	10
17	Gumbel Min	0.1025	24	42.37	24	329.9	28	0.1331	27	66.72	29	631.2	29
18	Hypersecant	0.1254	28	48.63	26	324.6	27	0.1292	26	52.52	25	474.7	25
19	Inv. Gaussian (3P)	0.0845	13	22.38	10	166.3	19	0.0982	15	24.73	13	255.8	13
20	Johnson SB	0.0312	1	66.44	28	N/A		0.0496	2	60.78	28	N/A	
21	Kumaraswamy	0.0501	4	7.4	1	98.65	4	0.103	18	22.38	4	275.3	18
22	Laplace	0.1454	30	67.75	29	437.2	29	0.1472	30	72.04	31	596.8	28
23	Levy (2P)	0.4989	35	348.0	34	1203.0	31	0.5171	36	398.6	35	1713.0	31
24	Log-Logistic (3P)	0.0824	12	24.02	18	183.5	21	0.0869	10	24.58	12	251.5	11
25	Logistic	0.1104	26	36.97	22	254.4	24	0.1148	23	40.5	22	389.1	23
26	Lognormal (3P)	0.0898	18	23.17	15	156.9	14	0.0868	9	23.86	10	258.2	15
27	Normal	0.0877	14	22.59	11	162.7	17	0.0922	13	25.54	14	291.9	21
28	Pearson 5 (3P)	0.0926	19	22.85	14	134.7	8	0.0841	6	22.96	6	229.7	4
29	Pearson 6 (4P)	0.089	16	22.71	12	162.2	16	0.0926	14	16.83	1	137.4	3
30	Pert	0.0894	17	22.14	8	214.1	23	0.0991	16	27.03	15	327.2	22
31	Power Function	0.0555	5	8.457	3	112.4	6	0.1129	22	28.11	17	284.3	20
32	Rayleigh (2P)	0.1019	23	41.32	23	103.6	5	0.1405	29	55.23	26	254.4	12
33	Student's t	0.3782	34	1213.0	35	4577.0	32	0.4086	35	1107.0	36	4212.0	32
34	Triangular	0.0965	22	19.78	6	137.4	10	0.1542	31	51.21	24	416.7	24
35	Uniform	0.0599	7	179.8	32	N/A		0.0575	4	69.73	30	N/A	
36	Weibull (3P)	0.0797	11	22.31	9	168.6	20	0.0876	11	22.77	5	270.3	17
37	Burr	No fit						0.1021	17	22.12	3	278.3	19
38	Chi-Squared	No fit						No fit					
39	Dagum	No fit						No fit					
40	Erlang	No fit						No fit					
41	Exponential	No fit						No fit					
42	Fatigue Life	No fit						No fit					
43	Frechet	No fit						No fit					
44	Gamma	No fit						No fit					
45	Gen. Gamma	No fit						No fit					
46	Inv. Gaussian	No fit						No fit					
47	Johnson SU	No fit						No fit					
48	Levy	No fit						No fit					
49	Log-Gamma	No fit						No fit					
50	Log-Logistic	No fit						No fit					
51	Log-Pearson 3	No fit						No fit					
52	Lognormal	No fit						No fit					
53	Nakagami	No fit						No fit					
54	Pareto	No fit						No fit					
55	Pareto 2	No fit						No fit					
56	Pearson 5	No fit						No fit					
57	Pearson 6	No fit						No fit					
58	Rayleigh	No fit						No fit					
59	Reciprocal	No fit						No fit					
60	Rice	No fit						No fit					
61	Weibull	No fit						No fit					

#	Distribution	Φλώρινα - μέγιστες						Λάρισα - μέγιστες					
		Kolmogorov Smirnov		Anderson Darling		Chi-Squared		Kolmogorov Smirnov		Anderson Darling		Chi-Squared	
		Statistic	Rank	Statistic	Rank	Statistic	Rank	Statistic	Rank	Statistic	Rank	Statistic	Rank
1	Beta	0.0658	6	8.164	2	113.8	3	0.0802	7	11.21	3	172.8	5
2	Burr	0.0824	9	19.69	7	133.9	8	0.1007	9	24.71	7	238.3	9
3	Burr (4P)	0.1324	43	40.02	38	235.2	37	0.1156	22	25.56	9	245.6	11
4	Cauchy	0.1302	42	38.73	37	195.0	28	0.1372	43	43.42	39	477.3	48
5	Chi-Squared	0.1382	46	53.26	43	340.0	43	0.1656	50	49.6	42	320.3	42
6	Chi-Squared (2P)	0.1336	44	32.04	32	168.6	24	0.1245	33	28.01	27	266.2	21
7	Dagum	0.129	41	34.54	35	130.8	7	0.1096	17	23.19	5	171.9	4
8	Dagum (4P)	0.79	58	2126.0	58	9367.0	54	0.312	54	408.2	57	1187.0	52
9	Erlang	0.2032	52	97.09	50	376.5	44	0.1712	51	49.75	43	297.1	39
10	Erlang (3P)	0.0858	12	21.71	14	157.0	21	0.1219	30	27.16	22	273.1	29
11	Error	0.0447	3	18.19	5	99.0	1	0.0488	3	23.48	6	105.1	1
12	Error Function	0.9161	59	5784.0	59	6.774E+4	55	0.9646	59	7139.0	59	1.659E+5	56
13	Exponential	0.3647	55	260.2	56	1910.0	51	0.4049	55	286.2	55	2521.0	53
14	Exponential (2P)	0.1722	50	106.0	51	406.8	45	0.1613	48	93.01	51	430.0	46
15	Fatigue Life	0.1126	32	27.18	25	188.9	26	0.1234	32	28.04	28	274.2	31
16	Fatigue Life (3P)	0.0918	16	21.34	12	150.2	15	0.107	15	26.82	16	255.3	17
17	Frechet	0.1452	47	53.46	44	297.7	40	0.1479	46	45.02	40	249.1	14
18	Frechet (3P)	0.12	36	29.82	28	198.1	31	0.1217	29	27.73	26	295.0	38
19	Gamma	0.1114	28	28.91	27	197.5	30	0.1215	28	30.28	30	279.1	33
20	Gamma (3P)	0.0983	22	22.12	17	148.5	14	0.1212	27	27.08	20	266.4	23
21	Gen. Extreme Value	0.0742	8	16.04	4	126.7	5	0.0924	8	21.66	4	269.3	26
22	Gen. Gamma	0.1063	26	24.26	23	164.8	23	0.1179	25	27.21	23	273.7	30
23	Gen. Gamma (4P)	0.0722	7	13.87	3	N/A		0.0693	5	8.484	1	109.9	2
24	Gen. Pareto	0.0347	2	84.19	48	N/A		0.0493	4	67.97	48	N/A	
25	Gumbel Max	0.1345	45	51.12	42	337.7	42	0.1458	45	50.32	44	348.4	43
26	Gumbel Min	0.1065	27	40.14	39	255.9	38	0.1344	40	48.78	41	298.1	40
27	Hypersecant	0.1274	40	45.19	41	311.3	41	0.1401	44	53.97	45	379.6	45
28	Inv. Gaussian	0.125	39	41.17	40	262.7	39	0.1328	38	37.35	36	311.2	41
29	Inv. Gaussian (3P)	0.0881	14	21.12	10	152.1	17	0.1027	13	26.92	17	271.2	28
30	Johnson SB	0.0295	1	86.99	49	N/A		0.04	1	103.6	52	N/A	
31	Kumaraswamy	0.0649	5	8.122	1	113.6	2	0.0792	6	11.18	2	167.4	3
32	Laplace	0.1491	48	62.33	46	428.4	47	0.1618	49	72.65	49	480.1	49
33	Levy	0.5451	57	407.6	57	3484.0	53	0.558	58	431.3	58	4341.0	55
34	Levy (2P)	0.4207	56	206.9	54	971.0	50	0.4095	56	193.4	54	968.9	51
35	Log-Gamma	0.1187	34	32.0	31	211.9	33	0.128	37	30.71	32	279.8	34
36	Log-Logistic	0.1217	38	31.36	29	205.7	32	0.1328	39	33.74	35	285.7	36
37	Log-Logistic (3P)	0.0872	13	22.11	16	144.0	11	0.1019	11	27.45	24	280.2	35
38	Log-Pearson 3	0.098	21	20.97	9	153.1	18	0.1153	21	25.95	11	268.4	25
39	Logistic	0.1121	31	34.59	36	229.2	36	0.1248	34	41.99	38	294.9	37
40	Lognormal	0.1114	29	27.26	26	187.7	25	0.1231	31	28.42	29	278.8	32
41	Lognormal (3P)	0.0945	17	22.01	15	145.3	13	0.1087	16	27.01	19	267.3	24
42	Nakagami	0.1048	24	32.91	34	227.2	35	0.1153	20	33.52	34	270.1	27
43	Normal	0.0896	15	21.2	11	143.4	10	0.1023	12	26.71	15	265.8	20
44	Pareto	0.2459	53	198.3	53	582.3	48	0.2372	53	164.6	53	457.6	47
45	Pareto 2	0.3595	54	254.4	55	1933.0	52	0.45	57	350.8	56	2578.0	54
46	Pareto 5	0.1187	35	32.11	33	217.6	34	0.1278	36	30.51	31	266.4	22
47	Pareto 5 (3P)	0.0967	19	22.87	21	155.4	20	0.1184	26	27.48	25	264.3	19
48	Pareto 6	0.1062	25	24.21	22	164.4	22	0.1355	41	30.75	33	257.5	18
49	Pareto 6 (4P)	0.0947	18	21.54	13	145.3	12	0.1054	14	26.94	18	247.5	12
50	Pert	0.0825	10	19.79	8	123.3	4	0.1099	18	26.7	14	252.6	15
51	Power Function	0.1115	30	22.42	20	195.6	29	0.1148	19	25.43	8	229.3	7
52	Rayleigh	0.1502	49	66.52	47	644.4	49	0.1953	52	91.78	50	834.2	50
53	Rayleigh (2P)	0.1048	23	22.14	19	151.7	16	0.1174	24	25.78	10	247.6	13
54	Reciprocal	0.1854	51	115.6	52	408.8	46	0.1362	42	63.67	47	360.3	44
55	Rice	0.1165	33	24.96	24	137.2	9	0.1251	35	27.12	21	224.3	6
56	Student's t	0.995	60	7043.0	60	5.511E+5	56	0.9975	60	7334.0	60	7.511E+5	57
57	Triangular	0.1216	37	31.41	30	192.0	27	0.154	47	39.3	37	237.8	8
58	Uniform	0.0448	4	54.45	45	N/A		0.0488	2	60.57	46	N/A	
59	Weibull	0.0852	11	19.09	6	126.9	6	0.1012	10	26.0	12	254.5	16
60	Weibull (3P)	0.0978	20	22.12	18	153.4	19	0.1167	23	26.03	13	243.5	10
61	Johnson SU	No fit						No fit					

Μία Συγκριτική Μελέτη των Θεωρητικών Κατανομών Ακραίων Τιμών της Θερμοκρασίας
του Αέρα στη Βόρεια και Κεντρική Ελλάδα

		Θεσσαλονίκη - ελάχιστες								Θεσσαλονίκη - μέγιστες					
#	Distribution	Kolmogorov Smirnov		Anderson Darling		Chi-Squared		Distribution	Kolmogorov Smirnov		Anderson Darling		Chi-Squared		
		Statistic	Rank	Statistic	Rank	Statistic	Rank		Statistic	Rank	Statistic	Rank	Statistic	Rank	
1	Beta	0.0859	7	17.44	2	233.1	8	Beta	0.0749	7	11.35	3	152.2	4	
2	Burr (4P)	0.0889	9	23.83	6	214.5	4	Burr	0.0936	10	23.14	8	190.8	8	
3	Cauchy	0.1391	29	49.83	23	577.0	28	Burr (4P)	0.107	23	24.92	21	213.9	15	
4	Chi-Squared (2P)	0.1108	24	29.12	16	241.0	12	Cauchy	0.132	42	41.09	41	402.6	46	
5	Dagum (4P)	0.3295	34	542.2	35	1440.0	32	Chi-Squared	0.1461	47	37.66	37	225.8	24	
6	Erlang (3P)	0.1043	23	31.02	19	240.0	10	Chi-Squared (2P)	0.114	31	25.87	25	226.7	25	
7	Error	0.0397	3	30.32	18	94.17	1	Dagum	0.1071	24	21.07	6	161.3	5	
8	Error Function	0.2699	32	366.9	33	1260.0	30	Dagum (4P)	0.3201	54	402.2	57	1160.0	52	
9	Exponential (2P)	0.2854	33	217.6	32	692.3	29	Erlang	0.1476	48	38.39	39	223.9	20	
10	Fatigue Life (3P)	0.091	13	28.84	14	272.9	17	Erlang (3P)	0.1083	27	27.37	29	267.0	40	
11	Frechet (3P)	0.0998	20	26.57	8	167.3	2	Error	0.0417	3	20.82	5	103.5	1	
12	Gamma (3P)	0.0964	19	27.84	9	240.4	11	Error Function	0.9674	59	7401.0	60	1.964E+5	56	
13	Gen. Extreme Value	0.0791	6	23.31	5	234.3	9	Exponential	0.4153	56	285.3	56	2553.0	53	
14	Gen. Gamma (4P)	0.0689	5	19.85	4	241.1	13	Exponential (2P)	0.1665	51	101.6	52	445.8	47	
15	Gen. Pareto	0.0391	1	72.23	29	N/A		Fatigue Life	0.1142	32	26.24	27	231.9	29	
16	Gumbel Max	0.1267	28	51.03	24	322.2	21	Fatigue Life (3P)	0.0983	15	24.8	19	206.5	12	
17	Gumbel Min	0.1235	26	64.04	27	515.8	26	Frechet	0.1456	46	43.75	42	260.1	39	
18	Hypersecant	0.1256	27	59.58	26	459.2	25	Frechet (3P)	0.1143	33	25.96	26	240.7	33	
19	Inv. Gaussian (3P)	0.0932	16	28.83	13	264.0	15	Gamma	0.1113	28	28.17	30	243.2	34	
20	Johnson SB	0.0394	2	115.3	31	N/A		Gamma (3P)	0.1051	20	24.77	18	216.2	18	
21	Kumaraswamy	0.0865	8	17.39	1	228.5	6	Gen. Extreme Value	0.084	8	19.65	4	219.3	19	
22	Laplace	0.1449	30	81.33	30	533.8	27	Gen. Gamma	0.1074	25	25.29	23	236.6	32	
23	Levy (2P)	0.5095	35	385.6	34	1354.0	31	Gen. Gamma (4P)	0.0651	5	8.249	1	108.8	2	
24	Log-Logistic (3P)	0.0914	14	29.49	17	307.2	20	Gen. Pareto	0.0391	2	63.51	47	N/A		
25	Logistic	0.1114	25	46.11	22	390.4	24	Gumbel Max	0.1375	44	48.42	44	314.3	43	
26	Lognormal (3P)	0.0919	15	28.35	10	267.3	16	Gumbel Min	0.1261	40	45.44	43	284.8	42	
27	Normal	0.0891	10	29.09	15	290.5	19	Hypersecant	0.1331	43	50.32	45	323.6	44	
28	Pearson 5 (3P)	0.1003	21	28.4	11	248.6	14	Inv. Gaussian	0.1215	37	34.75	36	254.1	38	
29	Pearson 6 (4P)	0.0901	12	28.67	12	278.7	18	Inv. Gaussian (3P)	0.0952	12	24.37	14	214.1	16	
30	Pert	0.1033	22	33.02	20	333.9	23	Johnson SB	0.0376	1	98.61	51	N/A		
31	Power Function	0.0941	18	18.96	3	226.5	5	Kumaraswamy	0.0738	6	11.31	2	150.1	3	
32	Rayleigh (2P)	0.0935	17	36.53	21	195.9	3	Laplace	0.1524	50	68.4	48	448.9	48	
33	Student's t	0.5252	36	1684.0	36	5456.0	33	Levy	0.5625	58	425.5	58	4418.0	55	
34	Triangular	0.1521	31	51.81	25	323.7	22	Levy (2P)	0.4233	57	204.1	54	1093.0	51	
35	Uniform	0.0398	4	68.47	28	N/A		Log-Gamma	0.1205	36	28.87	32	227.4	26	
36	Weibull (3P)	0.0894	11	26.24	7	229.5	7	Log-Logistic	0.1242	39	31.65	34	247.8	36	
37	Burr	No fit						Log-Logistic (3P)	0.0943	11	25.42	24	225.8	23	
38	Chi-Squared	No fit						Log-Pearson 3	0.1041	18	23.91	9	228.8	28	
39	Dagum	No fit						Logistic	0.1184	35	38.95	40	251.9	37	
40	Erlang	No fit						Lognormal	0.1137	30	26.55	28	232.6	30	
41	Exponential	No fit						Lognormal (3P)	0.1005	17	24.76	17	211.1	13	
42	Fatigue Life	No fit						Nakagami	0.1075	26	31.0	33	232.8	31	
43	Frechet	No fit						Normal	0.0957	13	24.55	15	202.1	10	
44	Gamma	No fit						Pareto	0.2417	53	173.9	53	542.3	49	
45	Gen. Gamma	No fit						Pareto 2	0.4061	55	275.5	55	2575.0	54	
46	Inv. Gaussian	No fit						Pearson 5	0.1216	38	28.7	31	224.9	22	
47	Johnson SU	No fit						Pearson 5 (3P)	0.1004	16	24.72	16	224.8	21	
48	Levy	No fit						Pearson 6	0.1068	21	25.05	22	228.8	27	
49	Log-Gamma	No fit						Pearson 6 (4P)	0.1123	29	24.1	12	244.8	35	
50	Log-Logistic	No fit						Pert	0.0975	14	24.13	13	191.6	9	
51	Log-Pearson 3	No fit						Power Function	0.1315	41	32.47	35	272.2	41	
52	Lognormal	No fit						Rayleigh	0.2065	52	95.72	50	896.9	50	
53	Nakagami	No fit						Rayleigh (2P)	0.1068	22	23.0	7	214.3	17	
54	Pareto	No fit						Reciprocal	0.1432	45	71.91	49	390.6	45	
55	Pareto 2	No fit						Rice	0.116	34	24.9	20	173.5	6	
56	Pearson 5	No fit						Student's t	0.997	60	6978.0	59	6.416E+5	57	
57	Pearson 6	No fit						Triangular	0.1487	49	38.08	38	205.9	11	
58	Rayleigh	No fit						Uniform	0.0418	4	59.87	46	N/A		
59	Reciprocal	No fit						Weibull	0.0934	9	24.03	10	189.3	7	
60	Rice	No fit						Weibull (3P)	0.1048	19	24.09	11	212.1	14	
61	Weibull	No fit						Johnson SU	No fit						

Ακολουθούν οι πίνακες με την κατάταξη των κατανομών από τους τρεις ελέγχους καλής προσαρμογής σε εποχιακή βάση για την Θεσσαλονίκη.

#	Distribution	Χειμώνας - ελάχιστες						Άνοιξη - ελάχιστες					
		Kolmogorov Smirnov		Anderson Darling		Chi-Squared		Kolmogorov Smirnov		Anderson Darling		Chi-Squared	
		Statistic	Rank	Statistic	Rank	Statistic	Rank	Statistic	Rank	Statistic	Rank	Statistic	Rank
1	Beta	0.032	2	0.2896	2	11.64	6	0.0874	22	2.855	17	30.46	20
2	Burr (4P)	0.1649	28	19.25	23	117.4	26	0.0649	9	2.22	8	24.98	16
3	Cauchy	0.118	24	8.406	22	38.91	20	0.1033	26	7.759	26	29.88	19
4	Chi-Squared (2P)	0.242	31	42.64	29	260.4	27	0.0761	18	2.666	15	11.17	2
5	Dagum (4P)	0.1065	21	5.405	14	31.03	16	0.4394	34	173.6	35	383.6	32
6	Erlang (3P)	0.0942	17	6.066	19	26.87	13	0.0634	7	2.035	5	19.2	6
7	Error	0.1129	23	5.963	17	45.15	21	0.0519	1	1.521	1	17.5	3
8	Error Function	0.7261	35	620.1	35	2279.0	31	0.2861	32	105.5	34	239.9	31
9	Exponential (2P)	0.4107	33	95.67	32	477.6	29	0.2964	33	57.02	32	204.4	30
10	Fatigue Life (3P)	0.0854	11	4.803	11	21.05	9	0.0673	16	2.418	13	22.81	13
11	Frechet (3P)	0.228	30	36.85	28	N/A		0.0856	21	3.262	20	9.246	1
12	Gamma (3P)	0.0881	14	5.586	15	24.39	12	0.0618	6	2.009	4	18.77	5
13	Gen. Extreme Value	0.0416	6	23.73	27	N/A		0.0579	4	1.795	3	22.67	12
14	Gen. Gamma (4P)	0.0706	8	2.435	6	10.44	4	0.0666	13	2.32	10	22.39	10
15	Gen. Pareto	0.1008	19	122.7	33	N/A		0.0548	3	47.38	30	N/A	
16	Gumbel Max	0.154	26	21.5	26	87.5	23	0.0916	24	6.475	23	31.99	22
17	Gumbel Min	0.0368	3	0.2924	3	5.798	1	0.1192	29	12.97	29	76.45	29
18	Hypersecant	0.1087	22	5.61	16	37.37	19	0.0926	25	6.161	22	44.2	25
19	Inv. Gaussian (3P)	0.0867	12	4.961	12	20.76	8	0.0639	8	2.319	9	22.53	11
20	Johnson SB	0.03	1	0.2372	1	10.56	5	0.0525	2	1.625	2	19.98	8
21	Kumaraswamy	0.038	5	0.3304	5	5.901	2	0.0891	23	2.97	18	31.58	21
22	Laplace	0.1345	25	8.175	21	67.9	22	0.1103	27	9.378	27	65.42	28
23	Levy (2P)	0.5683	34	123.6	34	1050.0	30	0.4854	35	90.83	33	437.0	33
24	Log-Logistic (3P)	0.0645	7	3.177	7	23.64	11	0.0664	12	2.766	16	19.82	7
25	Logistic	0.0934	16	4.741	10	27.68	14	0.0816	20	4.41	21	32.81	23
26	Lognormal (3P)	0.0869	13	5.273	13	21.47	10	0.065	10	2.203	6	22.29	9
27	Normal	0.0833	10	4.675	9	18.21	7	0.0673	17	2.449	14	23.95	15
28	Pearson 5 (3P)	0.1004	18	6.707	20	31.03	17	0.0667	14	2.21	7	18.07	4
29	Pearson 6 (4P)	0.0901	15	6.059	18	27.94	15	0.0672	15	2.377	12	23.47	14
30	Pert	0.0734	9	4.545	8	33.84	18	0.0762	19	3.004	19	34.07	24
31	Power Function	0.197	29	20.87	25	110.7	24	0.1241	30	7.073	25	53.94	27
32	Rayleigh (2P)	0.2917	32	55.59	30	320.6	28	0.116	28	10.05	28	29.75	18
33	Student's t	0.8213	36	664.5	36	3091.0	32	0.528	36	339.8	36	1034.0	34
34	Triangular	0.1575	27	20.33	24	111.0	25	0.1298	31	6.758	24	52.49	26
35	Uniform	0.1051	20	67.79	31	N/A		0.0591	5	47.48	31	N/A	
36	Weibull (3P)	0.0369	4	0.3135	4	6.934	3	0.0658	11	2.346	11	25.89	17
37	Burr	No fit						0.0874	22	2.855	17	30.46	20
38	Chi-Squared	No fit						No fit					
39	Dagum	No fit						No fit					
40	Erlang	No fit						No fit					
41	Exponential	No fit						No fit					
42	Fatigue Life	No fit						No fit					
43	Frechet	No fit						No fit					
44	Gamma	No fit						No fit					
45	Gen. Gamma	No fit						No fit					
46	Inv. Gaussian	No fit						No fit					
47	Johnson SU	No fit						No fit					
48	Levy	No fit						No fit					
49	Log-Gamma	No fit						No fit					
50	Log-Logistic	No fit						No fit					
51	Log-Pearson 3	No fit						No fit					
52	Lognormal	No fit						No fit					
53	Nakagami	No fit						No fit					
54	Pareto	No fit						No fit					
55	Pareto 2	No fit						No fit					
56	Pearson 5	No fit						No fit					
57	Pearson 6	No fit						No fit					
58	Rayleigh	No fit						No fit					
59	Reciprocal	No fit						No fit					
60	Rice	No fit						No fit					
61	Weibull	No fit						No fit					

Μία Συγκριτική Μελέτη των Θεωρητικών Κατανομών Ακραίων Τιμών της Θερμοκρασίας
του Αέρα στη Βόρεια και Κεντρική Ελλάδα

#	Distribution	Καλοκαίρι - ελάχιστες						Καλοκαίρι - μέγιστες					
		Kolmogorov Smirnov		Anderson Darling		Chi-Squared		Kolmogorov Smirnov		Anderson Darling		Chi-Squared	
		Statistic	Rank	Statistic	Rank	Statistic	Rank	Statistic	Rank	Statistic	Rank	Statistic	Rank
1	Beta	0.0267	3	0.2241	2	6.971	7	0.0464	10	0.9888	18	9.282	20
2	Burr	0.0439	9	1.394	10	8.793	10	0.0319	2	0.2423	1	3.642	1
3	Burr (4P)	0.0379	7	1.151	9	6.532	5	0.0349	4	0.2748	3	4.105	3
4	Cauchy	0.1403	44	8.805	39	30.25	34	0.0657	32	2.632	33	20.16	35
5	Chi-Squared	0.3366	50	78.55	48	393.8	50	0.3831	51	73.89	51	788.4	50
6	Chi-Squared (2P)	0.2384	48	32.75	46	165.5	46	0.1919	45	20.26	43	130.6	44
7	Dagum	0.0756	14	2.94	13	15.49	17	0.6901	57	345.2	57	1096.0	51
8	Dagum (4P)	0.0488	12	1.428	11	9.273	11	0.7956	58	605.0	58	2841.0	53
9	Erlang	0.1364	43	10.67	42	30.92	37	0.0575	25	1.26	26	10.06	27
10	Erlang (3P)	0.094	31	5.22	26	23.55	27	0.0682	33	1.612	30	13.56	30
11	Error	0.0843	25	4.012	18	15.89	19	0.0427	5	0.536	6	8.486	12
12	Error Function	1.0	60	1.692E+4	60	N/A		1	60	N/A	N/A		
13	Exponential	0.502	56	132.7	55	1548.0	54	0.5786	55	127.2	55	4391.0	55
14	Exponential (2P)	0.3685	52	90.06	50	385.7	49	0.3331	49	54.42	46	337.2	47
15	Fatigue Life	0.0987	35	6.577	35	31.07	38	0.0493	18	0.9925	19	7.946	9
16	Fatigue Life (3P)	0.0835	23	4.042	19	15.12	15	0.0469	12	0.934	11	9.647	24
17	Frechet	0.1508	46	19.97	43	54.47	44	0.1021	40	4.903	36	18.33	33
18	Frechet (3P)	0.2199	47	30.37	45	N/A		0.09	36	3.818	35	26.61	37
19	Gamma	0.0955	32	5.693	31	24.0	29	0.053	23	1.111	23	8.755	14
20	Gamma (3P)	0.0815	17	4.348	22	18.26	22	0.0466	11	0.9486	14	9.055	17
21	Gen. Extreme Value	0.0228	1	0.3149	5	6.266	4	0.0507	20	1.05	20	9.502	21
22	Gen. Gamma	0.0933	30	5.546	29	24.39	31	0.0523	22	1.069	22	7.782	8
23	Gen. Gamma (4P)	0.0838	24	4.12	21	15.17	16	0.0472	14	0.9674	15	9.643	23
24	Gen. Pareto	0.0818	18	134.7	56	N/A		0.0839	34	67.37	49	N/A	
25	Gumbel Max	0.1488	45	20.35	44	51.17	42	0.0859	35	3.766	34	19.12	34
26	Gumbel Min	0.0472	11	1.491	12	10.54	12	0.1187	42	12.25	41	28.0	38
27	Hypersecant	0.1038	38	6.285	32	28.55	33	0.0427	6	0.5126	5	6.575	5
28	Inv. Gaussian	0.0824	19	5.671	30	21.89	26	0.0599	28	1.229	25	9.848	25
29	Inv. Gaussian (3P)	0.0834	22	4.067	20	15.95	20	0.0602	29	1.261	27	10.19	29
30	Johnson SB	0.0235	2	0.2939	4	5.546	2	0.0433	7	0.5418	7	7.662	6
31	Kumaraswamy	0.028	5	0.2495	3	4.817	1	0.0602	30	1.911	32	14.14	31
32	Laplace	0.1321	42	9.525	40	51.81	43	0.0613	31	1.159	24	9.848	26
33	Levy	0.6388	58	167.7	58	2421.0	55	0.6425	56	152.9	56	6867.0	56
34	Levy (2P)	0.5618	57	122.5	53	679.8	51	0.4564	53	82.65	52	704.6	49
35	Log-Gamma	0.1033	37	7.323	36	32.33	39	0.0478	15	0.9737	16	9.237	19
36	Log-Logistic	0.1058	39	6.517	34	26.15	32	0.0312	1	0.2995	4	4.418	4
37	Log-Logistic (3P)	0.0746	13	3.293	14	12.32	13	0.0324	3	0.2561	2	3.669	2
38	Log-Pearson 3	0.0355	6	0.6346	6	5.662	3	0.0501	19	0.9394	13	8.661	13
39	Logistic	0.0929	29	4.895	23	19.04	23	0.0454	8	0.5572	8	9.512	22
40	Lognormal	0.098	34	6.491	33	30.71	36	0.0492	17	0.9887	17	7.947	10
41	Lognormal (3P)	0.0768	15	3.931	16	14.19	14	0.0471	13	0.9236	10	8.828	16
42	Nakagami	0.0901	28	5.215	25	21.19	25	0.0567	24	1.273	28	8.812	15
43	Normal	0.0812	16	3.891	15	16.43	21	0.0588	27	1.309	29	10.11	28
44	Pareto	0.4019	53	106.4	52	345.9	48	0.345	50	60.68	48	383.4	48
45	Pareto 2	0.4895	55	128.1	54	1542.0	53	0.5323	54	114.7	54	4384.0	54
46	Pearson 5	0.103	36	7.625	37	35.37	40	0.0462	9	0.9369	12	9.228	18
47	Pearson 5 (3P)	0.089	27	5.027	24	20.92	24	0.0489	16	0.9175	9	8.164	11
48	Pearson 6	0.1165	40	8.028	38	30.61	35	0.0523	21	1.067	21	7.782	7
49	Pearson 6 (4P)	0.0827	20	3.99	17	15.74	18	0.0914	37	5.44	37	45.28	39
50	Pert	0.0269	4	0.2175	1	6.633	6	0.0968	38	6.314	38	46.34	40
51	Power Function	0.0961	33	5.525	28	24.35	30	0.2829	48	40.29	45	252.7	46
52	Rayleigh	0.3368	51	85.35	49	719.6	52	0.449	52	97.13	53	2123.0	52
53	Rayleigh (2P)	0.2442	49	43.16	47	150.8	45	0.1627	44	13.08	42	62.94	42
54	Reciprocal	0.447	54	158.0	57	342.4	47	0.2318	47	32.98	44	236.1	45
55	Rice	0.0846	26	5.234	27	23.85	28	0.1934	46	56.08	47	113.4	43
56	Student's t	0.9931	59	1825.0	59	1.090E+5	56	0.9995	59	2085.0	59	2.181E+6	57
57	Triangular	0.1258	41	9.539	41	35.75	41	0.1408	43	9.401	40	49.07	41
58	Uniform	0.0828	21	93.11	51	N/A		0.0991	39	72.95	50	N/A	
59	Weibull	0.044	10	1.026	7	7.01	8	0.1046	41	7.073	39	22.68	36
60	Weibull (3P)	0.0388	8	1.124	8	7.675	9	0.0576	26	1.879	31	15.61	32
61	Johnson SU	No fit						No fit					

Φθινόπωρο - ελάχιστες								Φθινόπωρο - μέγιστες							
#	Distribution	Kolmogorov Smirnov		Anderson Darling		Chi-Squared		Distribution	Kolmogorov Smirnov		Anderson Darling		Chi-Squared		
		Statistic	Rank	Statistic	Rank	Statistic	Rank		Statistic	Rank	Statistic	Rank	Statistic	Rank	
1	Beta	0.0505	5	0.8273	2	13.69	4	Beta	0.0801	7	2.899	5	56.63	15	
2	Burr (4P)	0.0667	11	3.02	7	20.9	8	Burr	0.0862	14	3.249	8	38.12	5	
3	Cauchy	0.117	27	10.43	25	50.26	23	Burr (4P)	0.0863	15	3.281	9	38.33	7	
4	Chi-Squared (2P)	0.127	29	8.993	23	32.43	20	Cauchy	0.1434	46	8.905	41	118.3	42	
5	Dagum (4P)	0.5003	35	282.7	34	739.8	30	Chi-Squared	0.1384	44	15.84	46	135.4	45	
6	Erlang (3P)	0.0862	20	3.936	16	24.14	17	Chi-Squared (2P)	0.1395	45	9.389	42	76.43	33	
7	Error	0.0283	1	0.3091	1	7.3	1	Dagum	0.073	4	2.458	1	19.59	1	
8	Error Function	0.442	33	314.6	35	833.4	31	Dagum (4P)	0.6185	58	296.2	58	936.5	52	
9	Exponential (2P)	0.2378	32	47.87	32	150.5	28	Erlang	0.133	42	8.463	39	52.8	12	
10	Fatigue Life (3P)	0.0689	14	3.587	13	21.21	11	Erlang (3P)	0.1062	33	5.203	22	61.48	21	
11	Frechet (3P)	0.1779	31	25.61	29	N/A		Error	0.0772	5	2.854	3	46.75	8	
12	Gamma (3P)	0.0729	18	3.365	9	23.37	16	Error Function	0.9998	60	4713.0	60	1.419E+7	55	
13	Gen. Extreme Value	0.0571	7	2.444	5	19.06	6	Exponential	0.4677	55	88.22	55	720.6	51	
14	Gen. Gamma (4P)	0.0671	12	1.585	4	9.778	2	Exponential (2P)	0.2354	51	33.85	49	208.6	47	
15	Gen. Pareto	0.0352	3	38.89	31	N/A		Fatigue Life	0.1005	30	6.031	28	77.09	34	
16	Gumbel Max	0.116	26	10.68	26	54.33	24	Fatigue Life (3P)	0.0958	20	4.316	14	59.31	17	
17	Gumbel Min	0.1217	28	10.93	27	68.13	26	Frechet	0.1554	48	13.81	44	97.15	40	
18	Hypersecant	0.1031	24	9.902	24	67.43	25	Frechet (3P)	0.1101	36	7.214	36	121.1	43	
19	Inv. Gaussian (3P)	0.066	10	3.456	10	21.34	12	Gamma	0.104	32	5.864	24	67.18	27	
20	Johnson SB	0.0317	2	8.295	22	N/A		Gamma (3P)	0.0973	21	4.595	19	63.12	23	
21	Kumaraswamy	0.0518	6	0.8684	3	11.93	3	Gen. Extreme Value	0.0653	3	5.988	26	N/A		
22	Laplace	0.1279	30	15.2	28	107.8	27	Gen. Gamma	0.0988	26	5.362	23	67.62	28	
23	Levy (2P)	0.4592	34	85.77	33	355.5	29	Gen. Gamma (4P)	0.0987	24	4.621	20	60.24	18	
24	Log-Logistic (3P)	0.0707	16	4.274	17	25.92	18	Gen. Pareto	0.0589	2	42.45	50	N/A		
25	Logistic	0.0877	21	6.946	20	45.22	22	Gumbel Max	0.1352	43	15.17	45	80.05	37	
26	Lognormal (3P)	0.0725	17	3.66	15	21.68	13	Gumbel Min	0.0984	23	4.397	17	30.37	2	
27	Normal	0.0659	9	3.51	11	22.04	14	Hypersecant	0.1322	41	8.236	38	52.22	11	
28	Pearson 5 (3P)	0.078	19	3.621	14	23.24	15	Inv. Gaussian	0.0833	9	6.569	32	107.6	41	
29	Pearson 6 (4P)	0.0697	15	3.53	12	20.08	7	Inv. Gaussian (3P)	0.0925	17	4.145	12	62.19	22	
30	Pert	0.0634	8	2.494	6	19.02	5	Johnson SB	0.058	1	8.763	40	N/A		
31	Power Function	0.1028	23	7.362	21	45.07	21	Kumaraswamy	0.081	8	2.836	2	49.62	9	
32	Rayleigh (2P)	0.089	22	4.965	18	20.98	9	Laplace	0.1514	47	11.51	43	65.88	26	
33	Student's t	0.6836	36	717.2	36	1866.0	32	Levy	0.6085	57	117.7	57	1189.0	53	
34	Triangular	0.1079	25	4.994	19	28.82	19	Levy (2P)	0.4505	54	55.3	54	491.9	49	
35	Uniform	0.0357	4	35.23	30	N/A		Log-Gamma	0.1032	31	6.642	33	77.64	35	
36	Weibull (3P)	0.0682	13	3.109	8	21.03	10	Log-Logistic	0.1103	37	6.546	31	75.79	32	
37	Burr	No fit						Log-Logistic (3P)	0.0845	10	4.326	16	73.86	31	
38	Chi-Squared	No fit						Log-Pearson 3	0.0852	13	3.447	10	63.93	24	
39	Dagum	No fit						Logistic	0.1177	39	6.373	30	55.69	14	
40	Erlang	No fit						Lognormal	0.1	28	6.001	27	73.83	30	
41	Exponential	No fit						Lognormal (3P)	0.09	16	4.32	15	71.61	29	
42	Fatigue Life	No fit						Nakagami	0.1064	34	5.894	25	65.42	25	
43	Frechet	No fit						Normal	0.0951	19	4.215	13	58.78	16	
44	Gamma	No fit						Pareto	0.2688	52	48.05	52	151.7	46	
45	Gen. Gamma	No fit						Pareto 2	0.5017	56	99.49	56	657.7	50	
46	Inv. Gaussian	No fit						Pearson 5	0.1064	35	6.821	35	80.57	38	
47	Johnson SU	No fit						Pearson 5 (3P)	0.098	22	4.992	21	60.81	20	
48	Levy	No fit						Pearson 6	0.1004	29	6.35	29	77.79	36	
49	Log-Gamma	No fit						Pearson 6 (4P)	0.1161	38	6.758	34	124.3	44	
50	Log-Logistic	No fit						Pert	0.0797	6	2.918	6	54.2	13	
51	Log-Pearson 3	No fit						Power Function	0.181	50	20.48	48	N/A		
52	Lognormal	No fit						Rayleigh	0.28	53	46.69	51	348.6	48	
53	Nakagami	No fit						Rayleigh (2P)	0.1219	40	7.756	37	94.43	39	
54	Pareto	No fit						Reciprocal	0.1678	49	18.09	47	60.57	19	
55	Pareto 2	No fit						Rice	0.0996	27	4.5	18	50.34	10	
56	Pearson 5	No fit						Student's t	0.9983	59	1716.0	59	2.819E+5	54	
57	Pearson 6	No fit						Triangular	0.0987	25	3.995	11	30.37	3	
58	Rayleigh	No fit						Uniform	0.0931	18	52.15	53	N/A		
59	Reciprocal	No fit						Weibull	0.0847	11	2.885	4	34.11	4	
60	Rice	No fit						Weibull (3P)	0.0848	12	3.202	7	38.18	6	
61	Weibull	No fit						Johnson SU	No fit						