ΕΠΙ ΤΟΥ ΣΥΜΒΟΛΟΥ ΤΩΝ ΥΠΟΛΟΙΠΩΝ-ΜΕΤΡΩΝ

ΥΠΟ

ΦΙΛΩΝΟΣ ΒΑΣΙΛΕΙΟΥ
ΥΦΗΓΗΤΟΥ ΤΟΥ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟΥ ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

ΕΠΙ ΤΟΥ ΣΥΜΒΟΛΟΥ ΤΩΝ ΥΠΟΛΟΙΠΩΝ-ΜΕΤΡΩΝ

1. Εἰς τὴν ἐργασίαν αὐτοῦ ἐπὶ τοῦ συμβόλου τοῦ Hasse τῶν ὑπολοίπων-μέτρων, ὁ S. Iyanaga [1]) εὑρίσκει τὸ ἑξῆς θεώρημα: «Ἔστω τὸ ἀβελιανὸν σῶμα K/k· ἐὰν τὸ α διατρέχει εἰς τὸ k τὴν ὁμάδα τῶν ὑπολοίπων-μέτρων mod. $\mathfrak{p}^a$, τότε ἡ τιμὴ τοῦ συμβόλου $\left(\frac{\alpha, K}{\mathfrak{p}}\right)$ εἶναι μία ὁμὰς διακλαδώσεως, καὶ μάλιστα λαμβάνομεν κατὰ σειρὰν ὅλας τὰς ὁμάδας διακλαδώσεων, ἐὰν τὸ a λάβῃ ὅλας τὰς ἀκεραίας καὶ θετικὰς τιμάς» [2]).

Διὰ τὴν ἀπόδειξιν τοῦ θεωρήματος τούτου ὁ συγγραφεὺς βασίζεται ἐπὶ τῆς προτάσεως τοῦ Hasse, κατὰ τὴν ὁποίαν ἡ σειρὰ τῶν ἐκθετῶν τῆς συμβολῆς τοῦ $\mathfrak{p}$ εἰς τοὺς ὁδηγοὺς (συντομώτερον: τῶν $\mathfrak{p}$-ὁδηγῶν) τῶν διαφόρων ἐνδιαμέσων σωμάτων, διατεταγμένη κατ' αὔξούσας τιμάς, συμφωνεῖ μὲ τοὺς $\mathfrak{p}$-ὁδηγοὺς τῶν διαδοχικῶν σωμάτων διακλαδώσεων, ἕκαστον δὲ σῶμα διακλαδώσεως περιέχει ὅλα τὰ μερικὰ σώματα, τῶν ὁποίων ὁ $\mathfrak{p}$-ὁδηγὸς διαιρεῖ τὸν ἀντίστοιχον ὁδηγὸν ἐκείνου.

Διὰ τὸ τελευταῖον ὅμως τοῦτο θεώρημα ἦσαν μέχρι σήμερον ἀπαραίτητοι αἱ πολύπλοκοι καὶ πολὺ βαθύτερον κείμεναι προτάσεις τῆς θεωρίας τῶν γενῶν τοῦ Takagi, δηλ. ἐκεῖναι αἱ προτάσεις, αἱ ὁποῖαι μᾶς παρέχουν τὴν σχέσιν (διὰ βαθμὸν πρῶτον τινα ἀριθμὸν) μεταξὺ τῶν ἐκθετῶν τοῦ $\mathfrak{p}$ καὶ $\mathfrak{P}$ τῶν (ὡς πρὸς μέτρα τὰς δυνάμεις ταύτας) ἰσοδυνάμων πρὸς τὴν μονάδα μέτρων ἀριθμῶν, οἱ ὁποῖοι συγχρόνως εἶναι ἰσοδύναμοι πρὸς συμβολικὰς $(1-\sigma)$δυνάμεις [3]) ($\sigma =$ ἡ γεννῶσα ἀντικατάστασις τῆς κυκλικῆς ὁμάδος τοῦ Galois τοῦ ὑπ' ὄψιν σώματος).

---

[1]) S. Iyanaga, Über den Wertvorrat des Normenrestsymbols, Abh. aus dem Math. Seminar der Hambg. Universirät, Bd. 9, Heft 2. (1932).

[2]) Διὰ τιμὰς τοῦ a ἀπό τινος καὶ ἑξῆς τὸ σύμβολον τοῦτο ἰσοῦται πάντοτε μὲ τὴν μονάδα (τὸ στοιχεῖον τῆς μονάδος).

[3]) Βλ. H. Hasse, Bericht über neuere Untersuchungen und Probleme aus der Theorie der algebraischen Zahlkörper, Teil Ia, σελ. 298, Jahresber. der D. M.-V. 36 (1927), καθὼς ἐπίσης T. Takagi, Über eine Theorie des relativ-Abelschen Zahlkörpers. Journ. of the Coll. of Science Tokyo 41 (1920), § 14.

Κατὰ τὴν νέαν ὑπὸ τοῦ Herbrand καὶ Artin ἵδρυσιν τῆς θεωρίας τῶν ἀβελιανῶν σωμάτων ἀποφεύγεται ἡ θεωρία αὕτη τῶν γενῶν, συνεπῶς τὸ θεώρημα τοῦ S. Iyanaga ἔχει ἀνάγκην νέας ἀποδείξεως γινομένης ἐντὸς τοῦ πλαισίου τῶν νεωστὶ ἐπενεχθεισῶν οὐσιωδῶν ἁπλοποιήσεων. Ἡ προσπάθεια τοῦ συγγραφέως, ὅπως ἀκολουθήσῃ τὴν νέαν ταύτην ὁδόν, ὅπως ἀποδείξῃ δηλ. ἀμέσως τὴν πρότασιν αὐτοῦ (ὅτε ἀντιστρόφως θὰ συνήγετο ἐξ αὐτῆς ἡ πρότασις ἐκείνη τοῦ Hasse), κατὰ τὴν μαρτυρίαν τοῦ ἰδίου [1]), δὲν ἤγαγεν εἰς ἐπιτυχῆ ἀποτελέσματα.

2. Ἐξ' ἄλλου ὁ Hasse ἐπέτυχεν ἐσχάτως, ὅπως διὰ τὴν σχέσιν τὴν συνδέουσαν τὴν σχετικὴν διακρίνουσαν ἑνὸς ἀβελιανοῦ σώματος μὲ τὸν ὁδηγὸν $\mathfrak{f}$ τῆς ὁμάδος ἰδεωδῶν, πρὸς τὴν ὁποίαν τὸ σῶμα τοῦτο εἶναι σῶμα-τάξεων, εὕρῃ ἄμεσον ἀπόδειξιν, ἀνεξάρτητον τῆς θεωρίας τῶν γενῶν τοῦ Takagi. Διὰ τοῦ τρόπου τούτου ἐγένετο καὶ τὸ τελευταῖον οὐσιῶδες βῆμα διὰ τὴν ἁπλοποίησιν τῆς ἀριθμητικῆς ἀποδείξεως τῆς ἐν λόγῳ σχέσεως, περὶ τῆς ὁποίας πραγματευόμεθα εἰς προηγουμένην ἐργασίαν ἡμῶν [2]).

Στηριζόμενοι τώρα εἰς τὰ ἀποτελέσματα τῆς ἐρεύνης ταύτης, τὰ ὁποῖα ὁ συγγραφεὺς εἶχε τὴν εὐγενῆ καλωσύνην ν' ἀνακοινώσῃ δι' ἐπιστολῆς του εἰς ἡμᾶς, εὑρίσκομεν εὐκόλως καὶ τὴν ἄμεσον ἀπόδειξιν τοῦ ἐν ἀρχῇ τῆς παρούσης ἐργασίας ἀναφερομένου θεωρήματος τοῦ S. Iyanaga. Διὰ τὸν σκοπὸν αὐτὸν θὰ ἐκθέσωμεν ἐν ὀλίγοις κατ' ἀρχὰς ὅ,τι ἐκ τῶν ἐξαγομένων τοῦ Hasse εἶναι ἀπαραίτητον διὰ τὴν περαιτέρω ἀνάπτυξιν.

3. Τὸ σύμβολον $\left(\frac{\alpha, K}{\mathfrak{p}}\right)$ διὰ τυχόντα ἀριθμὸν $\alpha \neq 0$ τοῦ κατωτέρου σώματος k καὶ διὰ δοθὲν πρῶτον ἰδεῶδες τοῦ σώματος τούτου, ὁρίζεται ὡς ἑξῆς: [3])

Ἔστω $\mathfrak{f}'$ ὁ $\mathfrak{p}$-ὁδηγὸς τοῦ σώματος K/k. Θέτομεν $\mathfrak{f} = \mathfrak{f}' \mathfrak{f}_0$ καὶ προσδιορίζομεν ἕναν βοηθητικὸν ἀριθμὸν α_0 οὕτως, ὥστε νὰ εἶναι:

$$\alpha_0 \equiv \alpha \quad (\text{mod. } \mathfrak{f}') \quad \text{καὶ} \quad \alpha_0 \equiv 1 \quad (\text{mod. } \mathfrak{f}_0)$$

Ἔστω $\alpha_0 = \mathfrak{p}^a \mathfrak{a}$, ὅπου τὸ ἰδεῶδες $\mathfrak{a}$ δὲν διαιρεῖται διὰ τοῦ $\mathfrak{p}$. Διὰ τὸ ἰδεῶδες $\mathfrak{a}$ ὁρίζεται τώρα τὸ σύμβολον τοῦ Artin $\left(\frac{K}{\mathfrak{a}}\right)$, ἐφόσον τὸ ἰδε-

---

1) Βλ. τὴν εἰς τὴν σημ. 1 ἀναφ. ἐργασίαν σ. 162, παρατήρ. 11.

2) Ph. Vassiliou, Bestimmung der Führer etc. Crelles Journ. Bd. 169 Heft. 3 (1933).

3) Βλ. H. Hasse, Bericht über neuere Untersuchungen und Probleme aus der Theorie der algeb. Zahlkörper, Teil II, Reziprozitätsgesetz, Jahresb. D M.-V. IV Ergänzungsband (1930).

ῶδες τοῦτο εἶναι πρῶτον πρὸς τὴν διακρίνουσαν τοῦ K/k. Τὸ $\left(\frac{K}{\alpha}\right)$ τοῦτο λαμβάνεται ὡς ἡ τιμὴ τοῦ συμβόλου $\left(\frac{\alpha, K}{\mathfrak{p}}\right)$.

Εἰς τὰ κατωτέρω, ἄνευ περιορισμοῦ τινος τῆς γενικότητος τῶν ἐξαγομένων μας, θὰ ὑποθέσωμεν, ὅτι τὸ σῶμα k συμπίπτει μὲ τὸ σῶμα ἀδρανείας, ἀντὶ δὲ τῆς ἐν χρήσει ἀριθμήσεως τῶν σωμάτων διακλαδώσεων θὰ θέσωμεν :

$$k = K_0 < K_1 < \ldots < K_{r+1} = K$$

Ἡ διαφορὰ κατὰ τὴν νέαν ἀρίθμησιν συνίσταται εἰς τοῦτο, ὅτι τὸ σῶμα K_1 (καὶ συνεπῶς τὸ σῶμα K_ν) παριστᾶ, καθόσον τὸ σῶμα διακλαδώσεως διαφέρει ἢ ὄχι ἀπὸ τὸ σῶμα ἀδρανείας [1], τὸ σύνηθες (ἀντ. τὸ ν-τάξεως) ἢ τὸ πρώτης τάξεως σῶμα διακλαδώσεως (ἀντ. τὸ $(\nu+1)$ τάξεως).

Ὡς συνήθως τὸν ἀριθμὸν διακλαδώσεως τοῦ σώματος K_ν $(\nu = 1, 2, \ldots r+1)$ παριστάνομεν μὲ τὸ v_ν, τὸν δὲ βαθμὸν τοῦ σχετικοῦ σώματος K/K_ν $(\nu = 0, 1, \ldots r+1)$ μὲ τὸ n_ν, ὅπου $n_{r+1} = 1$. Ἐπὶ πλέον τὰς ὁμάδας τῶν ἰσοδυνάμων πρὸς τὴν μονάδα ἀριθμῶν mod. $\mathfrak{p}^x$ ἀντιστοίχως mod. $\mathfrak{P}^y$, εἰς τὸ σῶμα k ἀντ. K, παριστάνομεν μὲ τὰ σύμβολα α_x, A_y, διὰ δὲ τοῦ συμβόλου B_x παριστάνομεν τέλος τὴν ὁμάδα ἐκείνην τῶν ἀριθμῶν τοῦ σώματος K, τῶν ὁποίων τὰ μέτρα ὡς πρὸς k εἶναι ἰσοδύναμα πρὸς τὴν μονάδα mod. $\mathfrak{p}^x$.

4. Κατὰ τὸν Hasse εἰσάγομεν τώρα μίαν κ α τ ὰ τ μ ή μ α τ α γραμμικὴν συνεχῆ συνάρτησιν εἰς τὸ ἐπίπεδον (x, y) ὁριζομένην δι' ὅλας τὰς θετικὰς τιμὰς τοῦ x, ὡς ἑξῆς:

Διὰ $x = 0$ εἶναι καὶ $y = 0$· διὰ

$$(1) \qquad x = \frac{1}{n_0} \sum_{1}^{\nu} (v_h - v_{h-1})\, n_{h-1} = a_\nu \qquad (\nu = 1, 2, \ldots r+1)$$ [2]

εἶναι $y = v_\nu$· τέλος διὰ $x \geq a_{r+1}$ εἶναι $y = n_0 x + (v_{r+1} - a_{r+1} n_0)$.

Διὰ τὴν συνάρτησιν ταύτην ἀποδεικνύει οὗτος, ἐπὶ τῇ βάσει τῆς θεωρίας τοῦ ἐν ἀρχῇ τῆς προηγουμένης παραγράφου ὁρισθέντος συμβόλου, τὰ ἑξῆς :

I) Τὰ μέτρα τῶν στοιχείων τῆς ὁμάδος A_y εἶναι στοιχεῖα τῆς α_x

---

[1] Εἰς τὴν πρώτην περίπτωσιν λέγομεν, ὅτι ὁ ἀριθμὸς διακλαδώσεως τοῦ K_1 εἶναι μηδέν: $v_1 = 0$.

[2] Χάριν συμμετρίας ἐτέθη $v_0 = 0$.

καὶ τὰ μέτρα τῶν στοιχείων τῆς ὁμάδος A_{y+1} εἶναι στοιχεῖα τῆς α_{x+1} δηλ. ὅτι ἡ ὁμὰς B_x περιλαμβάνει τὴν A_y καὶ ἡ B_{x+1} τὴν A_{y+1}.

II) Ἡ ὁμὰς α_x, διὰ τιμὰς τοῦ x διαφόρους τῶν (1), ἰσοῦται μὲ τὸ γινόμενον $N(A_y)\,\alpha_{x+1}$ καὶ ἑπομένως κατὰ μείζονα λόγον εἶναι:
$N(B_x)\,\alpha_{x+1} = \alpha_x$.

III) Διὰ τὰς τιμὰς (1) τοῦ x εἶναι: $\alpha_{x+1} N(A_y) = \alpha_{x+1} N(B_x)$ καὶ ὁ δείκτης $(\alpha_x : N(B_x)\alpha_{x+1})$ ἰσοῦται μὲ τὸν βαθμὸν τοῦ σώματος $K_{\nu+1} / K_\nu$ δηλ. $\dfrac{n_\nu}{n_{\nu+1}}$

IV) Αἱ τιμαὶ (1) εἶναι ἀκέραιαι.

Τὸ σύμβολον N (...) δηλοῖ πρὸς τούτοις τὸ μέτρον του K ὡς πρὸς k.

5. Διὰ $\nu = 0$ θέτομεν εἰς τὸ ἑξῆς $a_0 = -1$. Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συμπεραίνομεν τότε εὐκόλως τῇ βοηθείᾳ τῆς θεωρίας τῶν ὑπολοίπων-μέτρων καὶ τῆς σχέσεως (1) § 10 τῆς εἰς σημ. 3 τῆς πρώτης § ἀνακοινώσεως τοῦ Hasse, ὅτι ὁ ἐκθέτης τοῦ $\mathfrak{p}$-ὁδηγοῦ τοῦ σώματος K_ν ($\nu = 0, 1, \ldots r+1$) εἶναι: $1 + a_\nu$. Ἐντεῦθεν ἕπεται, ὅτι ἡ κατὰ τὴν θεωρίαν τῶν σωμάτων-τάξεων εἰς τὸ K_ν ἀντιστοιχοῦσα ὁμὰς ἰδεωδῶν $\mathfrak{H}_\nu$ περιέχει τὴν ὁμάδα α_{1+a_ν}. Διὰ τυχόντα ὅμως ἀριθμὸν α τῆς τελευταίας ταύτης ὁμάδος, ὁ ἀντίστοιχος βοηθητικὸς ἀριθμὸς α_0 ὁ ἀπαιτούμενος κατὰ τὴν § 3 διὰ τὸν ὁρισμὸν τοῦ συμβόλου $\left(\dfrac{\alpha, K}{\mathfrak{p}}\right)$, πληροῖ τὰς δύο ἰσοδυναμίας:

$$\alpha_0 \equiv \alpha \pmod{\mathfrak{p}^{1+a_{r+1}}}, \quad \alpha_0 \equiv 1 \pmod{\mathfrak{f}_0}$$

ἑπομένως κατὰ μείζονα λόγον τὰς

$$(2) \qquad \alpha_0 \equiv \alpha \equiv 1 \pmod{\mathfrak{p}^{1+a_\nu}}, \quad \alpha_0 \equiv 1 \pmod{\mathfrak{f}_0}$$

εἰς τρόπον, ὥστε ὁ ἀριθμὸς οὗτος α_0 δύναται νὰ ληφθῇ εἰς τὴν θέσιν τοῦ εἰς τὴν § ἐκείνην ὁριζομένου ἰδεώδους $\mathfrak{a}$, ὅτε $\left(\dfrac{\alpha, K}{\mathfrak{p}}\right) = \left(\dfrac{K}{\alpha_0}\right)$.

Τὸ τελευταῖον τοῦτο σύμβολον τοῦ Artin, ἐπειδὴ καὶ ὁ α_0 ἀνήκει, λόγῳ τῶν (2), εἰς τὴν ὁμάδα α_{1+a_ν} καὶ ἑπομένως εἰς τὴν $\mathfrak{H}_\nu$, εἶναι μιὰ ἀντικατάστασις τῆς ν-τάξεως ὁμάδος διακλαδώσεως [1]). Δηλ. ὅταν τὸ α διατρέχει τοὺς ἀριθμοὺς τῆς ὁμάδος α_{1+a_ν}, τότε ἡ ὁμὰς τῶν ἀντικαταστάσεων $\left(\dfrac{\alpha, K}{\mathfrak{p}}\right)$ περιέχεται εἰς τὴν ν-τάξεως ὁμάδα διακλαδώσεως.

6. Συμφώνως πρὸς τὰς γνωστὰς ἰδιότητας τοῦ συμβόλου τῶν ὑπολοίπων-μέτρων:

---

[1]) Διὰ τὴν ἀρίθμησιν τῶν ὁμάδων διακλαδώσεων βλ. § 3.

$$\text{I)} \quad \left(\frac{N(\alpha)\,,\,K}{\mathfrak{p}}\right) = 1$$

$$\text{II)} \quad \left(\frac{\alpha\beta,\,K}{\mathfrak{p}}\right) = \left(\frac{\alpha,\,K}{\mathfrak{p}}\right)\left(\frac{\beta,\,K}{\mathfrak{p}}\right)$$

ἔχομεν, ὅτι καὶ διὰ τοὺς ἀριθμοὺς $N(B_x)\alpha_{1+x}$ τὸ σύμβολον τοῦτο λαμβάνει τὰς αὐτὰς τιμάς, τὰς ὁποίας λαμβάνει διὰ τὰ στοιχεῖα τῆς ὁμάδος α_{1+x}.

Διὰ τὴν ὁμάδα α_0 τῶν πρὸς τὸ ἰδεῶδες $\mathfrak{p}$ πρώτων ἀριθμῶν τοῦ σώματος k τὸ σύμβολον τοῦτο λαμβάνει ὡς τιμὰς τὰ στοιχεῖα τῆς ὁμάδος ἀδρανείας [1]).

Ἕνεκα τῆς σχέσεως

$$(\alpha_x : N(B_x)\alpha_{x+1}) = 1 \qquad \text{διὰ } x = 0\ (=1+a_0),\ldots a_1 - 1$$

καὶ τῆς προηγουμένης παρατηρήσεως, τὰς αὐτὰς τιμὰς λαμβάνει τὸ σύμβολον τοῦτο καὶ διὰ τοὺς ἀριθμοὺς τῆς ὁμάδος α_{x+1} (διὰ τὰς τιμὰς ταύτας τοῦ x). Διὰ $x = a_1$ κατὰ τὴν προηγουμένην § αἱ τιμαὶ τοῦ συμβόλου διὰ τοὺς ἀριθμοὺς τῆς ὁμάδος α_{1+a_1} περιέχονται εἰς τὴν $1^{ης}$-τάξεως ὁμάδα διακλαδώσεως. Ἐὰν καλέσωμεν α^* τὴν κατωτέραν ὁμάδα τῆς α_{a_1}, διὰ τὰ στοιχεῖα τῆς ὁποίας αἱ τιμαὶ τοῦ συμβόλου περιέχονται εἰς τὴν $1^{ης}$ - τάξεως ὁμάδα διακλαδώσεως, τότε προφανῶς εἶναι:

$(\alpha_{a_1} : \alpha^*) \leqq (\alpha_{a_1} : N(B_{a_1})\alpha_{1+a_1})$. Ἐπειδὴ ὅμως $(\alpha_{a_1} : \alpha^*) = \frac{n_0}{n_1}$ καὶ κατὰ τὴν ἰδιότητα III τῆς § 4 τὴν αὐτὴν τιμὴν ἔχει καὶ ὁ δείκτης τοῦ δευτέρου μέλους τῆς ἀνισότητος ἕπεται: $(\alpha_{a_1} : \alpha^*) = (\alpha_{a_1} : N(B_{a_1})\alpha_{1+a_1})$ ἢ λόγῳ τῆς σχέσεως $\alpha^* \geqq N(B_{a_1})\alpha_{1+a_1}$, ὅτι $\alpha^* = N(B_{a_1})\alpha_{1+a_1}$. Δηλ. διὰ τὰ στοιχεῖα τῆς α_{1+a_1} ἔχομεν ὡς τιμὴν τοῦ συμβόλου τὰς ἀντικαταστάσεις τῆς $1^{ης}$ - τάξεως ὁμάδος διακλαδώσεως.

Γενικῶς, ἂν παραδεχθῶμεν, ὅτι διὰ τοὺς ἀριθμοὺς τῆς ὁμάδος α_{1+a_ν} τὸ σύμβολον τοῦ Hasse λαμβάνει τὰς ἀντικαταστάσεις τῆς ν-τάξεως ὁμάδος διακλαδώσεως ἔχομεν, ὅτι τὰς αὐτὰς ἀντικαταστάσεις λαμβάνει τὸ σύμβολον τοῦτο καὶ διὰ τοὺς ἀριθμοὺς τῆς α_{x+1} διὰ τὰς ἑξῆς τιμὰς τοῦ x $x = a_\nu, \ldots, a_{\nu+1} - 1$ καὶ ὅτι διὰ τοὺς ἀριθμοὺς τῆς $\alpha_{a_{\nu+1}+1}$ λαμβάνει τὰς ἀντικαταστάσεις τῆς $(\nu+1)$τάξεως διακλαδώσεως. Δυνάμει τῆς μεθόδου τῆς τελείας ἀναγωγῆς τοῦτο ἰσχύει διὰ κάθε ν. [2])

Ἔχομεν ἑπομένως ὑπὸ ἀκριβεστέραν ἔκφρασιν τὸ ἐν ἀρχῇ τῆς § 1 θεώρημα: Διὰ τυχὸν a ἡ ὁμὰς $\alpha \equiv 1 \bmod. \mathfrak{p}^{1+a}$ παρέχει ὡς τιμὰς τοῦ

---

[1]) Λόγῳ τῆς ὑποθέσεώς μας $k = K_0$ ἡ ὁμὰς ἀδρανείας συμπίπτει μὲ τὴν ὁμάδα ἀναλύσεως. Ὁ δείκτης $(\alpha : N(A)\,\alpha_0) =$ βαθμ. $\mathfrak{P} = 1$, ὅπου α ἡ ὁμὰς τῶν διαφόρων τοῦ μηδενὸς ἀριθμῶν τοῦ σώματος k.

[2]) Βλ. σημ. 2, § 1.

συμβόλου τοῦ Hasse τὰς ἀντικαταστάσεις τῆς ν-τάξεως ὁμάδος διακλαδώσεως, ὅπου τὸ ν προσδιορίζεται ἀπὸ τὴν σχέσιν: $a_\nu \leqq a < a_{\nu+1}$ [1]).

7. Ἡ ἰδιότης II τῆς § 4 μᾶς παρέχει ἀφ' ἑτέρου διὰ $a_\nu \leqq x < a_{\nu+1} - 1$ $(\nu = 0, 1, \ldots)$ ὅτι: «Ἐὰν ὁ α εἶναι ὑπόλοιπον-μέτρου mod. $\mathfrak{p}^x$, εἶναι καὶ ὑπόλοιπον-μέτρου mod. $\mathfrak{p}^{x+1}$». Διότι ὑπὸ τὴν ἄνω προϋπόθεσιν ὁ α ἰσοῦται μὲ γινόμενον τῆς μορφῆς $\alpha_x N(A)$ (A ἀριθμός τις τοῦ ἀνωτέρου σώματος), ἐπειδὴ δὲ $\alpha_x = \alpha_{x+1} N(B_x)$, ἕπεται $\alpha = \alpha_{x+1} N(AB_x)$ ἢ $\alpha \equiv N(AB_x) \pmod{\mathfrak{p}^{x+1}}$ δηλ. ὅτι ὁ α εἶναι καὶ ὑπόλοιπον-μέτρου ὡς πρὸς τὸ μέτρον τοῦτο.

Δι' ἐπανειλημμένης ἐφαρμογῆς τοῦ ἐξαγομένου αὐτοῦ λαμβάνομεν τὸ ἑξῆς θεώρημα [2]).

Ἐὰν τὸ α εἶναι ὑπόλοιπον-μέτρου mod. $\mathfrak{p}^{a_\nu}$, τότε εἶναι καὶ ὑπόλοιπον-μέτρου mod. $\mathfrak{p}^{a_{\nu+1}-1}$· ἰδιαιτέρως ἐὰν τὸ α εἶναι ὑπόλοιπον-μέτρου mod. $\mathfrak{p}^{1+a_{r+1}}$, τότε εἶναι ὑπόλοιπον-μέτρου καὶ διὰ πᾶσαν μεγαλυτέραν δύναμιν τοῦ $\mathfrak{p}$. Δηλ. ἡ ὁμὰς τῶν ὑπολοίπων-μέτρων mod. $\mathfrak{p}^{a_\nu}$ συνίσταται ἀκριβῶς ἐκ τῶν αὐτῶν ἀριθμῶν, ἐκ τῶν ὁποίων συνίσταται καὶ ἡ ὁμὰς τῶν ὑπολοίπων-μέτρων mod. $\mathfrak{p}^{a_{\nu+1}-1}$.

---

1) Διὰ $\nu = r+1$ ἡ σχέσις αὕτη σημαίνει ἁπλῶς, ὅτι $a_{r+1} \leqq a$.

2) Βλ. τὴν εἰς σημ. 1 ἀναφερομένην ἐργασίαν τοῦ S. Iyanaga.