ΠΕΡΙ ΤΙΝΩΝ ΙΔΙΟΤΗΤΩΝ ΤΗΣ ΣΤΡΕΨΕΩΣ ΜΙΑΣ ΚΑΜΠΥΛΗΣ

ΥΠΟ

Ο. ΠΥΛΑΡΙΝΟΥ

ΠΕΡΙ ΤΙΝΩΝ ΙΔΙΟΤΗΤΩΝ ΤΗΣ ΣΤΡΕΨΕΩΣ ΜΙΑΣ ΚΑΜΠΥΛΗΣ

Ἐὰν ἡ στρέψις μιᾶς καμπύλης c, εἰς ἓν ὁμαλὸν σημεῖον αὐτῆς P_o, εἶναι διάφορος τοῦ μηδενός, ἀχθῇ δὲ διὰ τῆς ἐφαπτομένης τῆς καμπύλης εἰς τὸ σημεῖον τοῦτο ἓν ἐπίπεδον ε, ἡ καμπυλότης τῆς καμπύλης εἰς τὸ P_o εἶναι ἴση πρὸς τὸ ὅριον τοῦ λόγου τοῦ διπλασίου τῆς ἀποστάσεως τοῦ P_o ἀπὸ μιᾶς χορδῆς αὐτῆς, κειμένης ἐπὶ ἐπιπέδου παραλλήλου πρὸς τὸ ε, πρὸς τὸ τετράγωνον τοῦ ἡμίσεως τοῦ μήκους τῆς χορδῆς ταύτης, ὅταν τὸ ἐπίπεδον, ἐφ' οὗ κεῖται ἡ χορδή, κινούμενον παραλλήλως πρὸς ἑαυτὸ συμπίπτῃ μὲ τὸ ε.

Ἡ ἰδιότης αὕτη τῆς καμπυλότητος μιᾶς καμπύλης ἐδόθη ὑπὸ τοῦ κ. **Sbrana** [1]) ὁ ὁποῖος, πρὸς ἁπλουστέραν ἀπόδειξιν αὐτῆς, χρησιμοποιεῖ παραμετρικὰς ἐξισώσεις τῆς καμπύλης εἰς τὴν περιοχὴν τοῦ θεωρουμένου σημείου της, συναρτήσει εἰδικῆς παραμέτρου, ὑποδειχθείσας εἰς αὐτὸν ὑπὸ τοῦ κ. Fubini. Αἱ ἐξισώσεις ὅμως αὗται δὲν ἰσχύουν, ὅπως φαίνεται ἀπὸ τοὺς τύπους (6) τῆς ἐργασίας τοῦ κ. Sbrana, ὅταν τὸ ἐπίπεδον ε εἶναι τὸ ἐγγύτατον ἐπίπεδον τῆς καμπύλης εἰς τὸ θεωρούμενον σημεῖον της. Ἄλλωστε, ὡς γνωστόν, ἐπίπεδον παράλληλον πρὸς τὸ ἐγγύτατον ἐπίπεδον τῆς καμπύλης εἰς τὸ σημεῖον αὐτῆς P_o ἔχει πλείονα τῶν δύο κοινὰ σημεῖα μὲ τὴν καμπύλην συμπίπτοντα μὲ τὸ P_o, ὅταν τὸ ἐπίπεδον τοῦτο κινούμενον παραλλήλως πρὸς ἑαυτὸ διέρχηται δι' αὐτοῦ. Τὸ ἀνωτέρω, ἑπομένως, θεώρημα ἰσχύει μόνον ὑπὸ τὴν προϋπόθεσιν ὅτι τὸ ἐπίπεδον ε εἶναι διάφορον τοῦ ἐγγυτάτου ἐπιπέδου τῆς καμπύλης εἰς τὸ θεωρούμενον σημεῖον της.

Αἱ χορδαὶ τῆς καμπύλης εἰς τὴν περιοχὴν τοῦ σημείου P_o αὐτῆς, αἱ παράλληλοι πρὸς τὸ ἐπίπεδον ε, τὸ ὁποῖον ὑποτίθεται διάφορον τοῦ ἐγγυτάτου ἐπιπέδου εἰς τὸ σημεῖον τοῦτο, σχηματίζουν μίαν εὐθειογενῆ ἐπιφάνειαν, τῆς ὁποίας γενέτειρα εἶναι ἡ ἐφαπτομένη τῆς καμπύλης εἰς τὸ P_o, οἱασδήποτε οὔσης τῆς θέσεως τοῦ ἐπιπέδου ε περὶ τὴν ἐφαπτομένην ταύτην. Τῆς εὐθειογενοῦς ταύτης ἐπιφανείας θὰ ζητήσωμεν νὰ ὑπολογίσωμεν κατωτέρω, χρησιμοποιοῦντες τὰς ὑπὸ τοῦ κ. Fubini ὑπο-

---

[1]) F. Sbrana; Sopra alcune questioni relativi alle curve piane e sguembe Rend. R. Acc. Lincei, vol. XXVII. ser. 6ª p. p. 286-291. (1938).

δειχθείσας παραμετρικὰς ἐξισώσεις τῆς καμπύλης, ἀφ' ἑνὸς τὴν *στρεβλότητα* ἐπὶ τῆς διὰ τοῦ σημείου P_0 διερχομένης γενετείρας αὐτῆς καὶ ἀφ' ἑτέρου τὴν *ὁλικὴν καμπυλότητα* εἰς τὸ σημεῖον P_0, προκειμένου νὰ σχετίσωμεν τὰ μεγέθη ταῦτα μὲ τὴν στρέψιν τῆς καμπύλης εἰς τὸ σημεῖον τοῦτο.

1. Ἂν S εἶναι μία εὐθειογενὴς ἐπιφάνεια ὁριζομένη, ὡς πρὸς τὸ σύστημα συντεταγμένων, εἰς τὸ ὁποῖον αὕτη ἀναφέρεται, ὑπὸ τῆς ἐξισώσεως

$$(1,1) \qquad \bar{r} = \bar{r}_1(t) + v\,\bar{a}(t),$$

ἔνθα $\bar{r} = \overline{OP}$ ἡ διανυσματικὴ ἀκτὶς ἡ ὁρίζουσα ἀπὸ τῆς ἀρχῆς O τὸ τυχὸν σημεῖον P (t, v) τῆς ἐπιφανείας, $\bar{a}(t)$ διάνυσμα παράλληλον πρὸς τὴν διὰ τοῦ P_0 διερχομένην γενέτειραν αὐτῆς καὶ $\bar{r}_1(t)$ ἡ διανυσματικὴ ἀκτὶς ἡ ὁρίζουσα τὸ ἐπὶ τῆς γενετείρας ταύτης σημεῖον τῆς ὡς γραμμῆς ἀφετηρίας ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας λαμβανομένης καμπύλης, ἡ στρεβλότης τῆς ἐπιφανείας ταύτης ἐπὶ μιᾶς γενετείρας αὐτῆς $a(t)$ εἶναι, ὡς γνωστόν,

$$(1,2) \qquad \pi = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta q}{\Delta\varphi},$$

ἔνθα Δq ἡ ἐλαχίστη ἀπόστασις τῆς γενετείρας a ἀπὸ μιᾶς γενετείρας γειτονικῆς $a'(t+\Delta t)$ καὶ $\Delta\varphi$ ἡ ὀξεῖα γωνία τῶν δύο τούτων γενετειρῶν.

Ἡ ὁλικὴ δὲ καμπυλότης K εἰς τὸ τυχὸν σημεῖον P(t,v) τῆς ἐπιφανείας S δίδεται, ὡς γνωστόν [1]), ὑπὸ τοῦ τύπου

$$(1,3) \qquad K = -\frac{\left[\dfrac{d\bar{r}_1}{dt}\,\bar{a}_0\,\dfrac{d\bar{a}_0}{dt}\right]^2}{\left\{\left(\dfrac{d\bar{r}_1}{dt} + v\dfrac{d\bar{a}_0}{dt}\right)^2 - \left(\dfrac{d\bar{r}_1}{dt}\times\bar{a}_0\right)^2\right\}^2},$$

ἔνθα

$$(1,4) \qquad \bar{a}_0 = \frac{\bar{a}}{|\bar{a}|}$$

διανυσματικὴ μονὰς ὁρίζουσα τὴν κατεύθυνσιν τοῦ διανύσματος $\bar{a}$, ἑπομένως δὲ καὶ τὴν τῆς διὰ τοῦ P διερχομένης γενετείρας τῆς ἐπιφανείας,

---

[1]) Βλ. π. χ. C. E. Weatherburn; Differential geometry. vol. I. p. 139 (1931).

$\left[\frac{d\bar{r}}{dt}\,\bar{a}_0\,\frac{d\bar{a}_0}{dt}\right]$ τὸ μικτὸν γινόμενον τῶν διανυσμάτων $\frac{d\bar{r}_1}{dt}$, $\bar{a}_0$, $\frac{d\bar{a}_0}{dt}$

καὶ $\frac{d\bar{r}_1}{dt} \times \bar{a}_0$ τὸ ἐσωτερικὸν γινόμενον τῶν διανυσμάτων $\frac{d\bar{r}_1}{dt}$ καὶ $\bar{a}_0$, καὶ ἡ ὁλικὴ καμπυλότης τῆς ἐπιφανείας εἰς ἓν σημεῖον αὐτῆς κείμενον ἐπὶ τῆς καμπύλης ἀφετηρίας, τῆς ὁποίας ἡ ἐξίσωσις ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας εἶναι $v = o$, θὰ εἶναι, ἐκ τοῦ τύπου (1,3),

$$K = -\frac{\left[\frac{d\bar{r}_1}{dt}\,\bar{a}_0\,\frac{d\bar{a}_0}{dt}\right]^2}{\left\{\left(\frac{d\bar{r}_1}{dt}\right)^2-\left(\frac{d\bar{r}_1}{dt}\times\bar{a}_0\right)^2\right\}^2} = -\frac{\left[\frac{d\bar{r}_1}{dt}\,\bar{a}_0\,\frac{d\bar{a}_0}{dt}\right]^2}{\left|\frac{d\bar{r}_1}{dt}\wedge\bar{a}_0\right|^4},$$

ἔνθα $\left|\frac{d\bar{r}_1}{dt}\wedge\bar{a}_0\right|$ τὸ μέτρον τοῦ ἐξωτερικοῦ γινομένου $\frac{d\bar{r}_1}{dt}\wedge\bar{a}_0$ τῶν διανυσμάτων $\frac{d\bar{r}_1}{dt}$ καὶ $\bar{a}_0$, λαμβανομένου ὑπ' ὄψει ὅτι εἶναι $\bar{a}_0^2 = 1$ καὶ $\left(\frac{d\bar{r}_1}{dt}\right)^2\bar{a}_0^2 - \left(\frac{d\bar{r}_1}{dt}\times\bar{a}_0\right)^2 = \left|\frac{d\bar{r}_1}{dt}\wedge\bar{a}_0\right|^2$,

ἢ τελικῶς

$$K_1 = -\frac{\left[\frac{d\bar{r}_1}{dt}\,\bar{a}\,\frac{d\bar{a}}{dt}\right]^2}{\left|\frac{d\bar{r}_1}{dt}\wedge\bar{a}\right|^4}, \tag{1,5}$$

δεδομένου ὅτι, λόγῳ τῆς (1,4), εἶναι

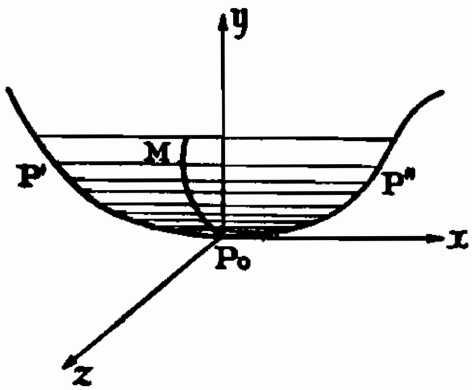
$$\frac{d\bar{a}_0}{dt} = \frac{d\bar{a}}{dt}\,\frac{1}{|\bar{a}|} + \bar{a}\,\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{|\bar{a}|}\right)$$

καὶ ἑπομένως

$$\left[\frac{d\bar{r}_1}{dt}\,\bar{a}_0\,\frac{d\bar{a}_0}{dt}\right] = \left[\frac{d\bar{r}_1}{dt}\,\bar{a}\,\frac{d\bar{a}}{dt}\right]\cdot\frac{1}{|\bar{a}|^2}.$$

2. Ἔστωσαν ἤδη c μία καμπύλη, P_0 ἓν ὁμαλὸν σημεῖον αὐτῆς, εἰς τὴν περιοχὴν τοῦ ὁποίου ἡ καμπύλη ὑποτίθεται ἀναλυτική, $\varkappa_0$ καὶ σ_0 ἀντιστοίχως ἡ καμπυλότης καὶ ἡ στρέψις αὐτῆς εἰς τὸ σημεῖον P_0, ἀμφότεραι διάφοροι τοῦ μηδενός, καὶ ε ἓν ἐπίπεδον διερχόμενον διὰ τῆς ἐφαπτομένης τῆς καμπύλης εἰς τὸ P_0, διάφορον τοῦ ἐγγυτάτου ἐπιπέδου αὐ-

τῆς εἰς τὸ σημεῖον τοῦτο. Ἂν ληφθῇ τὸ P_0 ὡς ἀρχὴ τοῦ συστήματος συντεταγμένων $P_0\,x\,y\,z$, μὲ ἄξονα, $P_0\,x$ τὴν ἐφαπτομένην τῆς καμπύλης εἰς τὸ σημεῖον τοῦτο καὶ ἐπίπεδον $P_0\,z\,x$ τὸ ἐπίπεδον ε (Σχ. Α), αἱ ἐξισώσεις τῆς καμπύλης εἰς τὴν περιοχὴν τοῦ P_0 δύνανται διὰ καταλλήλου ἐκλογῆς τῆς παραμέτρου t νὰ τεθοῦν ὑπὸ τὴν μορφὴν [3])



Σχ. Α.

$$(2,1)\qquad \begin{cases} x = t + \alpha_2 t^2 + \alpha_3 t^3 + \cdots \\ y = \lambda\, t^2 \\ z = \beta_2 t^2 + \beta_3 t^3 + \cdots \end{cases}$$

τῶν εἰς τὰ δεξιὰ μέλη τῶν ἐξισώσεων τούτων ἐμφανιζομένων σειρῶν ὑποτιθεμένων συγκλινουσῶν εἰς τὴν περιοχὴν τῆς τιμῆς, τῆς παραμέτρου $t = o$, τῆς ἀντιστοιχούσης εἰς τὸ σημεῖον P_0 τῆς καμπύλης c, ἡ ὁποία ἐξ ὑποθέσεως εἶναι ἀναλυτικὴ εἰς τὴν περιοχὴν τοῦ σημείου τούτου. Τῆς καμπύλης ταύτης ἡ καμπυλότης καὶ ἡ στρέψις εἰς τὸ P_0 εἶναι ἀντιστοίχως

$$(2,2)\qquad \varkappa_0 = 2\sqrt{\lambda^2 + \beta_2^2}\,, \qquad \sigma_0 = \frac{3\lambda\beta_3}{\lambda^2 + \beta_2^2}$$

ὑπολογιζόμεναι ἐπὶ τῇ βάσει τῶν γνωστῶν διὰ τὴν καμπυλότητα καὶ τὴν στρέψιν μιᾶς καμπύλης τύπων, τῶν εἰς αὐτοὺς ἐμφανιζομένων παραγώγων τῶν x, y, z ὡς πρὸς t διὰ $t = o$, λαμβανομένων διὰ παραγωγίσεως τῶν δεξιῶν μελῶν τῶν (2,1)· ἐὰν δὲ θ εἶναι ἡ γωνία, τὴν ὁποίαν σχηματίζει ἡ κατεύθυνσις $\overline{y}_0$ τῆς καθέτου ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον $P_0\,zx$ μὲ τὴν κατεύθυνσιν $\overline{n}_0$ τῆς πρώτης καθέτου τῆς καμπύλης c εἰς τὸ P_0, θὰ εἶναι [4])

$$(2.3)\qquad \text{συνθ}, = \frac{2\lambda}{\varkappa_0} \qquad \text{ημθ} = \frac{2\beta_2}{\varkappa_0}.$$

---

[3]) F. Sbrana; loc. cit. p. 287.
[4]) F. Sbrana; loc. cit. p. 287.

3. Αἱ τιμαὶ τῆς παραμέτρου t, αἱ ἀντιστοιχοῦσαι εἰς τὰ σημεῖα τομῆς τῆς καμπύλης c ὑπὸ ἑνὸς ἐπιπέδου παραλλήλου πρὸς τὸ ἐπίπεδον $P_o zx$ εἶναι ἀντίθετοι, ὡς ῥίζαι τῆς ἐξισώσεως ὡς πρὸς t, τῆς προκυπτούσης ἐκ τῆς δευτέρας τῶν (2,1) ἐὰν εἰς αὐτήν, ὅπου y, τεθῇ ἡ τεταγμένη ἐπὶ τὴν ἀρχὴν τοῦ ἐπιπέδου τούτου· ἀντιστρόφως εἰς δύο τιμὰς τῆς t ἀντιθέτους ἀντιστοιχοῦν σημεῖα τῆς c κείμενα ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ παραλλήλου πρὸς τὸ $P_o zx$ ἐπιπέδου. Ἐὰν ὅθεν $P'(z', y', z')$, $P''(z'' y'', z'')$ εἶναι δύο σημεῖα τῆς c ἀντιστοιχοῦντα εἰς τὰς τιμὰς -t καὶ t τῆς παραμέτρου (Σχ. Α), αἱ συντεταγμέναι αὐτῶν θὰ εἶναι ἐκ τῶν (2,1) ἀντιστοίχως

$$(3,1)\quad \begin{cases} x' = -[t + \alpha_1 t^3 + \cdots] + [\alpha_2 t^2 + \alpha_4 t^4 + \cdots] \\ y' = \lambda t^2 \\ z = -[\beta_3 t^3 + \beta_5 t^5 + \cdots] + [\beta_2 t^2 + \beta_4 t^4 + \cdots] \end{cases}$$

$$(3,2)\quad \begin{cases} x'' = [t + a_3 t^3 + \cdots] + [a_2 t^2 + a_4 t^4 \cdots] \\ y'' = \lambda t^2 \\ z'' = [\beta_3 t^3 + \beta_5 t^5 + \cdots] + [\beta_2 t^2 + \beta_4 t^4 + \cdots] \end{cases}$$

Ἐκ τῶν (3,1) καὶ (3,2) προκύπτει ὅτι ἡ χορδὴ $P'P''$ τῆς καμπύλης θὰ ἔχῃ τὴν διεύθυνσιν τοῦ διανύσματος $\bar{a} = \frac{\overline{P'P''}}{2}$, μὲ συντεταγμένας

$$(3,3)\quad \begin{cases} a_1 = \dfrac{x'' - x'}{2} = t + a_3 t^3 + \cdots\cdots \\ a_2 = \dfrac{y'' - y'}{2} = 0 \\ a_3 = \dfrac{z'' - z'}{2} = \beta_3 t^3 + \beta_5 t^5 + \cdots\cdots \end{cases}$$

ἡ δὲ καμπύλη c_1, τὴν ὁποίαν σχηματίζουν τὰ μέσα τῶν χορδῶν τῆς καμπύλης c, τῶν παραλλήλων πρὸς τὸ ἐπίπεδον $P_o zx$ θὰ ὁρίζηται ἀπὸ τὰς ἐξισώσεις

$$(3,4)\quad \begin{cases} x_1 = \dfrac{x' + x''}{2} = \alpha_2 t^2 + \alpha_4 t_4 + \cdots\cdots \\ y_1 = \dfrac{y' + y''}{2} = \lambda t^2 \\ z_1 = \dfrac{z' + z''}{2} = \beta_2 t^2 + \beta_4 t^4 + \cdots \end{cases}$$

Ἐὰν ἤδη a (t) εἶναι μία γενέτειρα τῆς ὑπὸ τῶν ἐν λόγῳ χορδῶν σχηματιζομένης εὐθειογενοῦς ἐπιφανείας, διερχομένη διὰ τοῦ σημείου

$P_1(x_1, y_1, z_1, t)$ τῆς καμπύλης c_1 καὶ παράλληλος πρὸς τὸ διάνυσμα $\bar{a}\,(a_1, a_2, a_3)$, ἔνθα εἶναι $a_2 = o$ ἐκ τῆς δευτέρας τῶν (3,3), ἡ ἐλαχίστη ἀπόστασις τῆς γενετείρας ταύτης ἀπὸ τῆς ἐφαπτομένης τῆς καμπύλης c εἰς τὸ P_o, τῆς γενετείρας δηλ. τῆς ἐπιφανείας τῆς διερχομένης διὰ τοῦ P_o, εἶναι κατὰ γνωστὸν τύπον,

$$\Delta q = \left\| \frac{\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ 1 & 0 & 0 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix}}{a_3} \right\|,$$

ἐφ' ὅσον ἡ διὰ τοῦ P_o διερχομένη γενέτειρα ἐλήφθη ὡς ἄξων $P_o x$ τοῦ συστήματος ἀναφορᾶς, ἢ τελικῶς λόγῳ τῶν (3,3) καὶ (3,4)

$$\Delta q = |\lambda|\, t^3 \cdot \tag{3,5}$$

ἐὰν δὲ $\Delta\varphi$ εἶναι ἡ γωνία τοῦ διανύσματος $\bar{a}$, τοῦ ὁρίζοντος τὴν κατεύθυνσιν τῆς γενετείρας α, μὲ τὴν κατεύθυνσιν τοῦ ἄξονος $P_o\, x$, θὰ εἶναι κατὰ γνωστὸν ἐπίσης τύπον,

$$\eta\mu\, \Delta\varphi = \frac{|\bar{x}_o \wedge \bar{a}|}{|\bar{a}|} = \frac{|\alpha_3|}{\sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_3^2}},$$

ἢ τελικῶς, λαμβανομένων ὑπ' ὄψει τῶν τιμῶν τῶν a_1, a_3 ἐκ τῶν (3,3),

$$\eta\mu\, \Delta\varphi = \frac{\beta_3 t^3 + \beta_5 t^4 + \cdots}{\sqrt{(1 + \alpha_3 t^2 + \ldots)^2 + (\beta_3 t^2 + \beta_5 t^4 + \cdots)^2}} \tag{3,6}$$

Ἡ στρεβλότης, ἑπομένως, τῆς ἐν λόγῳ ἐπιφανείας ἐπὶ τῆς διὰ τοῦ P_o διερχομένης γενετείρας αὐτῆς θὰ εἶναι

$$\pi_o = \lim_{t \to o} \frac{\Delta q}{\Delta\varphi} = \frac{\lambda}{\beta_3} \tag{3,7}$$

προκύπτουσα ἐκ τοῦ τύπου (1,2), ἐὰν εἰς αὐτὸν τεθοῦν αἱ τιμαὶ τῶν Δq καὶ $\Delta\varphi$ ἐκ τῶν (3,5) καὶ (3,6), ἢ τελικῶς δι' ἀπολοιφῆς τῶν λ, β_2 β_3 καὶ $\varkappa_o$ μεταξὺ τῶν (2,2), (2,3) καὶ (3,7)

$$\pi_o = \frac{3\ \sigma\upsilon\nu^2\theta}{\sigma_o}. \tag{3,8}$$

Οὕτω ἡ στρεβλότης τῆς ἐπιφανείας, τὴν ὁποίαν σχηματίζουν αἱ χορδαὶ τῆς καμπύλης c, αἱ παράλληλοι πρὸς τὸ διὰ τῆς ἐφαπτομένης αὐτῆς εἰς τὸ I_o ἀχθὲν ἐπίπεδον ε, ἐπὶ τῆς διὰ τοῦ P_o διερχομένης γενετείρας αὐτῆς, ἐκφράζεται συναρτήσει τῆς στρέψεως τῆς καμπύλης c εἰς τὸ P_o καὶ τῆς γωνίας, τὴν ὁποίαν σχηματίζει ἡ κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον ε μετὰ τῆς πρώτης καθέτου τῆς καμπύλης εἰς τὸ σημεῖον τοῦτο.

Ἡ ὁλικὴ καμπυλότης K_1 τῆς εὐθειογενοῦς ταύτης ἐπιφανείας εἰς ἓν σημεῖον $P_1(x_1, y_1, z_1, t)$, διάφορον τοῦ P_o, τῆς ὡς γραμμῆς ἀφετηρίας ἐπ' αὐτῆς λαμβανομένης καμπύλης c_1, δίδεται ὑπὸ τοῦ τύπου (1,6), εἰς τὸν ὁποῖον ἐν προκειμένῳ εἶναι

$$(3,9) \quad \left[\frac{d\bar{r}}{dt}\ \bar{a}\ \frac{d\bar{a}}{dt}\right] = \begin{vmatrix} \frac{dx_1}{dt} & \frac{dy_1}{dt} & \frac{dz_1}{dt} \\ a_1 & o & a_3 \\ \frac{da_1}{dt} & o & \frac{da_3}{dt} \end{vmatrix} = 2\lambda t^4\ [-2\beta_3 + (\cdots)\,t^2 + \cdots]$$

καὶ

$$(3,10) \quad \left|\frac{d\bar{r}_1}{dt} \wedge \bar{a}\right|^2 = t^4\,[4\ (\lambda^2 + \beta_3^2) + (\cdots\cdot)\,t^2 + \cdots\cdot],$$

ἐὰν εἰς τὰ ἀριστερὰ μέλη τῶν (3,9) καὶ (3,10) τεθοῦν αἱ τιμαὶ τῶν a_1, a_2, a_3, x_1, y_1, z_1 καὶ τῶν πρώτων παραγώγων αὐτῶν ἐκ τῶν (3,3) καὶ (3,4). Εἶναι, ἑπομένως, ἐκ τοῦ τύπου (1,6)

$$K_1 = -\frac{4\lambda^2\,[-2\beta_3 + (\cdots\cdot)\,t^2 + \cdots\cdot]^2}{[4\ (\lambda^2 + \beta_3^2) + (\cdots\cdot)\,t^2 + \cdots]^2}$$

καὶ

$$\lim_{t \to o} K_1 = -\frac{\lambda^2\,\beta_3^2}{(\lambda^2 + \beta_3^2)^2}$$

ἢ τελικῶς, λόγῳ τῆς δευτέρας τῶν (2,2),

$$(3,11) \quad \lim_{t \to o} K_1 \equiv K_1^o = -\left(\frac{\sigma^o}{3}\right)^2$$

ἔνθα K_1^o θὰ εἶναι ἡ ὁλικὴ καμπυλότης τῆς ἐν λόγῳ ἐπιφανείας εἰς τὸ σημεῖον P_o αὐτῆς.

Ἐκ τοῦ τύπου (3,11) προκύπτει τὸ ἑξῆς θεώρημα:

Ἐὰν ἡ στρέψις μιᾶς καμπύλης εἰς ἓν σημεῖον αὐτῆς εἶναι διάφορος τοῦ μηδενός, ἀχθῇ δὲ διὰ τῆς ἐφαπτομένης τῆς καμπύλης εἰς τὸ σημεῖον τοῦτο ἐπίπεδον διάφορον τοῦ ἐγγυτάτου ἐπιπέδου αὐτῆς, ἡ ὁλικὴ καμπυλότης εἰς τὸ σημεῖον τοῦτο τῆς ἐπιφανείας, τὴν ὁποίαν σχηματίζουν αἱ χορδαὶ τῆς καμπύλης αἱ παράλληλοι πρὸς τὸ ἀχθὲν ἐπίπεδον εἶναι ἀντίθετος πρὸς τὸ τετράγωνον τοῦ τρίτου τῆς στρέψεως τῆς καμπύλης εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον.

Ἡ ὁλικὴ καμπυλότης, ἑπομένως, τῆς ἐπιφανείας ταύτης εἰς τὸ ἐν λόγῳ σημεῖον τῆς θεωρηθείσης καμπύλης εἶναι *ἀνεξάρτητος* τῆς περὶ τὴν ἐφαπτομένην τῆς καμπύλης εἰς τὸ σημεῖον τοῦτο θέσεως τοῦ ἐπιπέδου, πρὸς τὸ ὁποῖον εἶναι παράλληλοι αἱ γενέτειραι τῆς ἐπιφανείας.

Θεσσαλονίκη, Ὀκτώβριος 1940.