ΠΕΡΙ ΤΩΝ ΕΞΑΙΡΕΤΙΚΩΝ ΤΙΜΩΝ ΜΙΑΣ ΤΑΞΕΩΣ ΥΠΕΡΒΑΤΙΚΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

ΥΠΟ

ΙΩΑΝΝΟΥ ΑΝΑΣΤΑΣΙΑΔΟΥ
ΠΤΥΧΙΟΥΧΟΥ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΠΕΡΙ ΤΩΝ ΕΞΑΙΡΕΤΙΚΩΝ ΤΙΜΩΝ ΜΙΑΣ ΤΑΞΕΩΣ ΥΠΕΡΒΑΤΙΚΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

Εἶνε γνωστὴ ἡ θεμελιώδης πρότασις τοῦ Weierstrass [1]) καθ' ἣν μεμονωμένον ἀνώμαλον σημεῖον $z=a$, διὰ μίαν μονότιμον ἀναλυτικὴν συνάρτησιν $f(z)$, ἄν δὲν εἶναι πόλος, εἶνε οὐσιῶδες ἀνώμαλον σημεῖον. Ἡ ἰδιότης αὕτη διακρίνει πλήρως τοὺς πόλους ἀπὸ τὰ οὐσιώδη ἀνώμαλα σημεῖα. Διότι, ἐνῶ τὸ $|f(z)|$ αὐξάνει ἀπεριορίστως εἰς τὴν περιοχὴν τοῦ πόλου, ἡ τιμὴ τῆς $f(z)$ παρουσιάζει πλήρη ἀοριστίαν εἰς τὴν περιοχὴν ἑνὸς οὐσιώδους ἀνωμάλου σημείου.

Ὡς γνωστὸν ὁ κ. Picard [2]) συνεπλήρωσε τελείως τὸ θεώρημα τοῦ Weierstrass, ἀποδείξας ὅτι πᾶσα ἐξίσωσις $f(z)=c$ δέχεται ἀπειρίαν ριζῶν εἰς τὴν περιοχὴν ἑνὸς οὐσιώδους ἀνωμάλου σημείου. Δύναται νὰ λάβῃ χώραν ἐξαίρεσις διὰ τιμὰς τοῦ c οὐχὶ πλείονας τῆς μιᾶς διὰ τὰς ἀκεραίας συναρτήσεις.

Π. χ. ἡ συνάρτησις $e^{\frac{1}{z}}$ δέχεται τὴν 0 ἐξαιρετικὴν τιμήν· συμβαίνει ὅμως πολλάκις ὥστε νὰ μὴ ὑπάρχουν ποσῶς ἐξαιρετικαὶ τιμαί, λ. χ. ἡ ημ$\frac{1}{z}$ στερεῖται ἐξαιρετικῶν τιμῶν.

Αἱ μερόμορφοι συναρτήσεις δέχονται δύο ἐξαιρετικὰς τιμάς, αἱ δὲ πλειονότιμοι μὲ ν κλάδους δέχονται 2ν τὸ πολύ, ὡς ἀπέδειξε ὁ Γ. Ρεμοῦνδος [3]).

Ἡ παροῦσα μελέτη ἀναφέρεται εἰς τὰς ἐξαιρετικὰς ταύτας τιμὰς τοῦ Picard τὰς σχετικὰς μὲ τὰς ἀκεραίας συναρτήσεις, ἔχει δὲ ὡς ἀφετηρίαν τὸ θεώρημα τοῦ Calugareano [4]), βάσει τοῦ ὁποίου ἡ ἐξαιρετικὴ τιμὴ

---

1) E. Goursat : Cours d'Analyse, T. II, p. 99.

2) E. Picard : Mémoire sur les fonctions entières (Annales de l'École Nomale Sup^{re}, 2 serie, t. IX, 1880).

3) G. Remoundos : Sur les zéros d' une classe de fonctions transcendantes Thèse, Paris, 1905.

4) Calugareano G. : Sur la determination des valeurs exceptionnelles des fonctions entières et meromorphes de genre fini. (Bulletin des Sc. Math. 2e serie, t. LLV, 1930).

μιᾶς συναρτήσεως γένους p, ὅταν ὑπάρχει, ἐπαληθεύει μίαν ἀλγεβρικὴν ἐξίσωσιν.

Τῶν ἐξισώσεων τούτων γίνεται λεπτομερὴς μελέτη καὶ εὑρίσκεται ἀνώτερον πέρας τῆς ἐξαιρετικῆς τιμῆς, ἐπίσης ἐρευνῶνται περιπτώσεις σχετικαὶ μὲ τὴν ὕπαρξιν τῶν ἀναλυτικῶν ὑπερβατικῶν συναρτήσεων τῶν δεχομένων δοθεῖσαν ἐξαιρετικὴν τιμήν.

Προτάσσονται γνωσταὶ ἔννοιαι (ἀποτελοῦσαι τὸ πρῶτον μέρος τῆς παρούσης μελέτης), ἀφορῶσαι τὰς ἀναλυτικὰς συναρτήσεις, καθὼς καὶ ἡ πρότασις μετὰ τῆς ἀποδείξεως τοῦ θεωρήματος τοῦ Calugareano, ὅπερ εἶναι τὸ σημεῖον τῆς ἀναχωρήσεως τῆς παρούσης μελέτης.

I

Θεωρήσωμεν τὴν μονότιμον συνάρτησιν $f(z)$ ἐν τῷ τόπῳ Δ, τῷ ὁριζομένῳ ὑπὸ τῆς γραμμῆς Γ. Κατασκευάζομεν τὰς συναρτήσεις $G(z, a_i)$, $G(z, b_j)$ τοῦ Green τὰς σχετικὰς μὲ τὰς ῥίζας καὶ τοὺς πόλους τῆς συναρτήσεως $f(z)$ τὰς κειμένας ἐν τῷ τόπῳ Δ.

Τότε εἶναι γνωστὸν ὅτι ἐκ τοῦ τύπου τοῦ Jensen [1]) προκύπτει ὁ ἑξῆς τύπος, τὸν ὁποῖον ὀνόμασαν οἱ κ. κ. R καὶ F Nevanlinna [2]) τύπον τοῦ Poisson-Jensen:

$$\log|f(z)| = \frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma} \log|f(\zeta)| \frac{dG}{dn} ds - \sum_j G(z, a_i) + \sum_j G(z, b_j)$$

Αἱ συναρτήσεις G τοῦ τύπου τοῦ Poisson-Jensen ἔχουν κατασκευασθεῖ ὡς ἑξῆς: Ἔστω P σημεῖον σταθερὸν ἐσωτερικὸν εἰς τὴν περιοχὴν Δ· M σημεῖον μεταβλητόν· ἡ συνάρτησις τοῦ Green ἡ σχετικὴ μὲ τὸ σημεῖον P καὶ τὴν περιοχὴν Δ: G (P, M) ὁρίζεται ὑπὸ τῶν ἀκολούθων συνθηκῶν: εἶναι μία συνάρτησις ἁρμονικὴ καὶ ὁμαλὴ εἰς ὅλην τὴν περιοχὴν Δ, ἐκτὸς ἀπὸ τὸ σημεῖον P, ὅπου αὕτη γίνεται ἄπειρος, ὅπως ὁ $-\log \overline{PM}$· ἐπὶ πλέον μηδενίζεται ὅταν τὸ M εἶναι ἐπὶ τῆς περιφερείας. Ὁ τύπος τοῦ Poisson-Jensen καταντᾶ εἰς τὸν ἑξῆς, ὅταν ἡ περίμετρος Γ εἶναι περιφέρεια κύκλου ἀκτῖνος r καὶ κέντρου O:

$$\log\left|f(\varrho e^{\varphi i})\right| = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log\left|f(re^{\theta i})\right| \frac{r^2-\varrho^2}{r^2-2\varrho r\,\sigma\upsilon\nu(\theta-\varphi)+\varrho^2}\,d\theta -$$

$$-\sum_i \log\left|\frac{\bar{a}_i z - r^2}{r(z-a_i)}\right| + \sum_j \log\left|\frac{\bar{b}_j z - r^2}{r(z-b_j)}\right|$$

ὅπου ἔχει τεθεῖ $\zeta = re^{\theta i}$, $z = \varrho e^{\varphi i}$

[1]) J. Jensen: Sur un nouvel et important théorème de la theorie des fonctions (Acta Math. T. 22, p. 359-364).

[2]) F. Nevanlinna: Bemerkungen zur Theorie der ganzen Funktionen endlicher Ordnung (Soc. Sc. Fennicae Ph. Math. II 4, 1923).

R. Nevanlinna: Über eine klasse meromorpher Funktionen (Math. Annalen Bd. 92, H 3/4 1924).

R. Nevanlinna: Zur Theorie der meromorphen Funktionen (Acta Math., T 46, 1925).

Ἄς θέσωμεν

$$m(r, z) = \frac{1}{2\pi} \int_{0}^{2\pi} \overset{+}{\log} \left| \frac{1}{f\left(re^{\theta i}\right) - z} \right| d\theta$$

ὅπου $\overset{+}{\log}\, t$ παριστάνει ἢ τὸν ἀριθμὸν $\log t$ ἐὰν $t > 1$, ἢ τὸν ἀριθμὸν 0 ἐὰν $0 \leq t \leq 1$. Διὰ $z = \infty$ ὀφείλει ἡ ὑπὸ τὸ ὁλοκλήρωμα παράστασις $\frac{1}{f-z}$ νὰ ἀντικατασταθῇ ὑπὸ τῆς f. Ἐπίσης ἂς θέσωμεν

$$N(r, z) = \int_{0}^{r} \frac{n(t, z)}{t} dt = \sum_{r_\nu < r} \log \frac{r}{r_\nu(z)}$$

ὅπου $r_\nu(z)$ παριστάνει τὰς ἀπολύτους τιμὰς τῶν πόλων τῆς $f(z)$ καὶ $n(t, z)$, ὅπως συνήθως, τὸ πλῆθος τῶν πόλων, οἱ ὁποῖοι ὅμως ἔχουν μέτρον $\neq 0$ καὶ μικρότερον τοῦ r.

Τότε ὁ τύπος τοῦ Poisson-Jensen τίθεται προφανῶς ὑπὸ τὴν μορφήν:

$$m(r, \infty) + N(r, \infty) = m(r, 0) + N(r, 0) + \log |f(0)|$$

Ὁ κ. R. Nevanlinna [1]) ἐθεώρησε τὸ ἑξῆς ἄθροισμα διὰ μερόμορφον συνάρτησιν

$$(1) \qquad m(r, z) + N(r, z)$$

καὶ ἀπέδειξε

1) Τὸ ἄθροισμα (1) εἶναι μία αὔξουσα συνάρτησις τοῦ r.

2) Τὸ ἄθροισμα (1) εἶναι κάτωθεν μία κυρτὴ συνάρτησις τοῦ $\log r$.

Ἐκ τούτων προκύπτει τὸ ἑξῆς πρῶτον θεμελιῶδες θεώρημα τοῦ κ. R. Nevanlinna.

Ἔστω $f(z)$ μία μερόμορφος συνάρτησις διάφορος σταθερᾶς καὶ a οἱοσδήποτε πεπερασμένος ἀριθμός. Τότε εἶναι

$$m(r, \infty) + N(r, \infty) = m(r, a) + N(r, a) + h(r)$$

ὅπου $h(r)$ διὰ πᾶν $r > 0$ εἶναι κλειστὴ συνάρτησις.

Πρὸς ἀπόδειξιν τοῦ θεωρήματος τούτου θεωρήσωμεν τὴν ἔκφρασιν:

$$m(r, a) + N(r, a)$$

---

1) R. Nevanlinna: Zur Theorie der meromorphen Funktionen (Acta Math. T. 46, 1925).

ἡ ὁποία κατὰ τὸν τύπον τοῦ Poisson-Jensen ἰσοῦται μὲ τὴν

$$m\left(r, \frac{1}{f-a}\right) + N\left(r, \frac{1}{f-a}\right)$$

Ἄς ὑπολογίσωμεν τὴν παράστασιν:

$$m(r, f-a) + N(r, f-a).$$

Παρατηροῦμεν ἐν πρώτοις ὅτι οἱ πόλοι τῆς $f(z)-a$ εἶναι οἱ αὐτοὶ μὲ τοὺς πόλους τῆς $f(z)$ ὥστε ἔχομεν:

$$N(r, f-a) = N(r, f)$$

Ἀφ' ἑτέρου

$$|f(z)-a| \leqq |f(z)| + |a|$$

$$\log |f(z)-a| \leqq \log [|f(z)| + |a|]$$

ἐκ τῆς ὁποίας προκύπτει

$$\overset{+}{\log} |f(z)-a| \leqq \overset{+}{\log} |f(z)| + \overset{+}{\log} |a| + \log 2$$

ἐπομένως

$$m(r, f-a) \leqq m(r, f) + \overset{+}{\log} |a| + \log 2$$

Ὁμοίως

$$|a| + |f(z)-a| \geqq |f(z)|$$

ἐπομένως

$$\overset{+}{\log} |f(z)-a| + \overset{+}{\log} |a| + \log 2 \geqq \overset{+}{\log} |f(z)|$$

ἐξ οὗ

$$m(r, f-a) + \overset{+}{\log} |a| + \log 2 \geqq m(r, f)$$

Ὥστε δυνάμεθα νὰ γράψωμεν

$$|m(r, f-a) - m(r, f)| \leqq \overset{+}{\log} |a| + \log 2$$

Ἐὰν προσθέσωμεν ἐντὸς τοῦ μέτρου τοῦ πρώτου μέλους τὸ $N(r, f-a) - N(r, f) = 0$ θὰ εἶναι

$$|[m(r, f) + N(r, f)] - [m(r, f-a) + N(r, f-a)]| \leqq \overset{+}{\log} |a| + \log 2$$

ἐξ οὗ προκύπτει

$$m(r, a) + N(r, a) - m(r, \infty) - N(r, \infty) = h(r)$$

Ἀποδεικνύεται μάλιστα ἐπὶ πλέον ὅτι ἡ συνάρτησις αὕτη h(r) διὰ πᾶν $r > o$ ἐπαληθεύει τὴν ἀνισότητα

$$| h(r) | \leq | \log | c_\mu || + \log 2 + \overset{+}{\log} | a |$$

ὅπου c_μ εἶναι ὁ πρῶτος μὴ μηδενιζόμενος συντελεστὴς τοῦ ἀναπτύγματος τοῦ Laurent τῆς συναρτήσεως $f(z) - a$.

Ἔστω a τυχὼν μιγαδικὸς ἀριθμός. Σημειοῦμεν τὸ ἄθροισμα (1) δι' αὐτὴν τὴν τιμὴν $z = a$ συντόμως μὲ T(r). Ὥστε θὰ ἔχομεν ἐξ ὁρισμοῦ ἐὰν τὸ $a = \infty$

$$T(r) \equiv m(r, \infty) + N(r, \infty)$$

Θὰ σημειοῦμεν πολλάκις T(r, f) ἀντὶ T(r) ὅταν πρόκειται περὶ πολλῶν συναρτήσεων. Ἡ συνάρτησις αὕτη T(r) λέγεται χαρακτηριστικὴ συνάρτησις.

Ἡ θεμελιώδης πρότασις γίνεται τότε:

Πρὸς ἑκάστην μερόμορφον συνάρτησιν f(z), ἡ ὁποία δὲν ἀνάγεται εἰς σταθεράν, ἀντιστοιχεῖ μία πραγματικὴ συνάρτησις T(r) μὲ τὰς ἑξῆς ἰδιότητας:

1) T(r) εἶναι μία αὔξουσα κυρτὴ συνάρτησις τοῦ logr

2) Ἐὰν a εἶνε οἱοσδήποτε,πεπερασμένος ἢ ἄπειρος, μιγαδικὸς ἀριθμὸς τότε εἶναι

$$m(r, a) + N(r, a) = T(r) + b(r)$$

ὅπου b (r) εἶναι μία συνάρτησις κλειστὴ οἱοσδήποτε καὶ ἂν εἶναι ὁ ἀριθμὸς a.

Ἐκ τῆς προτάσεως ταύτης προκύπτει εὐκόλως ὡς πόρισμα ὅτι: ἐὰν f(z) εἶναι μία μερόμορφος συνάρτησις διάφορος σταθερᾶς καὶ α, β, γ, δ πεπερασμένοι, καὶ ἀνεξάρτητοι τοῦ z μιγαδικοὶ ἀριθμοί, τοιοῦτοι ὅμως ὥστε

$$\alpha\delta - \beta\gamma \neq o$$

τότε

$$T\left(r, \frac{\alpha f + \beta}{\gamma f + \delta}\right) = T(r, f) + b(r)$$

Ἐπίσης ἐκ τοῦ θεμελιώδους θεωρήματος τοῦ Nevanlinna προκύπτει ἡ ἑξῆς πρότασις:

Ἐὰν τὸ ἄθροισμα $m(r, \infty) + N(r, \infty)$ μένει διὰ μίαν τιμὴν z, ἀνεξάρτητον τοῦ r, μικρότερον ἑνὸς ὡρισμένου ἀριθμοῦ τότε ἡ ἀντίστοιχος μερόμορφος συνάρτησις εἶναι σταθερά. Δηλ. ἐὰν ἡ $T(r)$, ἀντίστοιχος τῆς $f(z)$ εἶναι κλειστὴ ἡ $f(z)$ εἶναι σταθερά.

Θεωρήσωμεν ἤδη τὴν περίπτωσιν, καθ' ἣν ἡ $f(z)$ εἶναι ἀκεραία συνάρτησις. Τότε προφανῶς μηδενίζεται ἐκ ταυτότητος ἡ ἔκφρασις $N(r, \infty)$ καὶ ἡ χαρακτηριστικὴ συνάρτησις $T(r)$ ἀνάγεται:

$$T(r) \equiv m(r, \infty)$$

Ἐκ τοῦ ὁρισμοῦ ὅμως τῆς τελευταίας ταύτης ἐκφράσεως προκύπτει ὅτι $T(r) \leq \log M(r)$, ὅπου $M(r)$ παριστοῦμεν, ὡς συνήθως, τὴν μεγίστην τιμὴν τοῦ $|f(z)|$ ἐπὶ τῆς περιφερείας $|z| = r$. Τότε προκύπτει εὐκόλως, ἐκ τοῦ τύπου τοῦ Poisson - Jensen, ἡ ἑξῆς ἀνισότης, ὅπου $o < r < \varrho$

$$\log\left|f(re^{\varphi i})\right| = \frac{1}{2\pi}\int_o^{2\pi} \log\left|f(\varrho e^{\theta i})\right| \frac{\varrho^2 - r^2}{\varrho^2 + r^2 - 2\varrho r\,\sigma\upsilon\nu(\theta-\varphi)}\,d\theta - \sum_{|\alpha_\mu| < r} \log\left|\frac{\varrho^2 - \bar{\alpha}_\mu z}{\varrho(z-\alpha_\mu)}\right| \leq$$

$$\leq \frac{1}{2\pi}\int_o^{2\pi} \overset{+}{\log}\left|f(\varrho e^{\theta i})\right| \frac{\varrho^2 - r^2}{\varrho^2 + r^2 - 2\varrho r\,\sigma\upsilon\nu(\theta-\varphi)}\,d\theta \leq \frac{\varrho + r}{\varrho - r}\, m(\varrho, \infty)$$

Ἐντεῦθεν προκύπτει ἡ πρότασις:

Ἐὰν $f(z)$ εἶναι μία ἀκεραία συνάρτησις, τότε ἰσχύει δι' ἕκαστον $o < r < \varrho$ ἡ ἀνισότης:

$$T(r) \leq \log M(r) \leq \frac{\varrho + r}{\varrho - r}\, T(\varrho)$$

Διὰ τὴν τιμὴν $\varrho = 2r$ ἔχομεν

$$T(r) \leq \log M(r) \leq 3\,T(2r)$$

Ἐὰν ἡ $T(r)$ εἶναι κλειστὴ συμβαίνει τὸ αὐτὸ καὶ διὰ τὸν $\log M(r)$, δηλ. ἡ ἀντίστοιχος συνάρτησις ἀνάγεται εἰς σταθεράν.

Προκύπτει ἐντεῦθεν ἐπίσης ὅτι ἡ παράστασις $\frac{T(r)}{\log r}$ ὀφείλει νὰ αὐξάνῃ ἀπεριορίστως καὶ μάλιστα, ἐὰν μένει κλειστή, ἡ $f(z)$ ἀνάγεται εἰς πολυώνυμον.

Εἰς τὴν θεωρίαν τῶν ἀκεραίων συναρτήσεων ὀνομάζουν τάξιν τὸ ἀνώτερον ὅριον:

$$\overline{o\varrho}_{r=\infty} \frac{\log\log M(r)}{\log r}$$

Δύο περιπτώσεις παρουσιάζονται: ἤ τὸ ὅριον τοῦτο εἶνε ἄπειρον καὶ ἡ συνάρτησις εἶναι γένους ἀπείρου, ἤ εἶναι ἴσον μὲ q καὶ ἡ f(z) εἶναι συνάρτησις τάξεως q.

Ἐὰν θεωρήσωμεν μίαν συνάρτησιν τάξεως q, δι' r ἀρκετὰ μέγα θὰ ἔχωμεν

$$\frac{\log_2 M(r)}{\log r} < q + \varepsilon \quad \left(\log_2 M(r) = \log\log M(r) \right)$$

καὶ ἑπομένως

$$M(r) < e^{r^{q+\varepsilon}}$$

Εὑρίσκομεν ὁμοίως διὰ μίαν ἄπειρον σειρὰν τιμῶν τοῦ r ὅτι θὰ ἔχωμεν

$$M(r) > e^{r^{q+\varepsilon}}$$

Ἀλλὰ αἱ δύο αὗται ἀνισότητες δὲν λέγουν τίποτε διὰ τὴν τιμὴν τοῦ μεγαλειτέρου ὁρίου τοῦ πηλίκου:

$$\frac{\log M(r)}{r^q}$$

Ὁ κ. Pringsheim [1]) κατέταξε τὰς συναρτήσεις ὡς ἑξῆς:

1) Ἐὰν τὸ μεγαλείτερον τοῦτο ὅριον εἶναι ἄπειρον ἡ f(z) ἀνήκει εἰς τὸν τύπον μέγιστον τάξεως q.

2) Ἐὰν εἶναι πεπερασμένον, ἀλλὰ διάφορον τοῦ μηδενός, ἡ f(z) ἀνήκει εἰς τὸν μέσον τύπον τάξεως q.

3) Ἐὰν εἶναι μηδὲν ἡ f(z) ἀνήκει εἰς τὸν τύπον ἐλάχιστον τάξεως q.

Ὁ κ. Valiron [2]) μάλιστα ὑποδιήρεσε τὰς συναρτήσεις τύπου ἐλαχίστου εἰς δύο τάξεις ἀκόμη ἐὰν τὸ

$$\int_{r_0}^{\infty} \frac{\log M(r)}{r^{q+1}}$$

—τὸ ὁποῖον ἄλλωστε δὲν δύναται νὰ ἔχῃ ἔννοιαν παρὰ ἐὰν ἡ f(z) ἀνήκει εἰς τὸν τύπον ἐλάχιστον τάξεως q, (διότι διὰ r ἀρκετὰ μέγα

$$\varepsilon > \int_{r_0}^{\infty} \frac{\log M(r)}{r^{q+1}}\, dr > \log M(r) \int_{r_0}^{\infty} \frac{dr}{r^{q+1}} \text{ ἢ } \frac{\log M(r)}{r^q} < q\varepsilon) —$$

---

1) A. Pringsheim: Elementare Theorie der ganzen transcendenten Funktionen von endlicher Ordnung (Math. Ann. T. LVIII, 1904, s. 257-342).

2) Valiron G.: Sur les fonctions entières d'ordre fini (Bull. des Sc. Math. 2e serie T. XLV 1921).

εἶναι συγκλῖνον, ὁπότε ἡ f (z) εἶναι τύπου συγκλίνοντος, ἢ ἀποκλῖνον, ὁπότε ἡ f (z) εἶναι τύπου ἀποκλίνοντος.

Ἀνωτέρω ἴδωμεν ὅτι αἱ συναρτήσεις T (r) καὶ M (r) αἱ σχετικαὶ μὲ μίαν ἀκεραίαν συνάρτησιν συνδέονται διὰ τῆς διπλῆς ἀνισότητος:

$$T(r) \leq \log M(r) \leq 3\,T(2r)\,.$$

Θὰ δείξωμεν ὅτι ἡ ἀντικατάστασις τῆς T(r) εἰς τὴν log M(r) ὁδηγεῖ εἰς τὴν αὐτὴν ταξινόμησιν τῶν ἀκεραίων συναρτήσεων.

Ἡ παροῦσα ἀνισότης δίδει τὴν ἀνισότητα

$$\frac{\log T(r)}{\log r} \leq \frac{\log_2 M(r)}{\log r} \leq \frac{\log 3T(2r)}{\log 2r}\,\frac{\log 2r}{\log r}$$

ἡ ὁποία δεικνύει ἀμέσως ὅτι τὰ μεγαλείτερα ὅρια τῶν παραστάσεων

$$\frac{\log_2 M(r)}{\log r} \quad \text{καὶ} \quad \frac{\log T(r)}{\log r}$$

εἶναι συγχρόνως ἄπειρα ἢ ἴσα μὲ τὸν αὐτὸν πεπερασμένον ἀριθμὸν q. Ὑποθέσωμεν τὴν τάξιν πεπερασμένην καὶ ἴσην μὲ q. Αἱ ἀνισότητες

$$\frac{T(r)}{r^q} \leq \frac{\log M(r)}{r^q} \leq \frac{3\,T(2r)}{r^q}$$

δεικνύουν ὅτι τὰ μεγαλείτερα ὅρια τῶν παραστάσεων

$$\frac{T(r)}{r^q} \quad \text{καὶ} \quad \frac{\log M(r)}{r^q}$$

εἶναι συγχρόνως ἄπειρα, πεπερασμένα, ἢ μηδέν.

Ἡ αὐτὴ ἀνισότης δεικνύει ὅτι, ἐὰν ἀντικαταστήσωμεν τὸ q διὰ τοῦ q+1, τὰ ὁλοκληρώματα

$$\int_{r_0}^{\infty} \frac{T(r)}{r^{q+1}}\,dr \quad \text{καὶ} \quad \int_{r_0}^{\infty} \frac{\log M(r)}{r^{q+1}}\,dr$$

εἶναι συγχρόνως συγκλίνοντα ἢ ἀποκλίνοντα.

῾Επομένως διὰ τὴν μελέτην τῶν ἀκεραίων συναρτήσεων καὶ τὴν ταξινόμησίν των εἶναι τὸ αὐτὸ νὰ μεταχειριζόμεθα τὴν συνάρτησιν $T(r)$ ἢ τὴν συνάρτησιν $\log M(r)$.

Διὰ τὰς μερομόρφους συναρτήσεις ὀνομάζουν τ ά ξ ι ν τὸν ἀριθμὸν

$$\overline{\text{ορ}}_{r=\infty} \frac{\log T(r)}{\log r}$$

διὰ τὴν ἀντίστοιχον μερόμορφον συνάρτησιν.

Εἰς τὴν περίπτωσιν ὅπου ἡ τάξις q εἶναι πεπερασμένος ἀριθμὸς ἀνήκει ἡ θεωρουμένη συνάρτησις εἰς τὸν τύπον μέγιστον, μέσον, ἐλάχιστον, ἐὰν ὁ ἀριθμὸς

$$\overline{\text{ορ}}_{r=\infty} \frac{T(r)}{r^q}$$

εἶναι ἄπειρον, πεπερασμένος καὶ θετικός, μηδέν.

Τέλος ἡ συνάρτησις αὔτη ἀνήκει εἰς τὸν συγκλίνοντα ἢ ἀποκλίνοντα τύπον ἐὰν τὸ ὁλοκλήρωμα

$$\int^{\infty} \frac{T(r)}{r^{q+1}} dr$$

εἶναι συγκλῖνον ἢ ἀποκλῖνον.

Φαίνεται, ὅπως καὶ προηγουμένως, ὅτι μία συνάρτησις συγκλίνοντος τύπου ἀνήκει κατ᾽ ἀνάγκην εἰς τὸν τύπον ἐλάχιστον.

῎Ας θεωρήσωμεν τὸ ὁλοκλήρωμα

$$(1) \qquad \int^{\infty} \frac{T(r)}{r^{\lambda+1}} dr$$

᾽Αποδεικνύονται αἱ ἑξῆς προτάσεις:

1) ᾽Εὰν τὸ ὁλοκλήρωμα (1) διὰ δοθὲν $\lambda > 0$ εἶναι συγκλῖνον τότε ἡ σειρὰ

$$\Sigma \left[\frac{1}{r_\nu(x)}\right]^\lambda$$

εἶναι συγκλίνουσα διὰ πᾶσαν τιμὴν τοῦ x, ὅπου $r_\nu(x)$ παριστάνουν τὰς ἀπολύτους τιμὰς τῶν πόλων.

2) Ἔστω f (z) μία μερόμορφος συνάρτησις καὶ

$$M(r, x) = \underset{|z| = r}{\mu\varepsilon\gamma} \left| \frac{1}{f(z) - x} \right|$$

ὅπου, διὰ $z = \infty$, ἀντὶ $f - x$ θὰ θέσωμεν $\frac{1}{f}$.

Ἐὰν τὸ ὁλοκλήρωμα (1) διὰ δοθὲν $\lambda > o$ εἶναι συγκλῖνον, τότε τὸ ὁλοκλήρωμα

$$\int^{\infty} \frac{\overset{+}{\log} M(r,x)}{r^{\lambda+1}} dr$$

δι' ἕκαστον x συγκλίνει.

3) Ἔστω f (z) μία μερόμορφος συνάρτησις. Ἐὰν διὰ δοθὲν $\lambda > o$ τὸ ὁλοκλήρωμα

$$\int^{\infty} \frac{\overset{+}{\log} M(r,x)}{r^{\lambda+1}} dr$$

καὶ ἡ σειρὰ

$$\Sigma \left[\frac{1}{r_\nu(x)}\right]^\lambda$$

συγκλίνουν ἀμφότερα διὰ μίαν τιμὴν x, τότε συγκλίνουν δι' ὅλας τὰς τιμὰς τοῦ x.

Εἶναι γνωστὸν τὸ ἀνάπτυγμα τοῦ Weierstrass διὰ τὰς ἀκεραίας συναρτήσεις f (z)

$$f(z) = e^{P(z)} z^p \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{a_n}\right) e^{Q_\nu(z)}$$

ὅπου P (z) εἶναι πολυώνυμον ὡς πρὸς z ἢ μία ἄλλη ἀκεραία συνάρτησις, $a_1, a_2, \ldots a_n, \ldots$ εἶναι αἱ ῥίζαι τῆς συναρτήσεως f (z) κατὰ τάξιν μεγέθους τοῦ μέτρου των καὶ $Q_\nu(z)$ εἶναι πολυώνυμον.

Καὶ ἀντιστρόφως ἐὰν δοθῇ μία ἄπειρος ἀκολουθία

$$a_1,\ a_2, \ldots\ a_n, \ldots$$

ὅπου $| a_n |$ αὐξάνει ἀπείρως μετὰ τοῦ n τότε δυνάμεθα νὰ σχηματίσωμεν μίαν ἀπειρίαν ἀκεραίαν συναρτήσεων, αἱ ὁποῖαι νὰ δέχωνται τοὺς ὅρους τῆς ἀκολουθίας ταύτης ὡς ρίζας καὶ μόνον αὐτάς.

Ὅταν ὑπάρχει ἀκέραιος p τοιοῦτος ὥστε ἡ σειρὰ

$$\sum |a_n|^{-p}$$

νὰ συγκλίνῃ, τότε δυνάμεθα νὰ λάβωμεν ὅλα τὰ πολυώνυμα $Q_\nu(z)$ βαθμοῦ $p-1$.

Τότε δίδεται μία ἀκεραία συνάρτησις ὑπὸ τὴν μορφὴν

$$f(z) = z^r e^{P(z)} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{a_n}\right) e^{\frac{z}{a_n} + \ldots + \frac{1}{p-1}\left(\frac{z}{a_n}\right)^{p-1}}$$

ὅπου $P(z)$ εἶναι βαθμοῦ τὸ πολὺ $p-1$. Ὁ ἀριθμὸς $p-1$ λέγεται γένος τῆς ἀκεραίας συναρτήσεως.

Προκύπτει κατόπιν εὐκόλως ὅτι, ἐὰν μία ἀκεραία συνάρτησις $f(z)$ στερεῖται τελείως ριζῶν τίθεται ὑπὸ τὴν μορφὴν

$$f(z) = e^{P(z)}$$

ὅπου ὁ βαθμὸς τοῦ $P(z)$ ἰσοῦται ἀκριβῶς μὲ τὸ γένος τῆς $f(z)$.

Τέλος ἐὰν ἡ $f(z)$ ἔχει ρίζας πλήθους πεπερασμένου τότε τίθεται ὑπὸ τὴν μορφὴν

$$f(z) = R(z)\, e^{P(z)}$$

ὅπου $R(z)$ εἶναι πολυώνυμον τοῦ ὁποίου αἱ ρίζαι συμπίπτουν μὲ τὰς ρίζας τῆς δοθείσης συναρτήσεως $f(z)$.

Κατ' ἀναλογίαν μὲ τὸ ἀνάπτυγμα τοῦτο τῶν ἀκεραίων συναρτήσεων ὁ κ. Nevanlinna [1]) παρέστησε μίαν μερόμορφον συνάρτησιν πεπερασμέ-

[1]) R. Nevanlinna: Zur Theorie der Meromorphen Funktionen (Acta Math. T. 46, s. 31).

νης τάξεως ὡς πηλίκον δύο ἀκεραίων συναρτήσεων, ἀποδείξας τὸ ἑξῆς θεώρημα:

Ἔστω f (z) μία μερόμορφος συνάρτησις πεπερασμένης τάξεως μὲ ρίζας $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ καὶ πόλους $\beta_1, \beta_2, \ldots$ καὶ q εἷς ἀκέραιος τοιοῦτος ὥστε

$$(1) \quad \underset{r=\infty}{\text{ορ}} \frac{T(r)}{r^{q+1}} = 0$$

Ἐὰν εἶναι f (o) $\neq$ o, ∞ τότε δι' ἕκαστον πεπερασμένον κύκλον $|z| < r$ ἡ συνάρτησις f (z) τίθεται ὑπὸ τὴν μορφὴν

$$(2)\ f(z) = e^{\sum\limits_{0}^{\nu} c_\nu z^\nu} \times \underset{\varrho=\infty}{\text{ορ}} \frac{\prod\limits_{|\alpha_\mu|<\varrho} \left(1-\frac{z}{\alpha_\mu}\right) e^{\frac{z}{\alpha_\mu}+\frac{1}{2}\left(\frac{z}{\alpha_\mu}\right)^2+\ldots+\frac{1}{q}\left(\frac{z}{\alpha_\mu}\right)^q}}{\prod\limits_{|\beta_\nu|<\varrho} \left(1-\frac{z}{\beta_\nu}\right) e^{\frac{z}{\beta_\nu}+\frac{1}{2}\left(\frac{z}{\beta_\nu}\right)^2+\ldots+\frac{1}{2}\left(\frac{z}{\beta_\nu}\right)^q}}$$

Ἐκ ταύτης καὶ τῆς προτάσεως 1 τῆς σελίδος 92 προκύπτει εὐκόλως καὶ ἡ ἑξῆς πρότασις

Ἐὰν τὸ ὁλοκλήρωμα

$$\int^{\infty} \frac{T(r)}{r^{q+2}}\, dr$$

εἶναι συγκλῖνον, τότε ἡ f(z) τίθεται ὑπὸ τὴν μορφὴν

$$(3) \quad f(z) = e^{\sum\limits_{0}^{\nu} c_\nu z^\nu} \frac{\prod\limits_{1}^{\infty} E\left(\frac{z}{\alpha_\nu}, q\right)}{\prod\limits_{1}^{\infty} E\left(\frac{z}{\beta_\nu}, q\right)}$$

ὅπου E παριστάνει τὸν στοιχειώδη παράγοντα τοῦ Weierstrass

$$E(u, q) = (1-u)\, e^{u+\frac{u^2}{2}+\ldots+\frac{u^q}{q}}$$

Εἶναι φανερὸν ὅτι ἐὰν ἡ ἀρχὴ τῶν συντεταγμένων εἶναι ρίζα τάξεως m τότε τὸ ἀνάπτυγμα θὰ γίνῃ

$$(3') \ f(z) = z^m e^{\sum\limits_{0}^{\nu} c_\nu z^\nu} \frac{\prod\limits_{1}^{\infty} E\left(\frac{z}{\alpha_\nu}, q\right)}{\prod\limits_{1}^{\infty} E\left(\frac{z}{\beta_\nu}, q\right)}$$

Ὑπὸ τὰς προϋποθέσεις τῆς προτάσεως ταύτης προκύπτει ὅτι ἀμφότεραι αἱ σειραὶ

$$\Sigma \left| \frac{1}{\alpha_\nu} \right|^{1+\lambda} \quad \text{καὶ} \quad \Sigma \left| \frac{1}{\beta_\nu} \right|^{1+\lambda}$$

συγκλίνουν διὰ $\lambda = q$. Ἔστω τώρα ὅτι $\lambda = k \leq q$ εἶναι ὁ μικρότερος, μὴ ἀρνητικός, ἀκέραιος ἀριθμός, διὰ τὸν ὁποῖον ἀμφότεραι αἱ σειραὶ νὰ συγκλίνουν. Τότε τὰ ὑπάρχοντα εἰς τὸν τύπον (3) γινόμενα συγκλίνουν ἐπίσης ἐὰν τὸ q ἀντικατασταθῇ εἰς τοὺς στοιχειώδεις παράγοντας διὰ τοῦ k.

Ὥστε δύναται νὰ παρουσιασθῇ ἡ f (z) καὶ ὑπὸ τὴν μορφὴν

$$(3_\alpha) \quad f(z) = z^m e^{P(z)} \frac{\prod_1^\infty E\left(\frac{z}{\alpha_\nu}, k\right)}{\prod_1^\infty E\left(\frac{z}{\beta_\nu}, k\right)}$$

ὅπου P (z) εἶναι πολυώνυμον βαθμοῦ h.

Τότε ὁρίζομεν γ έ ν ο ς τῆς μερομόρφου συναρτήσεως f (z) τόν μέγιστον τῶν ἀριθμῶν h καὶ k.

Ἐκ τῆς προηγουμένης προτάσεως προκύπτει ἀμέσως καὶ ἡ ἑξῆς πρότασις :

Τὸ γένος μιᾶς μερομόρφου συναρτήσεως δὲν εἶναι μεγαλείτερον ἀπὸ τὴν τάξιν ταύτης.

Ἰσχύει δὲ καὶ ἡ ἑξῆς ἰδιότης :

Μία μερόμορφος συνάρτησις, διὰ τὴν ὁποίαν τὸ κατώτερον ὅριον

$$\underline{o\varrho}_{r=\infty} \frac{T(r)}{\log r}$$

εἶναι πεπερασμένον, ἀνάγεται εἰς ῥητὴν συνάρτησιν.

Διὰ τὰς ἀκεραίας συναρτήσεις ὑπάρχει ἐπὶ πλέον καὶ ἡ ἑξῆς πρότασις :

Ἡ ἀκεραία συνάρτησις

$$\prod E\left(\frac{z}{\alpha_\nu}, q\right)$$

γένους q ἐπαληθεύει τὴν ἀνισότητα

$$T(r) < cr^q \left(\int_0^r \frac{N(t)}{t^{q+1}} dt + r \int_r^\infty \frac{N(t)}{t^{q+2}} dt \right) \quad \left[N(t) \equiv N(t,0) \right]$$

ὅπου c ἀριθμὸς ἀνεξάρτητος τοῦ r.

Διὰ νὰ ὁρίσωμεν τὸ γένος μιᾶς μερομόρφου συναρτήσεως μεταχειριζόμεθα τὴν ἑξῆς πρότασιν:

Ἐὰν μία μερόμορφος συνάρτησις ἀκεραίας τάξεως λ ἐπαληθεύει τὴν συνθήκην

$$\overline{\text{ορ}}_{r=\infty} \frac{T(r)}{r^{\lambda}} > 0,$$

τότε τὸ γένος της εἶναι ἴσον μὲ λ. Ἐὰν τοὐναντίον εἶναι

$$\overline{\text{ορ}}_{r=\infty} \frac{T(r)}{r^{\lambda}} = 0,$$

τότε ἡ συνάρτησις εἶναι γένους λ—1 εἰς τὴν περίπτωσιν καθ' ἣν τὸ ὁλοκλήρωμα

$$\int^{\infty} \frac{T(r)}{r^{\lambda+1}} dr$$

συγκλίνει· ἐὰν τὸ ὁλοκλήρωμα τοῦτο τοὐναντίον ἀποκλίνει, τότε εἶναι τὸ γένος ἢ λ—1, ἢ λ ἀναλόγως, ἐὰν ἀμφότεραι αἱ σειραί:

$$\sum \left[\frac{1}{r_{\nu}(0)}\right]^{\lambda} \quad \text{καὶ} \quad \sum \left[\frac{1}{r_{\nu}(\infty)}\right]^{\lambda}$$

συγκλίνουν, ἢ τοὐλάχιστον ἡ μία τούτων ἀποκλίνῃ.

Ἐκ τοῦ θεωρήματος τούτου ἀποδεικνύεται εὐκόλως, ὅτι ὑπάρχει ἡ ἑξῆς σχέσις μεταξὺ τῆς τάξεως λ καὶ τοῦ γένους p μερομόρφου συναρτήσεως:

$$\lambda - 1 \leq p \leq \lambda.$$

Ἴδομεν προηγουμένως τὸ πρῶτον θεμελιῶδες θεώρημα τοῦ κ. R. Nevanlinna τὸ σχετικὸν μὲ τὴν ὕπαρξιν χαρακτηριστικῆς συναρτήσεως, προσηρτημένης εἰς ἑκάστην μερόμορφον συνάρτησιν.

Ἓν δεύτερον θεώρημα μᾶς χρειάζεται, διὰ νὰ ὁρίσωμεν ἀνώτερον πέρας τῆς αὐξήσεως τῆς χαρακτηριστικῆς συναρτήσεως T (r), γνωρίζοντες τὰς συναρτήσεις $N(r, a_i)$ τὰς σχετικὰς μὲ ἕναν ὡρισμένον ἀριθμὸν τιμῶν

$$a_1, a_2, \ldots, a_q.$$

Προτοῦ προβοῦμεν εἰς τὴν σπουδὴν τοῦ δευτέρου θεμελιώδους θεωρήματος τοῦ κ. Nevanlinna, δίδομεν ἓν ὅριον διὰ τὴν μέσην λογαριθμικὴν τιμὴν τοῦ πηλίκου $\frac{f'(z)}{f(z)}$ ἐπὶ τῆς περιφερείας C_r, κέντρου 0 καὶ ἀκτῖνος r.

᾽Αποδεικνύεται οὕτω ὅτι

$$m\left(r, \frac{f'}{f}\right) \leq 24 + 4 \overset{+}{\log} R + 3 \overset{+}{\log} \frac{1}{R-r} + 2 \overset{+}{\log} \frac{1}{r} + 3 \overset{+}{\log} \frac{1}{|c_0|} + 4 \log T(r),$$

ὅπου $o < r < R \leq 2r$ καὶ c_0 εἶναι ἡ τιμὴ τῆς συναρτήσεως $f(z)$ εἰς τὴν ἀρχήν, τὴν ὁποίαν ὑποθέτομεν διάφορον τοῦ μηδενός.

῾Η σχέσις αὕτη ἀπαλάσσεται τῆς ἰσότητος ἐὰν ἀντικατασταθῇ ὑπὸ τῆς

$$m\left(r, \frac{f'}{f}\right) < 2 \overset{+}{\log} R + 3 \overset{+}{\log} \frac{1}{R-r} + 4 \overset{+}{\log} T(R,f) + O(1) \quad ^{1)}$$

ὅπου $O(1)$ παριστάνει μέγεθος, τὸ ὁποῖον, διὰ r αὐξάνον ἐπ᾽ ἄπειρον, μένει μικρότερον πεπερασμένου πέρατος.

Δίδομεν ὡρισμένον ἀριθμὸν τιμῶν πεπερασμένων καὶ διαφόρων

$$a_1, a_2, \ldots, a_q \quad (q > 3)$$

καὶ ζητεῖται ἐὰν ἡ διανομὴ τῶν ριζῶν τῶν ἐξισώσεων

$$f(z) - a_k = 0,$$

ὅπου $f(z)$ εἶναι μία οἱαδήποτε μερόμορφος συνάρτησις, δύναται νὰ μᾶς πληροφορήσῃ περὶ τῆς αὐξήσεως τῆς χαρακτηριστικῆς συναρτήσεως $T(r,f)$. Ἢ σαφέστερον:

Γνωρίζοντες τὰς τάξεις μεγέθους τῶν παραστάσεων

$$N(r, a_k) \quad (k = 1, 2, \ldots q)$$

δυνάμεθα νὰ τὰς μεταχειρισθῶμεν διὰ νὰ ὁρίσωμεν ἀνώτερον πέρας τῆς αὐξήσεως τῆς συναρτήσεως $T(r, f)$;

῞Οπως διὰ τὸ πρῶτον θεώρημα τοῦ κ. Nevanlinna εἰσαγάγαμεν τὰς συναρτήσεις $f(z) - a$ καὶ $\frac{1}{f(z)-a}$, εἰσάγομεν ἐδῶ τὰς συναρτήσεις

$$F(z) = \left[f(z)-a_1\right] \left[f(z)-a_2\right] \cdots\cdots \left[f(z)-a_q\right]$$

1) Γράφομεν γενικώτερον (Landau) $\varphi(x) = O(f(x))$, ἐὰν $\left|\frac{\varphi(x)}{f(x)}\right|$ δι᾽ αὐξάνον x μένει κλειστόν.

καὶ

$$\Phi(z)=\frac{1}{f(z)-a_1}+\frac{1}{f(z)-a_2}+\dots\dots+\frac{1}{f(z)-a_q}$$

καὶ θὰ ζητήσωμεν ὅριον διὰ τὴν μέσην λογαριθμικὴν τιμὴν τῆς $\Phi(z)$. Δυνάμεθα νὰ γράψωμεν

$$\Phi(z)=\frac{1}{f(z)}\ \frac{f(z)}{f'(z)}\ \frac{F'(z)}{F(z)}$$

ἢ

$$m(r,\Phi)<m\left(r,\frac{1}{f}\right)+m\left(r,\frac{f}{f'}\right)+m\left(r,\frac{F'}{F}\right)$$

Ἐὰν ὑποθέσωμεν ὅτι εἰς τὴν περιοχὴν τῆς ἀρχῆς εἶναι

$$f(z)=c_0+c_h z^h+\dots\dots,$$

τότε θὰ ἔχομεν

$$m\left(r,\frac{1}{f}\right)=m(r,f)+N(r,f)-N\left(r,\frac{1}{f}\right)+\overset{+}{\log}\frac{1}{|c_0|}$$

$$(1)\qquad m\left(r,\frac{f}{f'}\right)=m\left(r,\frac{f'}{f}\right)+N\left(r,\frac{f'}{f}\right)-N\left(r,\frac{f}{f'}\right)+\overset{+}{\log}\left|\frac{c_0}{h\,c_h}\right|.$$

Ἀλλὰ

$$N(r,u.v)=N(r,u)+N(r,v)-\sum_i\log\frac{r}{|c_i|},$$

ὅπου τὸ ἄθροισμα ἐκτείνεται εἰς τὰς τιμὰς c_i, μέτρου μικροτέρου τοῦ r, αἱ ὁποῖαι εἶνε συγχρόνως πόλοι τῆς u καὶ ρίζαι τῆς v καὶ ἀντιστρόφως.

Ἐπίσης

$$N\left(r,\frac{1}{u.v}\right)=N\left(r,\frac{1}{u}\right)+N\left(r,\frac{1}{v}\right)-\sum_i\log\frac{r}{|c_i|}.$$

Ἔχομεν λοιπὸν τὴν ταυτότητα

$$N(r,u.v)-N\left(r,\frac{1}{u.v}\right)=N(r,u)+N(r,v)-N\left(r,\frac{1}{u}\right)-N\left(r,\frac{1}{v}\right),$$

ἡ ὁποία, ἐφαρμοζομένη διὰ τὴν διαφορὰν $N\left(r,\frac{f'}{f}\right)-N\left(r,\frac{f}{f'}\right)$, δίδει διὰ τὸν ἀνωτέρω τύπον (1)

$$m\left(r,\frac{f}{f'}\right)=m\left(r,\frac{f'}{f}\right)+N(r,f')-N\left(r,\frac{1}{f'}\right)+N\left(r,\frac{1}{f}\right)+\overset{+}{\log}\left|\frac{c_0}{hc_h}\right|.$$

Ἐξ οὗ ἓν πρῶτον ὅριον τῆς $m(r, \Phi)$

$$(\alpha) \quad m(r, \Phi) < m(r, f) + m\left(r, \frac{f'}{f}\right) + m\left(r, \frac{F'}{F}\right) + N(r, f') -$$

$$- N\left(r, \frac{1}{f'}\right) + \overset{+}{\log} \frac{1}{|h c_h|}.$$

Διὰ νὰ εὕρωμεν κατώτερον ὅριον διὰ τὴν $m(r, \Phi)$ θὰ γράψωμεν:

$$\Phi(z) = \frac{1}{f(z) - a_i}\left[1 + \sum_k{}' \frac{f(z) - a_i}{f(z) - a_k}\right].$$

Ἄς σημειώσωμεν μὲ δ ἀριθμὸν μικρότερον τῆς μονάδος καὶ ὅλων τῶν διαφορῶν τῶν σημείων a_i, a_j καὶ ἄς θεωρήσωμεν τὸ σύνολον τῶν σημείων, διὰ τὰ ὁποῖα ἔχομεν

$$|f(z) - a_i| < \frac{\delta}{2q}.$$

Διὰ τὰ σημεῖα ταῦτα θὰ ἔχωμεν

$$|f(z) - a_k| \geqq |a_i - a_k| - |f - a_i|$$

$$|f(z) - a_k| \geqq \delta - \frac{\delta}{2q} > \frac{3\delta}{2}, \text{ ἐπειδὴ } q > 2.$$

Ἑπομένως

$$\left|\sum_k{}' \frac{f(z) - a_i}{f(z) - a_k}\right| < q \, \frac{\frac{\delta}{2q}}{\frac{3\delta}{4}} = \frac{2}{3},$$

ἐκ τῆς ὁποίας, ἐπειδὴ

$$|\Phi(z)| \geqq \frac{1}{|f(z) - a_i|}\left[1 - \left|\sum_k{}' \frac{f(z) - a_i}{f(z) - a_k}\right|\right],$$

προκύπτει ἡ

$$3\,|\Phi(z)| > \frac{1}{|f(z) - a_i|}$$

καὶ ἑπομένως

$$\overset{+}{\log} |\Phi(z)| > \overset{+}{\log} \frac{1}{|f(z) - a_i|} - \log 3$$

καὶ τοῦτο διὰ τό σύνολον τῶν σημείων z, διὰ τὰ ὁποῖα

$$| f(z) - a_i | < \frac{\delta}{2q}.$$

Παραστήσωμεν μὲ σ_i τὸ σύνολον τῶν τόξων τῆς περιφερείας C_r, τῶν ἀνηκόντων εἰς τὸ σύνολον τοῦτο καὶ μὲ σ_i' τὸ σύνολον τῶν ὑπολοίπων τόξων.

Συμφώνως μὲ τὴν ἐκλογὴν τοῦ δ τὰ τόξα $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_q$ εἶναι ἐξωτερικὰ τὰ μὲν τῶν δὲ καὶ ἔχομεν

$$m(r,\Phi) > \sum_k \frac{1}{2\pi}\int_{\sigma_k} [\log^+ \frac{1}{| f(z)-a_k |} - \log 3]\, d\theta.$$

Ἀλλὰ

$$\sum_k \frac{1}{2\pi}\int_{\sigma_k} \log 3\, d\theta < \log 3$$

καὶ

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\sigma_k} \log^+ \frac{1}{| f(z)-a_k |}\, d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log^+ \frac{1}{| f(z)-a_k |}\, d\theta - \int_{\sigma_k'} \log^+ \frac{1}{|f(z)-a_k|} d\theta.$$

Ἀλλὰ ἐπὶ τῶν τόξων σ_k' ἔχομεν

$$\frac{1}{| f(z)-a_k |} < \frac{2q}{\delta},$$

ἑπομένως

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\sigma_k} \log^+ \frac{1}{| f(z)-a_k |}\, d\theta > m\left(r,a_k\right) - \log\frac{2q}{\delta},$$

ἐκ τῆς ὁποίας τὸ δεύτερον ζητούμενον ὅριον

$$(\beta) \qquad m(r, \Phi) \geqq \sum_k m(r, a_k) - \log 3 - q \log \frac{2q}{\delta}.$$

Συγκρίνοντες τὰ δύο ὅρια (α) καὶ (β) εὑρίσκομεν

$$\sum_k m(r,a_k) < m(r,f) + m(r, \frac{f'}{f}) + m(r, \frac{F'}{F}) + N(r,f') -$$

$$-N(r,\frac{1}{f'}) + \overset{+}{\log} \frac{3}{|h c_h|} + q \log \frac{2q}{\delta}.$$

Τὸ ἀποτέλεσμα τοῦτο ὑποθέτει ὅτι αἱ τιμαὶ a_k εἶναι πεπερασμέναι. Ἐὰν προσθέσωμεν εἰς τὰ δύο μέλη τῆς ἀνισότητος τὸ m (r, f) θὰ ἔχωμεν

$$\sum_{k=1}^{q+1} m(r,a_k) < 2\, m(r,f) + m(r,\frac{f'}{f}) + m(r,\frac{F'}{F}) + N(r,f') -$$

$$-N(r,\frac{1}{f'}) + \overset{+}{\log} \frac{3}{|h c_h|} + q \log \frac{2q}{\delta},$$

ὅτε ἡ τιμὴ ∞ δύναται νὰ ὑπάρχῃ μεταξὺ τῶν q+1 τιμῶν a_k.

Ἀντικαθιστῶντες τώρα τὸ m (r, f) διὰ τοῦ T (r, f) — N (r, f) καὶ τὸ m (r, a_k) διὰ τοῦ T (r, f) — N (r, a_k) — $b_k(r)$, ἐπιτυγχάνομεν τὴν θεμελιώδη ἀνισότητα:

$$(q-2)\; T(r,f) < \sum_{k=1}^{q} N(r,a_k) - N_1(r) + S(r),$$

εἰς τὴν ὁποίαν ἔχομεν θέσει

$$N_1(r) \equiv 2\, N(r,f) - N(r,f') + N(r,\frac{1}{f'})$$

$$S(r) \equiv m(r,\frac{f'}{f}) + m(r,\frac{F'}{F}) - \overset{+}{\log} \frac{3}{|h c_h|} + q \log \frac{2q}{\delta} + \sum_{k=1}^{q} b_k(r)$$

Ἡ ἀνισότης αὕτη—ἡ ὁποία μᾶς ἐπιτρέπει νὰ εὕρωμεν ὅριον διὰ τὴν αὔξησιν τῆς χαρακτηριστικῆς συναρτήσεως T (r), γνωρίζοντες τὴν αὔξησιν τῶν συναρτήσεων N (r, a_k), εἰς σχέσιν, ἐν τούτοις, ὥστε ἡ αὔξησις τῆς S (r) νὰ εἶναι παραλείψιμος ἀπέναντι τοῦ T (r) — ἀποτελεῖ τὴν ἀναλυτικὴν ἔκφρασιν τοῦ δευτέρου θεμελιώδους θεωρήματος τοῦ κ. Nevanlinna.

Ἂς μεταφράσωμεν τὸ $N_1(r)$· ἔχομεν

$$N(r,f) = \sum_j \log \frac{r}{|b_j|}$$

καὶ

$$N(r,f') = \sum_j \log \frac{r}{|b_j'|}\,.$$

ὅπου οἱ πόλοι b_j' τῆς f′(z) δὲν εἶναι ἄλλοι ἀπὸ τοὺς πόλους τῆς f(z) μὲ τάξιν πολλαπλότητος αὐξηθεῖσαν κατὰ 1. Ἑπομένως ἐντὸς τῆς

$$2N(r,f) - N(r,f')$$

θὰ παρουσιάζονται οἱ αὐτοὶ ὅροι, οἱ ὁποῖοι παρουσιάζονται εἰς τὴν $N(r,f)$ μὲ τάξιν πολλαπλότητος ἐλαττωθεῖσαν κατὰ μονάδα. Ὁμοίως, ἐὰν α εἶναι μία ρίζα τάξεως h τῆς $f(z)=c^{te}$, αὕτη θὰ εἶναι ρίζα τάξεως $h-1$ τῆς $f'(z)=0$ καὶ ἐν συνόλῳ θὰ παρουσιάζονται εἰς τὴν $N_1(r,f)$, ὑπὸ τὴν μορφὴν $\log \frac{r}{|\alpha|}$, ὅλα τὰ πολλαπλὰ στοιχεῖα τῆς $f(z)$, τὰ μικρότερα κατὰ μέτρον τοῦ r, μὲ τάξιν πολλαπλότητος ἐλαττωθεῖσαν κατὰ μονάδα.

Μένει νὰ ἐξετάσωμεν τὴν αὔξησιν τῆς $S(r)$ καὶ νὰ τὴν παραβάλωμεν μὲ τὴν τῆς $T(r)$.

Μεταχειριζόμεθα τὸ ὅριον τῆς $m\left(r,\frac{f'}{f}\right)$ τὸ εὑρεθὲν εἰς τὴν σελ. 98 θὰ ἔχωμεν

$$m\left(r,\frac{f'}{f}\right)+m\left(r,\frac{F'}{F}\right)<48+8\log^+ R+4\log^+\frac{1}{r}+6\log^+\frac{1}{R-r}+3\log^+\frac{1}{|c_0|}+$$

$$+3\log^+\frac{1}{|F(o)|}+4\log^+ T(R,f)+4\log^+ T(R,F).$$

Ἔχομεν

$$T(R,F)=\sum_k T(R,f-a_k)=q\left[T(R,f)+\log^+ a_k+\log 2\right],$$

ἐκ τῆς ὁποίας

$$S(r)\leqq k+8\log^+ R+8\log^+ T(R,f)+6\log^+\frac{1}{R-r},$$

ὅπου k σταθερὰ μεγαλειτέρα τῆς

$$48+4\log 3+4\log q+q\log\frac{2q}{\delta}+3\log^+\frac{1}{|c_o|}+3\log^+\frac{1}{|F(o)|}+\log^+\frac{3}{|h\,c_h|}+$$

$$+\sum_k \log^+\log^+ a_k+\sum_k b_k(r)+4\log^+\frac{1}{r}.$$

Ἐὰν $f(z)$ εἶναι μία ἀκεραία συνάρτησις τάξεως ϱ, τότε, λαμβάνοντες $R=2r$ καὶ ὑποθέτοντες ὅτι $r>1$, θὰ χάνεται ὁ τελευταῖος ὅρος τῆς $S(r)$ καὶ ἐπειδὴ

$$\overline{\text{ορ}}_{r=\infty}\frac{\log T(2r)}{\log 2r}=\varrho,$$

θὰ δυνάμεθα νὰ γράψωμεν

$$S(r) \leq k \log r,$$

ὅπου k κατάλληλος σταθερά.

Ἐὰν f(z) εἶναι μία συνάρτησις τάξεως ἀπείρου, δυνάμεθα ἀκόμη νὰ ὁρίσωμεν τὴν αὔξησιν τῆς S(r) μεταχειριζόμενοι τὸ ἑπόμενον θεώρημα, ὀφειλόμενον εἰς τὸν κ. Borel [1]).

Ἐὰν δοθῇ μία αὔξουσα συνάρτησις F(r) καὶ ἐὰν δοθῇ εἰς τὴν μεταβλητὴν ἡ τιμὴ

$$R = r + \frac{1}{\log F(r)},$$

ἔχομεν

$$F(R) < [F(r)]^k \qquad k > 1$$

ἐκτὸς δι' ὡρισμένας τιμὰς τοῦ r (ἐξαιρετικάς), τὰς ὁποίας δυνάμεθα ἄλλωστε νὰ κλείσωμεν εἰς διαστήματα, τῶν ὁποίων τὸ ἄθροισμα εἶναι πεπερασμένον.

Ἂς ἐφαρμόσωμεν ἤδη τὸ θεώρημα τοῦτο εἰς τὴν περίπτωσιν τῆς χαρακτηριστικῆς συναρτήσεως T(r), τῆς σχετικῆς μὲ μίαν μερόμορφον συνάρτησιν τάξεως ἀπείρου. Λαμβάνοντες k = 2 καὶ

$$R = r + \frac{1}{\log T(r)},$$

θὰ ἔχωμεν

$$\log T(R) < 2 \log T(r)$$

$$\log^{+} \frac{1}{R-r} < \log^{+} \log^{+} T(r)$$

καὶ ἑπομένως

$$S(r) < k\,[\,\log r + \log T(r)\,],$$

ὅπου k εἶναι κατάλληλος σταθερά. Ἡ ἀνισότης αὕτη δὲν λαμβάνει χώραν δι' ὡρισμένας τιμὰς τοῦ r, αἱ ὁποῖαι ὅμως περιέχονται εἰς διαστήματα, τῶν ὁποίων τὸ ὁλικὸν μῆκος εἶναι πεπερασμένον.

---

1) É. Borel: Sur les zéros des fonctions entières, (Acta Math. T. 20, 1897, p. 374).

II

Θὰ ἴδωμεν ἤδη πῶς τὰ ἀποτελέσματα τοῦ προηγουμένου κεφαλαίου μᾶς ἐπιτρέπουν νὰ ἀποδείξωμεν τὸ θεώρημα τοῦ κ. Picard [1]:

Δίδεται μία μερόμορφος συνάρτησις f(z). *Δὲν δύνανται νὰ ὑπάρχουν τρεῖς τιμαὶ* a, b, c, *διὰ τὰς ὁποίας αἱ ἐξισώσεις*

$$f(z)-a=0, \quad f(z)-b=0, \quad f(z)-c=0.$$

νὰ μὴ ἔχουν ῥίζας.

Πράγματι ἐφαρμόσωμεν τὴν θεμελιώδη ἀνισότητα λαμβάνοντες διὰ τιμὰς a_1, a_2, a_3 τὰς a, b, c· ἐπιτυγχάνομεν—παραλείποντες τὸν ὅρον $N_1(r)$, πρᾶγμα τὸ ὁποῖον ἐνισχύει τὴν ἀνισότητα—,

$$T(r) < S(r),$$

διότι

$$N(r, a) = N(r, b) = N(r, c) = 0.$$

Ἔχομεν

$$T(r) < k\left[\log r + \log T(r)\right],$$

τὸ ὁποῖον δὲν λαμβάνει χώραν διὰ τὰ ἐξαιρετικὰ διαστήματα.

Ἂς λάβωμεν μίαν ἄπειρον ἀκολουθίαν τιμῶν, ὁμαλῶς αὐξανομένων ἐπ' ἄπειρον. Δυνάμεθα νὰ ἐκλέξωμεν τὰς τιμὰς ταύτας ἀρκούντως μεγάλως, ὥστε νὰ ἔχομεν

$$\frac{k\log T(r)}{T(r)} < \frac{1}{2}.$$

Διὰ τὴν ἀκολουθίαν ταύτην τῶν τιμῶν τοῦ r θὰ εἶναι

$$T(r)\left[1 - \frac{k\log T(r)}{T(r)}\right] < k\log r,$$

ὥστε

$$\frac{T(r)}{\log r} < 2k$$

---

[1] É. Picard: Memoire sur les fonctions entières (Ann. de l' École Norm. Sup^{re} 2^{e} serie, t. IX, 1880).

πρᾶγμα τὸ ὁποῖον ἀποδεικνύει ὅτι

$$\text{ορ}_{r=\infty} \frac{T(r)}{\log r}$$

εἶναι κλειστὸν καὶ ἑπομένως ἡ συνάρτησις $f(z)$ εἶναι ῥητὴ (βλ. σελ. 96).

Πᾶσα συνάρτησις δεχομένη τρεῖς ἐξαιρετικὰς τιμὰς κατὰ τὴν ἔννοιαν τοῦ κ. Picard (δηλ. νὰ μὴ λαμβάνει αὐτὰς οὐδαμοῦ), ἀνάγεται εἰς ῥητὴν συνάρτησιν.

Θεωρήσωμεν μίαν μερόμορφον συνάρτησιν $f(z)$ τάξεως πεπερασμένης, ἡ ὁποία νὰ δέχεται δύο ἐξαιρετικὰς τιμάς, κατὰ τὴν ἔννοιαν τοῦ κ. Picard, α καὶ β. Ἡ συνάρτησις $\frac{f(z)-\alpha}{f(z)-\beta}$ δὲν ἔχει οὔτε ῥίζας, οὔτε πόλους καί, ἐπειδὴ εἶναι πεπερασμένης τάξεως, τίθεται ὑπὸ τὴν μορφὴν [1])

$$e^{P(z)},$$

ὅπου $P(z)$ εἶναι πολυώνυμον βαθμοῦ p, πρᾶγμα τὸ ὁποῖον ἀποδεικνύει — ἐπειδὴ ἡ τάξις διατηρεῖται διὰ ὁμογραφικοῦ μετασχηματισμοῦ — ὅτι ἡ τάξις τῆς $f(z)$ εἶναι ἀκεραία.

Ἑπομένως

Πᾶσα μερόμορφος συνάρτησις τάξεως πεπερασμένης δεχομένη δύο ἐξαιρετικὰς τιμὰς εἶναι τάξεως ἀκεραίας.

Ὁμοίως

Πᾶσα ἀκεραία συνάρτησις τάξεως πεπερασμένης δεχομένη μίαν ἐξαιρετικὴν τιμὴν εἶναι τάξεως ἀκεραίας.

Θὰ ζητήσωμεν νὰ εὕρωμεν τὰς συνθήκας, τὰς ὁποίας ὀφείλει νὰ πληροῖ ἀκεραία συνάρτησις, ἵνα δέχηται μίαν ἐξαιρετικὴν τιμὴν α.

Ἔστω ἡ ἀκεραία συνάρτησις τάξεως ἀκεραίας p

$$f(z)=c_0+c_1 z+c_2 z^2+\ldots+c_n z^n+\ldots$$

Ἐὰν δέχεται τὴν ἐξαιρετικὴν τιμὴν α θὰ ἔχωμεν

$$f(z)-\alpha=e^{P(z)}$$

---

[1]) É. Goursat: Cours d' Analyse t. II, p. 147.

$P(z)$ πολυώνυμον βαθμοῦ p. Ἐξ ἧς

$$\frac{f'(z)}{f(z)-\alpha} = P'(z) = \lambda_o + \lambda_1 z + \lambda_2 z^2 + \ldots + \lambda_{p-1} z^{p-1}.$$

Ταυτοποιοῦντες ἐπιτυγχάνομεν

$$\begin{aligned}
&\lambda_o (c_o - \alpha) = c_1 \\
&\lambda_o c_1 + \lambda_1 (c_o - \alpha) = 2c_2 \\
&\lambda_o c_2 + \lambda_1 c_1 + \lambda_2 (c_o - \alpha) = 3c_3 \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&\lambda_o c_{p-1} + \lambda_1 c_{p-2} + \ldots + \lambda_{p-1} (c_o - \alpha) = pc_p \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&\lambda_o c_q + \lambda_1 c_{q-1} + \ldots + \lambda_{p-1} c_{q-p+1} = (q+1) c_{q+1} \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Μία ἀναγκαία συνθήκη διὰ νὰ ὑπάρχῃ μία τιμὴ ἐξαιρετικὴ θὰ εἶναι ἡ ἑξῆς:

$$(\alpha) \quad \begin{vmatrix}
c_o - \alpha & o & o \ldots\ldots & o & c_1 \\
c_1 & c_o - \alpha & o \ldots\ldots & o & 2c_2 \\
c_2 & c_1 & c_o - \alpha \ldots\ldots & o & 3c_3 \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
c_{p-1} & c_{p-2} & c_{p-3} & c_o - \alpha & pc_p \\
c_p & c_{p-1} & c_{p-2} & c_1 & (p+1)\, c_{p+1}
\end{vmatrix} = 0$$

ἡ ὁποία ἀποδεικνύει ὅτι *ἡ ἐξαιρετικὴ τιμὴ α εἶναι ρίζα ἀλγεβρικῆς ἐξισώσεως βαθμοῦ* p. [1]).

Προφανῶς ἡ συνθήκη αὕτη δὲν εἶναι ἀρκετή: εἶναι ἀναγκαῖον ὅπως

[1]) Ὁ κ. Calugareano ἐγενίκευσε τὸ ἀποτέλεσμα τοῦτο, ἀποδείξας ὅτι μία μερόμορφος συνάρτησις τάξεως πεπερασμένης ρ δέχεται μίαν ἐξαιρετικὴν τιμὴν α, ἡ ὁποία εἶναι ρίζα ἀλγεβρικῆς ἐξισώσεως βαθμοῦ $E(\rho)+1$, ὅπου $E(\rho)$ παριστᾶ τὸ ἀκέραιον μέρος τοῦ ρ.

ὅλαι αἱ ὁρίζουσαι αἱ ἀνάλογοι πρὸς τὴν παροῦσαν νὰ εἶναι μηδέν.

Θεωρήσωμεν τώρα τυχοῦσαν σταθερὰν β. Θὰ ζητήσωμεν νὰ εὕρωμεν ἀκεραίας συναρτήσεις γένους p, αἱ ὁποῖαι νὰ δέχονται τὴν β ὡς ἐξαιρετικὴν τιμήν.

Ἔστω

$$F(z)=\alpha_0+\alpha_1 z+\alpha_2 z^2+\ldots+\alpha_n z^n+\ldots$$

μία τῶν ζητουμένων συναρτήσεων, ὅπου φυσικὰ προσδιοριστέοι εἶναι οἱ συντελεσταὶ $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n, \ldots$ Ἐπειδὴ β εἶναι τιμὴ ἐξαιρετικὴ θὰ ἔχομεν

$$F(z)-\beta=e^{P(z)},$$

P(z) πολυώνυμον βαθμοῦ p.

Θὰ ἔχωμεν ἑπομένως, ὅπως προηγουμένως

$$(1)\quad\left\{\begin{array}{l}\mu_0(\alpha_0-\beta)=\alpha_1\\ \mu_0\alpha_1+\mu_1(\alpha_0-\beta)=2\alpha_2\\ \cdots\cdots\cdots\\ \cdots\cdots\cdots\\ \mu_0\alpha_{p-1}+\mu_1\alpha_{p-2}+\ldots+\mu_{p-1}(\alpha_0-\beta)=p\alpha_p\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\end{array}\right.$$

καὶ ἐπὶ πλέον

$$(2)\quad\left|\begin{array}{cccccc}\alpha_0-\beta & o & o & \ldots & o & \alpha_1\\ \alpha_1 & \alpha_0-\beta & o & \ldots & o & 2\alpha_2\\ \alpha_2 & \alpha_1 & \alpha_0-\beta & \ldots & o & 3\alpha_3\\ \cdots & & & & & \cdots\\ \cdots & & & & & \cdots\\ \alpha_{p-1} & \alpha_{p-2} & \alpha_{p-3} & \ldots & \alpha_0-\beta & p\alpha_p\\ \alpha_p & \alpha_{p-1} & \alpha_{p-2} & \ldots & \alpha_1 & (p+1)\alpha_{p+1}\end{array}\right|=0$$

Αἱ p πρῶται σχέσεις τῶν (1) θὰ ὁριζον τοὺς προσδιοριστέους συντελεστὰς $\mu_0, \mu_1, \ldots, \mu_{p-1}$ ἐὰν ἡ ὁρίζουσα τῶν συντελεστῶν

$$(3)\quad \begin{vmatrix} \alpha_o-\beta & o & o & \ldots\ldots & o \\ \alpha_1 & \alpha_o-\beta & o & \ldots\ldots & o \\ \alpha_2 & \alpha_1 & \alpha_o-\beta & \ldots\ldots & o \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_{p-1} & \alpha_{p-2} & \alpha_{p-3} & \ldots\ldots & \alpha_o-\beta \end{vmatrix}$$

ἦτο διάφορος τοῦ μηδενός.

Οἱ συντελεσταὶ τοῦ ἀναπτύγματος τῆς F(z) εἶναι μὲν προσδιοριστέοι —ἀφοῦ δυνάμει τῶν σχέσων (1) ἐξαρτῶνται ἀπὸ τοὺς $\mu_o, \mu_1, \ldots, \mu_{p-1}$— ἀλλὰ ὀφείλουν νὰ εἶναι τοιοῦτοι ὥστε, νὰ καθιστοῦν τὴν ὁρίζουσαν (3) διάφορον τοῦ μηδενός.

Ἀλλὰ ἡ τιμὴ τῆς ὁριζούσης (3) εἶναι ἀνεξάρτητος τῶν $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$, καθ᾽ ὅσον ἰσοῦται μὲ $(\alpha_o - \beta)^p$.

Ὥστε θὰ εἶναι δυνατὸν νὰ προσδιορισθοῦν τὰ $\mu_o, \mu_1, \ldots, \mu_{p-1}$ καὶ ἑπομένως καὶ τὰ $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ ἐὰν

$$(4) \qquad \alpha_o - \beta \neq 0.$$

Ἐν τῶν προτέρων ἄλλωστε ἦτο φανερὸν ὅτι τὸ α_o δὲν ἔπρεπε νὰ λάβῃ τὴν τιμὴν β, διότι τότε ἡ F(z) θὰ ἐλάμβανε τὴν τιμὴν β, τοὐλάχιστον εἰς τὴν θέσιν z=0.

Ὥστε τὸ σύστημα τῶν p πρώτων ἐξισώσεων (1) δύναται νὰ λυθῇ, ἀφοῦ θέσωμεν τὴν προϋπόθεσιν ὅτι $\alpha_o \neq \beta$.

Ἐφαρμόζοντες τὸν γνωστὸν κανόνα εὑρίσκομεν:

$$\mu_o = \frac{\alpha_1(\alpha_o-\beta)^{p-1}}{(\alpha_o-\beta)^p} = \frac{\alpha_1}{\alpha_o-\beta}$$

$$\mu_1 = \qquad = \frac{2\alpha_2}{\alpha_o-\beta}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\mu_{p-1} = \qquad = \frac{p\alpha_p}{\alpha_o-\beta}$$

Κατὰ τὸν τρόπον τοῦτον ὁρίζονται οἱ p πρῶτοι συντελεσταὶ τοῦ ἀναπτύγματος τῆς συναρτήσεως F(z) ὡς ἑξῆς:

$$
(5) \quad \left\{
\begin{array}{l}
\alpha_o \neq \beta \\
\alpha_1 = \mu_o (\alpha_o - \beta) \\
\alpha_2 = \frac{\mu_1}{2} (\alpha_o - \beta) \\
\cdot \;\; \cdot \;\; \cdot \;\; \cdot \;\; \cdot \;\; \cdot \\
\cdot \;\; \cdot \;\; \cdot \;\; \cdot \;\; \cdot \;\; \cdot \\
\alpha_p = \frac{\mu_{p-1}}{p} (\alpha_o - \beta)
\end{array}
\right.
$$

Οἱ ἑπόμενοι συντελεσταὶ τοῦ ἀναπτύγματος τῆς F (z) ὁρίζονται τελείως, συναρτήσει τῶν $\mu_o, \mu_1, \dots \mu_{p-1}$· $\alpha_o, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p$, δυνάμει τῶν σχέσεων

$$\mu_o \alpha_q + \mu_1 \alpha_{q-1} + \mu_2 \alpha_{q-2} + \dots + \mu_{p-1} \alpha_{q-p+1} = (q+1)\, \alpha_{q+1}$$

Ἐκ τούτων προκύπτει τὸ ἑξῆς θεώρημα :

Δίδεται ἡ τιμὴ τῆς ὑπερβατικῆς συναρτήσεως f (z) *εἰς τὴν ἀρχὴν καὶ ἀριθμὸς* β ($\neq \alpha_o$)·
ἐπὶ πλέον δίδονται p *ἀριθμοὶ*

$$\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_p,$$

τότε εἶναι δυνατὸν νὰ ὑπολογίσωμεν ἀλγεβρικῶς (καὶ μάλιστα γραμμικῶς) τοὺς ἀριθμοὺς

$$\alpha_{p+1}, \alpha_{p+2}, \dots$$

οὕτως ὥστε ἡ ἀκεραία συνάρτησις

$$f(z) = \sum_{o}^{\infty} \alpha_n \; z^n$$

νὰ εἶναι γένους p, *καὶ νὰ δέχεται τὴν ἐξαιρετικὴν τιμὴν* β

Ἐκ τῆς πορείας τῆς ἀποδείξεως προκύπτει εὐκόλως καὶ ἡ ἑξῆς πρότασις :

Δοθέντος πολυωνύμου βαθμοῦ p *καὶ δύο σταθερῶν* α_o *καὶ* β ($\alpha_o \neq \beta$) *ὑπάρχει μία μόνη ἀκεραία συνάρτησις, τῆς ὁποίας ἡ τιμὴ εἰς τὴν ἀρχὴν εἶναι* α_o, *ἡ ὁποία δέχεται τὴν ἐξαιρετικὴν τιμὴν* β *καὶ ἡ ὁποία τίθεται ὑπὸ τὴν μορφήν :*

$$\beta + e^{P(z)}$$

ὅπου P(z) *τὸ δοθὲν πολυώνυμον.*

Θέτομεν ἤδη τὸ ζήτημα ἐάν, μεταξὺ τῶν συναρτήσεων τῶν ἀνταποκρινομένων πρὸς τὴν πρώτην πρότασιν, ὑπάρχουν συναρτήσεις τῶν ὁποίων οἱ ἀντίστοιχοι ὁρίζουσαι (2) νὰ ἔχουν ρίζαν δοθεῖσαν σταθερὰν γ. Ζητοῦμεν τουτέστι νὰ εὕρωμεν περιορισμούς, ὑπὸ τοὺς ὁποίους ὀφείλουν νὰ ὑπόκεινται αἱ ἄλλαι ρίζαι τῶν ἐξισώσεων (2).

Σχηματίσωμεν τὴν ἐξίσωσιν, τῆς ὁποίας ρίζα ὀφείλει νὰ εἶναι ἡ δοθεῖσα σταθερὰ γ:

$$
(6)\quad \varphi(x) \equiv \begin{vmatrix}
\alpha_0 - x & 0 & \dots & 0 & \mu_0(\alpha_0-\beta) \\
\mu_0(\alpha_0-\beta) & \alpha_0 - x & \dots & 0 & 2\frac{\mu_1}{2}(\alpha_0-\beta) \\
\frac{\mu_1}{2}(\alpha_0-\beta) & \mu_0(\alpha_0-\beta) & \dots & 0 & \mu_2(\alpha_0-\beta) \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
\frac{\mu_{p-2}}{p-1}(\alpha_0-\beta) & \frac{\mu_{p-3}}{p-2}(\alpha_0-\beta) & \dots & \alpha_0 - x & \mu_{p-1}(\alpha_0-\beta) \\
\frac{\mu_{p-1}}{p}(\alpha_0-\beta) & \frac{\mu_{p-2}}{p-1}(\alpha_0-\beta) & \dots & \mu_0(\alpha_0-\beta) & \mu_0\alpha_p + \dots + \mu_{p-1}\alpha_1
\end{vmatrix}
$$

Ἐφ᾽ ὅσον τὸ γ ὀφείλει νὰ εἶναι ρίζα τῆς ἐξισώσεως ταύτης θὰ ἔχομεν, ἐὰν συγχρόνως διαιρέσωμεν τὰς $p+1$ γραμμὰς διὰ τοῦ $\alpha_0 - \beta$, καὶ λάβωμεν ὑπ᾽ ὄψιν τὰς σχέσεις (5),

$$
\begin{vmatrix}
\frac{\alpha_0-\gamma}{\alpha_0-\beta} & 0 & \dots & 0 & \mu_0 \\
\mu_0 & \frac{\alpha_0-\gamma}{\alpha_0-\beta} & \dots & 0 & \mu_1 \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
\frac{\mu_{p-2}}{p-1} & \frac{\mu_{p-3}}{p-2} & \dots & \frac{\alpha_0-\gamma}{\alpha_0-\beta} & \mu_{p-1} \\
\frac{\mu_{p-1}}{p} & \frac{\mu_{p-2}}{p-1} & \dots & \mu_0 & \frac{\mu_0\mu_{p-1}}{p} + \frac{\mu_1\mu_{p-2}}{p-1} + \dots + \mu_{p-1}\mu_0
\end{vmatrix} = 0
$$

Ἡ ἐξίσωσις αὕτη εἶναι p βαθμοῦ ὡς πρὸς γ καὶ ἐπὶ πλέον δέχεται τὴν ρίζαν α· ὥστε ὑπάρχουν $p-1$ τὸ πολὺ τιμαὶ τῆς γ, διάφοροι τῆς α αἱ ὁποῖαι θὰ τὴν καθιστοῦν μηδέν. Ἑπομένως προκύπτει ἡ ἑξῆς πρότασις:

Δοθέντων τῶν α_0, μ_0, $\mu_1, \dots \mu_{p-1}$, β δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν $p-1$ τὸ πολὺ τιμὰς μιᾶς μεταβλητῆς x, διὰ νὰ καθίσταται ἡ ἀντίστοιχος (6) μηδέν.

Ἐκ τῶν τιμῶν τούτων θὰ εὕρωμεν μίαν κατὰ τὸν ἀκόλουθον τρόπον. Ἐὰν ζητήσωμεν τὰ στοιχεῖα τῆς τελευταίας στήλης νὰ ἰσοῦνται μὲ τὰ τῆς πρώτης θὰ εἶναι

$$(7) \quad \left| \begin{array}{l} \mu_o = \dfrac{\alpha_o - \gamma}{\alpha_o - \beta} \\ \mu_1 = \mu_o \\ \mu_2 = \dfrac{\mu_1}{2} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \mu_{p-1} = \dfrac{\mu_{p-2}}{p-1} \end{array} \right.$$

Ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν κατὰ μέλη θὰ ἔχωμεν:

$$\mu_{p-1} = \frac{1}{(p-1)!} \frac{\alpha_o - \gamma}{\alpha_o - \beta}$$

καὶ δυνάμει τῶν σχέσεων (5), αἳ ὁποῖαι ὁρίζουν τὰ α_k, θὰ ἔχωμεν

$$\alpha_k = \frac{\mu_{k-1}}{k} (\alpha_o - \beta) = \frac{\alpha_o - \gamma}{k!}.$$

Ἀλλὰ διὰ νὰ εἶναι ἡ ὁρίζουσα μηδὲν πρέπει ἐπὶ πλέον

$$\frac{\mu_o \mu_{p-1}}{p} + \frac{\mu_1 \mu_{p-2}}{p-1} + \dots + \mu_{p-1}\mu_o = \frac{\mu_{p-1}}{p}.$$

Ἀντικαθιστῶντες τὰς τιμὰς τῶν μ_o, μ_1, ..., μ_{p-1} ἀπὸ τὰς (7), θὰ λάβωμεν:

$$\frac{1}{p!}\left(\frac{\alpha_o-\gamma}{\alpha_o-\beta}\right)^2 + \frac{1}{(p-1)!}\left(\frac{\alpha_o-\gamma}{\alpha_o-\beta}\right)^2 + \frac{1}{2!(p-2)!}\left(\frac{\alpha_o-\gamma}{\alpha_o-\beta}\right)^2 + \dots + \frac{1}{(p-2)!\,2!}\left(\frac{\alpha_o-\gamma}{\alpha_o-\beta}\right)^2 +$$

$$+ \frac{1}{(p-1)!}\left(\frac{\alpha_o-\gamma}{\alpha_o-\beta}\right)^2 = \frac{1}{p!}\left(\frac{\alpha_o-\gamma}{\alpha_o-\beta}\right)$$

ἢ

$$\frac{1}{p!}\left(\frac{\alpha_o-\gamma}{\alpha_o-\beta}\right) = \left(\frac{\alpha_o-\gamma}{\alpha_o-\beta}\right)^2 \left[\frac{1}{p!} + \frac{1}{1!(p-1)!} + \dots + \frac{1}{(p-1)!1!}\right] =$$

$$= \frac{1}{p!}\left(\frac{\alpha_o-\gamma}{\alpha_o-\beta}\right) \left[1 + \frac{p!}{1!(p-1)!} + \dots + \frac{p!}{(p-1)!1!}\right]$$

ἢ

$$1=\frac{\alpha_o-\gamma}{\alpha_o-\beta}\left[\binom{p}{0}+\binom{p}{1}+\binom{p}{2}+\ldots+\binom{p}{p-1}\right]=\frac{\alpha_o-\gamma}{\alpha_o-\beta}\binom{p}{2-1}\ ^{1)}$$

Ἐὰν καλέσωμεν c τὴν σταθερὰν 2^p-1, ἡ ὁποία εἶναι διάφορος τῆς μονάδος, θὰ λάβομεν ὡς τιμὴν τοῦ γ τὴν

$$\gamma=\frac{c(\alpha_o-1)-\beta}{c}.$$

Ἐὰν δοθῇ τὸ γ καὶ ζητεῖται νὰ προσδιορισθῇ ἡ σταθερὰ α_o, τότε θὰ ἔχομεν

$$\alpha_o=\frac{c\gamma-\beta}{c-1}$$

χωρὶς νὰ εἶναι δυνατὸν τὸ c νὰ γίνῃ 1.

Ἐννοεῖται ὅτι ἔχομεν $p-1$ τιμὰς τοῦ γ, ὅταν λάβωμεν τὰ $\mu_o\,\mu_1\ldots,\mu_{p-1}$, ἐνῷ ἡμεῖς ἤδη εὕρωμεν τιμὰς τῶν $\mu_o,\mu_1,\ldots\,\mu_{p-1}$, ὥστε ἡ ὁρίζουσα αὕτη νὰ ἔχῃ ρίζαν τὸ γ, ἐὰν ἐκλέξωμεν τὸ

$$\alpha_o=\frac{c\gamma-\beta}{c-1}.$$

Δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν καὶ ἄλλας τοιαύτας τιμὰς τῶν $\mu_o,\mu_1\ldots,\mu_{p-1}$. Π. χ. ἐὰν ζητήσωμεν τὰ στοιχεῖα τῆς τελευταίας στήλης νὰ ἰσοῦνται μὲ τὰ ἀντίστοιχα τῆς $\lambda+2$ στήλης θὰ ἔχομεν:

$$\begin{aligned}
&\mu_o=0\\
&\mu_1=0\\
&\mu_2=0\\
&\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\\
&\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\\
&\mu_{\lambda-2}=0\\
&\mu_{\lambda-1}=\frac{\alpha_o-\gamma}{\alpha_o-\beta}\\
&\mu_\lambda\ =\mu_o=0\\
&\lambda_{\lambda+1}=\mu_1=0\\
&\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\\
&\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot
\end{aligned}$$

$$\frac{\mu_o\,\mu_{p-1}}{p}+\frac{\mu_1\,\mu_{p-2}}{p-1}+\ldots+\mu_{p-1}\,\mu_o=\frac{\mu_{p-1}}{p}.$$

---

1) Εἶναι γνωστὴ ἡ σχέσις $\binom{n}{o}+\binom{n}{1}+\ldots+\binom{n}{n}=2^n,\ \binom{n}{\nu}=\frac{n!}{\nu!\,(n-\nu)!}$

Ἐὰν τὸ λ εἶναι μεγαλύτερον τοῦ $\frac{p}{2}$, τότε προφανῶς ὅλοι οἱ ὅροι μ_κ, πλὴν τοῦ $\mu_{\lambda-1}$, θὰ γίνουν μηδέν, καὶ ἑπομένως θὰ εἶναι δυνατὸν νὰ ἐκλεγῇ καταλλήλως αὐτὸ τοῦτο τὸ $\mu_{\lambda-1}$ ὥστε νὰ εἶναι ρίζα ἡ γ.

Ἐὰν ὅμως τὸ λ εἶναι μικρότερον τοῦ $\frac{p}{2}$, τότε οἱ 2λ πρῶτοι μ_κ, πλὴν τοῦ $\mu_{\lambda-1}$, θὰ γίνουν μηδέν. Ἡ τελευταία δὲ σχέσις θὰ μᾶς δώσῃ τὴν κατάλληλον τιμὴν τοῦ γ.

Ἀπεδείχθη ἑπομένως ἡ ἑξῆς πρότασις:

Δοθέντος ἀριθμοῦ γ ὑπάρχει ἀκεραία συνάρτησις, δεχομένη δοθεῖσαν τιμὴν β ὡς ἐξαιρετικήν, κατὰ τὴν ἔννοιαν τοῦ Picard, *καὶ λαμβάνουσα εἰς τὴν ἀρχὴν* z = 0 *τιμὴν* Ω (γ), Ω *ὄντος ἀριθμοῦ ἐξαρτωμένου μόνον ἐκ τοῦ γ.*

Διὰ τὰς τοιαύτας συναρτήσεις αἱ ἀντίστοιχοι ἐξισώσεις (6) *ἔχουν ρίζαν τὴν γ.*

Ἐὰν ὡς γ ἐκλεγῇ ἡ α καὶ ὡς β μία τῶν ριζῶν τῆς (2), τότε αἱ δύο συναρτήσεις f(z) καὶ F(z) εἶναι τοιαῦται, ὥστε ἡ ἐξαιρετικὴ τιμὴ τῆς μιᾶς νὰ εἶναι ρίζα τῆς ἀντιστοίχου ἐξισώσεως (6) τῆς ἄλλης.

Ἡ συνάρτησις F(z), τὴν ὁποίαν κατὰ τὸν ὑποδειχθέντα τρόπον εὕρομεν, εἶναι ἡ ἑξῆς:

$$F(z) = \frac{c\gamma-\beta}{c-1} + \frac{\gamma-\beta}{c-1} z + \frac{1}{2!}\frac{\gamma-\beta}{c-1} z^2 + \cdots + \frac{1}{p!}\frac{\gamma-\beta}{c-1} z^p +$$

$$+ \frac{1}{(p+1)!}\frac{\gamma-\beta}{c-1} z^{p+1} + \alpha_{p+2} z^{p+2} + \alpha_{p+3} z^{p+3} + \cdots\cdots \qquad \left(c = 2^p - 1\right)$$

Οἱ ὑπόλοιποι συντελεσταὶ $\alpha_{p+2}, \alpha_{p+3}, \ldots$ ὑπολογίζονται ἐκ τῶν σχέσεων:

$$(p+2)\alpha_{p+2} = \mu_0\, \alpha_{p+1} + \mu_1\, \alpha_p + \cdots + \mu_{p-1}\, \alpha_2 =$$

$$= \frac{1}{c}\frac{1}{(p+1)!}\frac{\gamma-\beta}{c-1} + \frac{1}{c}\frac{1}{p!}\frac{\gamma-\beta}{c-1} + \ldots + \frac{1}{c}\ \frac{1}{(p-1)!}\frac{1}{2!}\frac{\gamma-\beta}{c-1} =$$

$$= \frac{1}{c(c-1)}(\gamma-\beta)\left[\frac{1}{(p+1)!}\left\{\binom{p+1}{0} + \binom{p+1}{1} + \cdots + \binom{p+1}{p-1}\right\}\right] =$$

$$= \frac{1}{(p+1)!}\frac{\gamma-\beta}{c(c-1)}\left[c - \binom{p+1}{p}\right]$$

ἢ

$$\alpha_{p+2} = \frac{1}{(p+2)!} \frac{\gamma - \beta}{c(c-1)} \left[c - \binom{p+1}{p} \right] \quad \text{κ. ο. κ.}$$

Ἂς ἐπανέλθωμεν πάλιν εἰς τὴν ὀρίζουσαν (α), τῶν ριζῶν τῆς ὁποίας θὰ ζητήσωμεν ἀνώτερον ὅριον.

Ἂς ὑπολογίσωμεν πρῶτον τὴν ἑξῆς ὀρίζουσαν:

$$G(x) = \begin{vmatrix} \alpha_{11}+x & \alpha_{12}\dots\dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{12} & \alpha_{12}+x\dots & \alpha_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \alpha_{1n} & \alpha_{2n}\dots & \alpha_{nn}+x \end{vmatrix}$$

Αὔτη εἶναι πολυώνυμον n βαθμοῦ. Τῆς ὀριζούσης ὅμως ταύτης ὅλοι οἱ ὅροι εἶναι τὸ πολὺ πολυώνυμα πρώτου βαθμοῦ τοῦ x.

Ἐὰν ἀναπτύξωμεν τὸ πολυώνυμον $G(x)$ κατὰ τὸν τύπον τοῦ Taylor, θὰ λάβομεν:

$$G(x) = G(o) + G'(o)\,x + \dots + \frac{1}{n!} G^{(n)}(o)\,x^n,$$

$$G(o) = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12}\dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22}\dots & \alpha_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2}\dots & \alpha_{nn} \end{vmatrix} \equiv A.$$

Ἡ παράγωγος λ τάξεως ($\lambda \leqslant n$) τῆς ὀριζούσης ταύτης εὑρίσκεται, ἐφ᾽ ὅσον τὰ στοιχεῖα τῆς ὀριζούσης εἶναι πολυώνυμα τὸ πολὺ πρώτου βαθμοῦ ὡς πρὸς x, ἐὰν λάβωμεν ἐκ τῶν n γραμμῶν (στηλῶν), καθ᾽ ὅλους τοὺς δυνατοὺς τρόπους, λ γραμμὰς (στήλας) καὶ ἀντικαταστήσωμεν τὰ στοιχεῖα τῶν λ γραμμῶν (στηλῶν) τούτων διὰ τῶν πρώτων παραγώγων των.

Τὸ ἄθροισμα τῶν οὕτω προκυπτουσῶν ὀριζουσῶν πολλαπλασιαζόμενον ἐπὶ $\lambda!$ δίδει τὴν $\lambda^{\text{τὴν}}$ παράγωγον [1]).

Τὸ πλῆθος τῶν ὀριζουσῶν τούτων εἶναι $\binom{n}{\lambda}$.

---

1) O. Perron: Algebra B. I, s. 94.

Πρὸς ὑπολογισμὸν λοιπὸν τοῦ $\frac{1}{\lambda!} G^{(\lambda)}(o)$ θὰ ἔχομεν, κατὰ τὴν ἀνωτέρω πρότασιν, τὸ ἄθροισμα τῶν $\binom{n}{\lambda}$ ὁριζουσῶν, τῶν ὁποίων ἡ πρώτη, ἐὰν τὸ $\lambda < n$, εἶναι ἡ

$$\begin{vmatrix} 1 & o \ldots\ldots & o & o \ldots\ldots & o \\ o & 1 \ldots\ldots & o & o \ldots\ldots & o \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ o & o \ldots\ldots & 1 & o \ldots\ldots & o \\ \alpha_{\lambda+1,1} & \alpha_{\lambda+1,2} \cdots & \alpha_{\lambda+1,\lambda} & \alpha_{\lambda+1,\lambda+1} \cdots & \alpha_{\lambda+1,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} \cdots & \alpha_{n\lambda} & \alpha_{n,\lambda+1} \cdots & \alpha_{nn} \end{vmatrix}$$

Ἐὰν ἀναπτύξωμεν ταύτην κατὰ τὰ στοιχεῖα τῆς πρώτης γραμμῆς, λαμβάνομεν μόνον ἕναν ὅρον· τὴν νέαν προκύπτουσαν ὁρίζουσαν τὴν ἀναπτύσομεν κατὰ τὰ στοιχεῖα πάλιν τῆς πρώτης γραμμῆς· λαμβάνομεν πάλιν ἕναν ὅρον κ. ο. κ. Τελικῶς ἡ ἄνω ὁρίζουσα θὰ καταντήσῃ

$$\begin{vmatrix} \alpha_{\lambda+1,\lambda+1} \cdots\cdots & \alpha_{\lambda+1,n} \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ \alpha_{n,\lambda+1} \cdots\cdots & \alpha_{nn} \end{vmatrix}$$

Ὁμοίως προκύπτουν καὶ αἱ ὑπόλοιποι $\binom{n}{\lambda}$ ὁρίζουσαι, αἱ ὁποῖαι προστιθέμεναι μᾶς δίδουν τὸ $\frac{1}{\lambda!} G^{(\lambda)}(o)$. Αὗται σχηματίζονται ἐκ τῆς ὁριζούσης A, ἐὰν ἐξαλείψωμεν οἱασδήποτε λ γραμμὰς καὶ τὰς λ στήλας, αἱ ὁποῖαι ἔχουν ἴσους ἀριθμούς. Ἐὰν μίαν τοιαύτην ὁρίζουσαν τὴν ὀνομάσομεν κυρίαν ἐλάσσονα τῆς A, τότε ὑπάρχουν $\binom{n}{\lambda}$ κύριαι ἐλάσσονες ὁρίζουσαι τάξεως $(n-\lambda)$ καὶ τὸ $\frac{1}{\lambda!} G^{(\lambda)}(o)$ εἶνε ἁπλῶς τὸ ἄθροισμά των. Διὰ $\lambda = n$ προκύπτει διὰ τὸ $\frac{1}{n!} G^{(n)}(o)$ μία μόνη ὁρίζουσα, τῆς ὁποίας ἡ κυρία διαγώνιος ἀποτελεῖται ἀπὸ μονάδας, ὅλοι δὲ οἱ ἄλλοι ὅροι εἶναι μηδέν, ὥστε ἰσοῦται μὲ τὴν μονάδα. Ἄλλωστε φαίνεται καὶ κατ' εὐθεῖαν ὅτι συντελεστὴς τοῦ x^n εἶναι ἡ μονάς· ὥστε ἔχομεν

$$G(x) = x^n + x^{n-1} \sum_{\nu=1}^{\binom{n}{1}} A_\nu^{(1)} + x^{n-2} \sum_{\nu=1}^{\binom{n}{2}} A_\nu^{(2)} + \ldots\ldots + x \sum_{\nu=1}^{\binom{n}{n-1}} A_\nu^{(n-1)} + A$$

ὅπου $A_\nu^{(\lambda)}$ παριστοῦν τὰς κυρίας ἐλάσσονας ὁριζούσας τῆς A τάξεως (n-λ).

Τὸ ἄθροισμα ὅλων τῶν ὁριζουσῶν τούτων εἶναι εἰς πλῆθος

$$\binom{n}{o} + \binom{n}{1} + \ldots\ldots + \binom{n}{n} = 2^n .$$

Ἡ μέθοδος αὕτη τῆς ἀναπτύξεως τῆς ὁριζούσης ἰσχύει καὶ ὅταν θέλομεν νὰ ἀναπτύξωμεν τὴν ὁρίζουσαν (α), καθ' ὅσον τὰ στοιχεῖα της εἶναι τὸ πολὺ πρώτου βαθμοῦ ὡς πρὸς x.

Τὸ πολυώνυμον τοῦ πρώτου μέλους θὰ εἶναι βαθμοῦ p· συντελεστὴς τοῦ $(c_o - \alpha)^p$ θὰ εἶναι ὁ $(p+1)\,c_{p+1}$.

Τότε τὸ πολυώνυμον τοῦτο βαθμοῦ p θὰ τίθεται ὑπὸ τὴν μορφὴν

$$x^p (p+1)\, c_{p+1} + x^{p-1} \sum_{\nu=1}^{\binom{p}{1}} A_\nu^{(1)} + \ldots\ldots + x \sum_{\nu=1}^{\binom{p}{p-1}} A_\nu^{(p-1)} + A = 0$$

ὅπου A εἶναι ἡ τιμὴ τοῦ πολυωνύμου διὰ $x = 0$.

Ἂν ἑπομένως καλέσωμεν B τὸν μεγαλείτερον, κατ' ἀπόλυτον τιμήν, ἐκ τῶν ἀριθμῶν $(p+1)\,c_{p+1}$, $A_\nu^{(\lambda)}$ τότε ἓν ἀνώτερον ὅριον τῶν ριζῶν τῆς ἐξισώσεως (α) θὰ εἶναι ὁ μεγαλείτερος τῶν δύο ἀριθμῶν $2^p\,B$, 1. [1]

Τὴν ὁρίζουσαν (α) δυνάμεθα καὶ κατ' ἄλλον τρόπον νὰ ἀναπτύξωμεν καὶ νὰ εὕρωμεν ἁπλούστερον ἀνώτερον ὅριον τῆς ἐξαιρετικῆς τιμῆς.

Πρὸς τοῦτο θὰ θεωρήσομεν ἕκαστον ὅρον ἑκάστης στήλης τῆς ὁριζούσης (α) ὡς ἄθροισμα δύο προσθετέων. Ὁ εἷς θὰ περιέχῃ πάντοτε τὸν $(c_o - \alpha)$, ὁ ἄλλος τὸν ὅρον τὸν ἀνεξάρτητον τοῦ $c_o - \alpha$. Θὰ ἔχομεν τότε ὅτι ἑκάστη ἐκ τῶν p πρώτων στηλῶν χωρίζεται εἰς δύο στήλας (μίαν ἔχουσαν κοινὸν παράγοντα τὸν $(c_o - \alpha)$ καὶ μίαν μὴ ἔχουσαν τοῦτον), ὅτε ἡ ὁρίζουσα (α) θὰ χωρίζεται εἰς 2^p ἄλλας ὁριζούσας, εἰς ἑκάστην τῶν ὁποίων θὰ ὑπάρχῃ κοινὸς παράγων ὁ $(c_o - \alpha)$ ἢ δυνάμις αὐτοῦ.

Οὕτω θὰ ἔχομεν μίαν μόνην ὁρίζουσαν, εἰς ἑκάστην τῶν p πρώτων

---

1) O. Perron: Algebra, B. II, s. 22.

στηλῶν τῆς ὁποίας θὰ ὑπάρχῃ κοινὸς παράγων ὁ $(c_0 - \alpha)$ καὶ μίαν μόνην ὁρίζουσαν ἀνεξάρτητον τοῦ $(c_0 - \alpha)$. Συντελεστὴς τοῦ $(c_0 - \alpha)^p$ θὰ εἶναι ὁ

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & c_1 \\ 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 2c_2 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 & 3c_3 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & pc_p \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & (p+1)\,c_{p+1} \end{vmatrix},$$

δηλ. ὁ $(p+1)\,c_{p+1}$.

Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸν συντελεστὴν τοῦ $(c_0 - \alpha)^{p-1}$ θὰ λάβομεν τὰς $\binom{p}{1} = p$, τὸ πλῆθος, ὁριζούσας, αἳ ὁποῖαι προκύπτουν, ἐὰν ἐκ τῶν p πρώτων στηλῶν λαμβάνωμεν μίαν μὴ ἔχουσαν κοινὸν παράγοντα τὸν $(c_0 - \alpha)$. Δηλ. συντελεστὴς θὰ εἶναι ὁ

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & c_1 \\ c_1 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 2c_2 \\ c_2 & 0 & 1 & \ldots & 0 & 3c_3 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ c_{p-1} & 0 & 0 & \ldots & 1 & pc_p \\ c_p & 0 & 0 & \ldots & 0 & (p+1)c_{p+1} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & c_1 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 2c_2 \\ 0 & c_1 & 1 & \ldots & 0 & 3c_3 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ 0 & c_{p-2} & 0 & \ldots & 1 & pc_p \\ 0 & c_{p-1} & 0 & \ldots & 0 & (p+1)c_{p+1} \end{vmatrix}$$

$$+ \cdots + \begin{vmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 & c_1 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 & 2c_2 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 3c_3 \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & pc_p \\ 0 & 0 & \ldots & c_1 & (p+1)c_{p+1} \end{vmatrix}$$

Ἐὰν τὰς ἀναπτύξωμεν, ὅλαι θὰ ἔχουν σημεῖον πλὴν καὶ θὰ εἶνε ἀντιστοίχως $c_1 c_p$, $2c_2 c_{p-1}, \cdots pc_p c_1$. Καθ' ὅμοιον τρόπον θὰ εὕρομεν ὡς συντελεστὴν τοῦ $(c_0 - \alpha)^{p-2}$ τὸ ἄθροισμα ὅλων τῶν μετ' ἐπαναλήψεως συνδυασμῶν τῶν $p-1$ πραγμάτων $c_1, c_2, \ldots, c_{p-1}$ ἀνὰ δύο, πολλαπλασιασθέντων ἴσως ἐπὶ κατάλληλον ἀριθμητικὸν συντελεστήν, τῶν ὁποίων τὸ πλῆθος εἶναι $\binom{p-1+2-1}{2} = \binom{p}{2}$. Ὁμοίως συντελεστὴς τοῦ $(c_0 - \alpha)^{p-3}$ θὰ εἶναι τὸ ἄθροισμα, λαμβανόμενον μὲ ἀρνητικὸν σημεῖον, τῶν συνδυασμῶν μετ᾽ ἐπαναλήψεως τῶν p-2 πραγμάτων $c_1, c_2, \dots, c_{p-2}$ πολλαπλασιασθέντων ἴσως ἐπὶ κατάλληλον ἀριθμητικὸν συντελεστήν, ἀνὰ τρία, τῶν ὁποίων τὸ πλῆθος εἶναι $\binom{p-2+3-1}{3} = \binom{p}{3}$ κ. ο. κ. Ὥστε ἡ ὁρίζουσα (α) ἀναπτύσσεται ὡς ἑξῆς:

$$(p+1)\, c_{p+1}\, (c_0-\alpha)^{p+1} - (c_p c_1 + 2c_2 c_{p-1} + \dots + pc_p c_1)(c_0-\alpha)^{p-1} +$$

$$\Big[c_1 (c_1 c_{p-1} + c_2 c_{p-2} + \dots + c_{p-1} c_1) + 2c_2 (c_1 c_{p-2} + c_2 c_{p-3} +$$

$$\dots + c_{p-2} c_1) + \dots + (p-1)\, c_{p-1}\, c_1{}^2\Big](c_0-\alpha)^{p-2} - \dots + (-1)^{p}.\ c_1^{p+1} = 0\,,$$

ἢ συντομώτερον

$$(p+1)\, c_{p+1}\, (c_0-\alpha)^{p+1} - S_1^{\,p} (c_0-\alpha)^{p-1} + S_2^{\,p-1} (c_0-\alpha)^{p-2} - \dots + (-1)^{p}\, S_p^{\,1} = 0$$

Ἂς καλέσωμεν Γ τὸν μεγαλείτερον τῶν συντελεστῶν $c_1, c_2, \dots, c_p, c_{p+1}$. Τὰ γινόμενα τούτων εἰς τοὺς συντελεστὰς τοῦ ἀναπτύγματος ἔχουν τὸ πολὺ ἀριθμητικὸν συντελεστὴν p+1 καὶ ἕκαστον γινόμενον περιέχει τὸ πολὺ p+1 παράγοντας. Ὥστε, κατ᾽ ἀπόλυτον τιμήν, ἕκαστος ὅρος τῶν συντελεστῶν εἶναι μικρότερος τοῦ $(p+1)\, \Gamma^{p+1}$ καὶ ἐπειδὴ τὸ πλῆθος εἶναι 2^p ἀσφαλῶς ἓν ἀνώτερον ὅριον τοῦ c_0-α, ὅπου, α ἡ ἐξαιρετικὴ τιμή, θὰ εἶναι ὁ μεγαλείτερος τῶν ἀριθμῶν 1 καὶ $(p+1)\, 2^p\, \Gamma^{p+1} = \frac{p+1}{2} (2\Gamma)^{p+1}$.

Ὥστε προκύπτει ἡ ἑξῆς πρότασις:

Πᾶσα ἐξαιρετικὴ τιμὴ τῆς ἀκεραίας συναρτήσεως f (z) — *πλὴν τοῦ* ∞, *ἐὰν εἶναι ἐξαιρετικὴ τιμὴ — εὑρίσκεται ἐντὸς κύκλου τοῦ ὁποίου ἡ ἀκτὶς εἶναι ὁ μεγαλείτερος τῶν ἀριθμῶν* $1 + |c_0|$ *καὶ* $\frac{p+1}{2} (2\Gamma)^{p+1} + |c_0|$, *ὅπου Γ ὁ μεγαλείτερος τῶν* p *συντελεστῶν ἀπὸ τοῦ δευτέρου καὶ ἑξῆς, καὶ* $c_0 \equiv f(0)$.

Εἰς τὰ προηγούμενα ὑπεθέσαμεν ὅτι ἡ συνάρτησις f (z) δὲν λαμβάνει οὐδαμοῦ τὴν τιμὴν α. Εἶναι ὅμως γνωστόν, ὅτι δύναται ἡ τιμὴ νὰ εἶναι ἐξαιρετική, ὑπὸ τὴν ἔννοιαν ὅτι ἡ συνάρτησις f (z) τὴν λαμβάνει πεπερασμένον πλῆθος φορῶν.

Ὡς παράδειγμα ἀναφέρομεν τὰ πολυώνυμα, διὰ τὰ ὁποῖα πᾶσα τιμὴ εἶναι ἐξαιρετική, ἀφοῦ τὴν λαμβάνουν πεπερασμένον πλῆθος φορῶν (τόσας ὅσας εἶναι ὁ βαθμὸς τοῦ πολυωνύμου).

Ἂς ὑποθέσωμεν λοιπὸν ὅτι ἡ συνάρτησις f (z) δέχεται τὴν ἐξαιρετικὴν τιμὴν α, τὴν τιμὴν τῆς ὁποίας λαμβάνει εἰς τὰ k (k πάντοτε πεπερασμένος) σημεῖα $z_1, z_2, \dots, z_k$. Ἔστω A (z) τὸ πολυώνυμον τὸ δεχόμενον ὡς ῥίζας τὰς τιμὰς ταύτας. Τότε ἡ συνάρτησις f (z) θὰ γράφεται

$$f(z) - \alpha = A(z).\ e^{R(z)}$$

$$f(z) = c_0 + c_1 z + \dots + c_n z^n + \dots, \quad A(z) = \beta_0 + \beta_1 z + \dots + \beta_k z^k.$$

Ἐὰν λάβωμεν τὴν λογαριθμικὴν παράγωγον θὰ ἔχωμεν

$$\frac{f'(z)}{f(z) - \alpha} = \frac{A'(z)}{A(z)} + R'(z),$$

$$R'(z) = \lambda_0 + \lambda_1 z + \dots + \lambda_{p-1} z^{p-1}.$$

Ὥστε θὰ ἔχομεν

$$(c_1 + 2c_2 z + \dots + nc_n z^{n-1} + \dots) \times (\beta_0 + \beta_1 z + \dots + \beta_k z^k) =$$

$$(\beta_1 + 2\beta_2 z + \dots + k\beta_k z^{k-1}) \times \left[(c_0 - \alpha) + c_1 z + \dots + c_n z^n + \dots\right] +$$

$$+ (\lambda_0 + \lambda_1 z + \dots + \lambda_{p-1} z^{p-1}) \times (\beta_0 + \beta_1 z + \dots + \beta_k z^k) \times$$

$$\times \left[(c_0 - \alpha) + c_1 z + \dots + c_n z^n + \dots\right].$$

Μετὰ τὴν ἐκτέλεσιν τῶν σημειουμένων πράξεων θὰ λάβομεν, ἐξισοῦντες τὰς ἴσας δυνάμεις τοῦ z^τ:

$$\lambda_0 (\beta_0 c_\tau + \beta_1 c_{\tau-1} + \dots + \beta_\tau (c_0 - \alpha)) + \lambda_1 (\beta_0 c_{\tau-1} + \dots + \beta_{\tau-1} (c_0 - \alpha)) + \dots +$$

$$+ \lambda_\tau \beta_0 (c_0 - \alpha) = (c_1 \beta_\tau - \beta_1 c_\tau) + 2 (c_2 \beta_{\tau-1} - \beta_2 c_{\tau-1}) + \dots +$$

$$+ (\tau+1) (c_{\tau+1} \beta_0 - \beta_{\tau+1} (c_0 - \alpha)).$$

Ἐπομένως ἐὰν μεταξὺ τῶν $p+1$ πρώτων ἐκ τούτων ἀπαλείψωμεν τοὺς p συντελεστὰς $\lambda_0, \lambda_1, \dots \lambda_{p-1}$ θὰ προκύψῃ ἡ ὁρίζουσα :

$$(\alpha')\quad \begin{vmatrix} \beta_0 (c_0 - \alpha) & 0 & \cdots & 0 & c_1 \beta_0 - \beta_1 (c_0 - \alpha) \\ \beta_1 (c_0 - \alpha) + c_1 \beta_0 & \beta_0 (c_0 - \alpha) & \cdots & 0 & 2[\beta_0 c_2 - \beta_2 (c_0 - \alpha)] \\ \beta_2 (c_0 - \alpha) + \beta_1 c_1 + \beta_0 c_2 & \beta_1 (c_0 - \alpha) + c_1 \beta_0 & \cdots & 0 & (c_1 \beta_2 - \beta_1 c_2) + 2 (c_2 \beta_1 - c_1 \beta_2) + 3 (c_3 \beta_0 - \beta_3 (c_0 - \alpha)) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \beta_{p-1} (c_0 - \alpha) + \dots + \beta_0 c_{p-1} & \beta_{p-2} (c_0 - \alpha) + \dots + \beta_0 c_{p-2} & \cdots & \beta_0 (c_0 - \alpha) & (c_1 \beta_{p-1} - \beta_1 c_{p-1}) + \dots + p[c_p \beta_0 - \beta_p (c_0 - \alpha)] \\ \beta_p (c_0 - \alpha) + \dots + \beta_0 c_p & \beta_{p-1} (c_0 - \alpha) + \dots + \beta_0 c_{p-1} & \cdots & \beta_1 (c_0 - \alpha) + c_1 \beta_0 & (c_1 \beta_p - \beta_1 c_p) + \dots + (p+1)[c_{p+1} \beta_0 - \beta_{p+1} (c_0 - \alpha)] \end{vmatrix} = 0$$

Ἡ ὁρίζουσα αὕτη, ἡ ὁποία εὐκόλως καταντᾷ εἰς τὴν (α) ἐὰν θέσωμεν $\beta_0 = 1$, $\beta_1 = \beta_2 = \dots = \beta_k = 0$, εἶναι τάξεως $p+1$ τὸ πολὺ καὶ δύναται νὰ θεωρηθῇ ἐξίσωσις $p+1$ τὸ πολὺ βαθμοῦ ὡς πρὸς α, ἡ ὁποία θὰ ἔχῃ τότε τὴν ἐξαιρετικὴν τιμὴν α ὡς μίαν ρίζαν της.

Ἐὰν $p > k$ τότε πολλοὶ συντελεσταὶ β_i, οἱ ὁποῖοι εἰσέρχονται εἰς τὴν ὁρίζουσαν (α΄) θὰ γίνουν μηδέν, καὶ δὴ ὅλοι ἐκεῖνοι, τῶν ὁποίων οἱ δεῖκται εἶναι μεγαλείτεροι τοῦ k.

Διὰ τὴν ἀνάπτυξιν τῆς ὁριζούσης ταύτης δυνάμεθα νὰ ἐργασθῶμεν ὅπως καὶ προηγουμένως. Δηλ. ἕκαστον ὅρον ἑκάστης στήλης θὰ χωρίσωμεν εἰς δύο προσθετέους εἰς τὸν περιέχοντα τὸ $(c_0-\alpha)$ καὶ εἰς τὸν μὴ περιέχοντα τοῦτο. Τότε χωρίζομεν τὴν ὁρίζουσαν ταύτην εἰς ἁπλὰς ὁριζούσας, ἑκάστη στήλη τῶν ὁποίων, ἢ δὲν θὰ περιέχῃ καθόλου τὸ $(c_0-\alpha)$, ἢ θὰ τὸ περιέχουν ὅλοι οἱ ὅροι. Θὰ εὕρομεν κατ᾽ αὐτὸν τὸν τρόπον 2^{p+1} τοιαύτας ὁριζούσας εἰς ἑκάστην τῶν ὁποίων εἶναι φανερὸν ὅτι, θὰ ὑπάρχῃ κοινὸς παράγων ὁ $(c_0-\alpha)$, ἢ δύναμίς του.

Ἡ ὁρίζουσα (α΄) θὰ γίνῃ τότε:

$$(c_0-\alpha)^{p+1}\begin{vmatrix} b_0 & 0\cdots\cdots 0 & -b_1 \\ b_1 & b_0\cdots\cdots 0 & -2b_2 \\ b_2 & b_1\cdots\cdots 0 & -3b_3 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{p-1} & b_{p-2}\cdots b_0 & -pb_p \\ b_p & b_{p-1}\cdots\cdots b_1 & -(p+1)b_{p+1} \end{vmatrix} + (c_0-\alpha)^p\left\{\begin{vmatrix} 0 & 0\cdots\cdots 0 & -b_1 \\ c_1b_0 & b_0\cdots\cdots 0 & -2b_2 \\ b_1c_1+b_0c_2 & b_1\cdots\cdots 0 & -3b_3 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{p-2}c_1+\cdots+b_0c_{p-1} & b_{p-2}\cdots b_0 & -pb_p \\ b_{p-1}c_1+\cdots+b_0c_p & b_{p-1}\cdots b_1 & -(p+1)b_{p+1} \end{vmatrix} + \cdots\right.$$

$$\left.+\cdots+\begin{vmatrix} b_0 & 0\cdots\cdots c_1b_0 \\ b_1 & b_0\cdots\cdots 2b_0c_2 \\ b_2 & b_1\cdots\cdots(c_1b_2-b_1c_2)+2(c_2b_1-c_1b_2) \\ \cdots & \cdots \\ b_{p-1} & b_{p-2}\cdots(c_1b_{p-1}-b_1c_{p-1})+\cdots+pc_pb_0 \\ b_p & b_{p-1}\cdots(c_1b_p-b_1c_p)+\cdots+(p+1)c_{p+1}b_0 \end{vmatrix}\right\} + \cdots +$$

$$
+\cdots+\begin{vmatrix}
0 & 0 \cdots\cdots 0 & c_1 b_0 \\
c_1 b_0 & 0 \cdots\cdots 0 & 2c_2 b_0 \\
b_1 c_1 + b_0 c_2 & c_1 b_0 \cdots\cdots 0 & (c_1 b_2 - b_1 c_2) + 2(c_2 b_1 - c_1 b_2) \\
\cdots & \cdots & \cdots \\
b_{p-1} c_1 + \cdots + b_0 c_p & b_{p-2} c_1 + \cdots + b_0 c_{p-1} \cdots\cdots c_1 b_0 & (c_1 b_p - b_1 c_p) + \cdots + (p+1) c_{p+1} b_0
\end{vmatrix}
$$

Δυνάμεθα εὐκόλως νὰ εὕρωμεν μονοσημάντως μίαν συνάρτησιν

$$F(z) = \alpha_0 + \alpha_1 z + \ldots + \alpha_n z^n + \ldots .$$

ἡ ὁποία νὰ δέχεται τὴν τιμὴν α ὡς ἐξαιρετικὴν καὶ τὴν ἔννοιαν τοῦ Picard καὶ ἡ ὁποία νὰ τίθεται ὑπὸ τὴν μορφήν:

$$F(z) - \alpha = e^{R(z)} .$$

Ἐὰν ἀκολουθήσωμεν τὴν προηγουμένην μέθοδον θὰ εὕρωμεν:

$$\lambda_0 = \frac{\alpha_1}{\alpha_0 - \alpha}$$

$$\lambda_1 = \frac{2\alpha_2}{\alpha_0 - \alpha}$$

$$\cdots\cdots$$

$$\lambda_{p-1} = \frac{p\alpha_p}{\alpha_0 - \alpha}$$

Ὥστε, ἐκλέγοντες τὸ $\alpha_0 \neq \alpha$, ἔχομεν μίαν μόνην τοιαύτην συνάρτησιν $F(z)$, ἡ ὁποία ἀντιστοιχεῖ πλήρως πρὸς τὴν $f(z)$.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

1 BIEBERBACH, L. Lehrbuch der Funktionentheorie. (Leipzig, B. G. Teubner 1923, 1928).

2 BLUMENTHAL, O. Principes de la théorie des fonctions entières d' ordre infini. (Paris Gauthier Villars, 1921).

3 BOREL, É. Leçons sur les fonctions entières. (Paris, G. V., 1921).

4 BOREL, É. Sur les zèros des fonctions entières. (Acta Math., T 20, 1897, p. 374).

5 CALUGAREANO, G. Sur la determination des valeurs exceptionnelles des fonctions entières et meromorphes des genre fini. (Bull. des Sc. Math., 2_e serie, t. LLV, 1930).

6 GOURSAT, É. Cours d' Analyse Mathématique. (Paris, G. V., 1929).

7 JENSEN, J. Snr nn nouvel et important théorème de la théorie des fonctions. (Acta Math., T 22, p. 359).

8 NEVANLINNA, F. Bemerkungen zur Theorie der ganzen Funktionen endlicher Ordnung. (Soc. Sc. Fennicae Ph. Math. II 4, 1923).

9 NEVANLINNA, R. Über eine Klasse meromorpher Funktionen. (Math. Annalen, Bd. 92, H ¾, 1924).

10 NEVANLINNA, R. Zur Theorie der meromorphen Funktionen. (Acta Math, T. 46, 1925).

11 OSGOOD, W. Lehrbuch der Funktionentheorie. (Leipzig, B. G. Teubner, 1912, 1924).

12 PICARD, É. Mémoire sur les fonctions entières. (Annales de l' École Normale Sup^{re} 2_e serie, t. IX, 1880).

13 PERRON, O. Algebra. (Berlin, Walter de Gruyter & Co 1927).

14 PRINGSHEIM, A. Elementare Theorie der ganzen transcenden-

ten Funktionen von endlicher Ordnung. (Math. Annalen, B. LVIII, s. 257).

15 RÉMOUNDOS, G. Sur les zèros d' une classe de fonctions trancendantes. (Thèse, Paris, 1905).

16 VALIRON, G. Sur les fonctions entières d' ordre fini. (Bulletin des Sc. Math., 2e serie, t. XLV, 1921).