ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟΝ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟΝ ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ
ΕΠΙΣΤΗΜΟΝΙΚΗ ΕΠΕΤΗΡΙΣ ΦΥΣΙΚΟΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΣΧΟΛΗΣ
ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ ΑΡ. 2

ΠΕΡΙ ΙΔΙΟΤΗΤΩΝ ΤΙΝΩΝ ΤΟΥ ΨΕΥΔΟΕΥΚΛΕΙΔΕΙΟΥ ΔΙΑΣΤΗΜΑΤΟΣ ΤΗΣ ΕΙΔΙΚΗΣ ΘΕΩΡΙΑΣ ΤΗΣ ΣΧΕΤΙΚΟΤΗΤΟΣ

ΥΠΟ
ΙΩΑΝΝΟΥ ΓΡΑΤΣΙΑΤΟΥ

ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗ
1959

ΠΕΡΙ ΙΔΙΟΤΗΤΩΝ ΤΙΝΩΝ ΤΟΥ ΨΕΥΔΟΕΥΚΛΕΙΔΙΟΥ ΔΙΑΣΤΗΜΑΤΟΣ ΤΗΣ ΕΙΔΙΚΗΣ ΘΕΩΡΙΑΣ ΤΗΣ ΣΧΕΤΙΚΟΤΗΤΟΣ

Ὑπὸ Ἰωάννου Γρατσιάτου

Τὸ τετραδιάστατον διάστημα τῆς Εἰδικῆς Θεωρίας τῆς Σχετικότητος εἶναι ψευδοευκλείδειον, δηλ. εἶναι τετραδιάστατον συνεχὲς ἐκ σημείων - γεγονότων ἢ ἁπλῶς σημείων ἐντὸς τοῦ ὁποίου δύνανται νὰ ληφθοῦν συντεταγμέναι x^1, x^2, x^3, x^4 τοιαῦται ὥστε ἡ θεμελιώδης μετρικὴ μορφὴ νὰ εἶναι

$$ds^2 = (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2 - (dx^4)^2$$

$$\text{ἢ} \quad ds^2 = g_{ik}\, dx^i\, dx^k \tag{1}$$

καὶ ἡ τετραδιάστατος ἀπόστασις μεταξὺ 2 σημείων x^k, y^k

$$\begin{aligned} s^2 &= (x^1 - y^1)^2 + (x^2 - y^2)^2 + (x^3 - y^3)^2 - (x^4 - y^4)^2 \\ &= g_{ik}\,(x^i - y^i)\,(x^k - y^k) \end{aligned} \tag{2}$$

Ἐνταῦθα x^ϱ $(\varrho = 1 \ldots 3)$ εἶναι ὀρθογώνιοι συντεταγμέναι τοῦ χώρου, $x^4 = ct$ ἡ χρονικὴ συντεταγμένη (t = χρόνος, c = ταχύτης τοῦ φωτὸς ἐν τῷ κενῷ), g_{ik} εἶναι αἱ συνιστῶσαι τοῦ μετρικοῦ τανυστοῦ

$$g_{ik} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Οἱ λατινικοὶ δεῖκται $i, k \ldots$ λαμβάνουν τιμὰς ἀπὸ 1 ἕως 4, οἱ δὲ ἑλληνικοὶ $\varrho, \sigma \ldots$ ἀπὸ $1 \ldots 3$, χρησιμοποιοῦμεν δὲ τὸν συμβολισμὸν τοῦ Einstein

$$x^\varrho x^\varrho = (x^1)^2 + \ldots + (x^3)^2$$

$$g_{ik}\, x^i x^k = \sum_{i,\, k=1}^{4} g_{ik}\, x^i x^k$$

Μὲ τὴν ὡς ἄνω μορφὴν τοῦ μετρικοῦ τανυστοῦ πρέπει νὰ διακρίνωμεν μεταξὺ τῶν ἀντιμεταβαλλομένων καὶ συμμεταβαλλομένων προβολῶν τῶν διανυσμάτων a_k, a^k:

$$a_k = g_{kl}\, a^l, \text{ ἢ } a_\varrho = a^\varrho, \ \alpha_4 = -a^4.$$

Εἰς τὰς κλασικὰς θεωρίας τῆς Φυσικῆς χρησιμοποιοῦνται, συνήθως, ἀντὶ τῶν ἀνωτέρω, αἱ συντεταγμέναι τοῦ Minkowski μὲ τὴν χρονικὴν συντεταγμένην καθαρῶς φανταστικήν:

$$x_4 = ix^4 = ict \text{ καὶ } x_\varrho = x^\varrho,$$

ὁπότε

$$ds^2 = dx_k\, dx_k,$$

$$g_{ik} = \delta_{ik} \text{ καὶ } a_k = a^k$$

Εἰς τὰς ἐφαρμογὰς ὅμως τῆς θεωρίας τῆς Σχετικότητος εἰς τὰς Κβαντικὰς θεωρίας προτιμῶνται κατὰ κανόνα αἱ πραγματικαὶ συντεταγμέναι x^k πρὸς ἀποφυγὴν συγχύσεως μὲ τὴν φανταστικὴν μονάδα τῶν ἐκτελεστῶν τῆς Κβαντικῆς Φυσικῆς καὶ αὐτὰς χρησιμοποιοῦμεν καὶ ἐνταῦθα.

Λόγῳ τοῦ ἀορίστου τῆς θεμελιώδους μετρικῆς μορφῆς ἡ Γεωμετρία τοῦ ἐν λόγῳ διαστήματος παρουσιάζει σχετικῶς μὲ τὴν Γεωμετρίαν τοῦ τετραδιαστάτου Εὐκλειδείου τοιούτου χαρακτηριστικὰς διαφοράς, αἱ ὁποῖαι ἔχουν μεγάλην σημασίαν εἰς τὰς ἐφαρμογὰς τῆς εἰδικῆς θεωρίας τῆς Σχετικότητος. Ἡ θεωρία αὕτη δύναται νὰ χαρακτηρισθῇ ὡς Γεωμετρία τοῦ μετασχηματισμοῦ τοῦ Lorentz δηλ. τοῦ μετασχηματισμοῦ τῶν συντεταγμένων x^k τοῦ ἀφήνοντος ἀναλλοίωτον τὴν μετρικὴν μορφήν (1), καὶ ὁ φυσικώτερος τρόπος ἀναπτύξεως αὐτῆς εἶναι ὁ ἀπὸ τῆς ἀπόψεως τῆς τετραδιαστάτου Γεωμετρίας. Τοῦτο γίνεται ἔν τινι μέτρῳ εἰς τὴν σχετικὴν βιβλιογραφίαν, ὄχι ὅμως συστηματικῶς, προτιμωμένης τῆς ἀναπτύξεως εἰς τὸ τριδιάστατον διάστημα ὡς ἐποπτικωτέρας, εἰσαγομένου δὲ τοῦ τετραδιαστάτου μόνον ὅπου καθίσταται τοῦτο ἀναπόφευκτον. Διὰ τὸν λόγον τοῦτον αἱ κατωτέρω ἀναφερόμεναι ἰδιότητες δὲν ἐκτίθενται (1).

Συνέπεια τοῦ ἀορίστου τῆς μετρικῆς μορφῆς, εἶναι, ὡς γνωστόν, ἡ ὕπαρξις τετραδιαστάτων διανυσμάτων ἢ 4-διανυσμάτων τριῶν κατηγοριῶν, ἤτοι

1) διανυσμάτων χώρου διὰ τὰ ὁποῖα

$$g_{ik}\, a^i\, a^k = a^\varrho a^\varrho - (a^4)^2 > 0$$

---

1) Συστηματικώτερον γίνεται τοῦτο εἰς τὸ βιβλίον τοῦ *J. L. Synge*, Relativity, The Special Theory, North-Holland Publ. Co. Amsterdam 1956, ὅπου εἰσάγονται αἱ κατωτέρω ἀναφερόμεναι κατηγορίαι 2-ἐπιπέδων.

2) διανυσμάτων χρόνου διὰ τὰ ὁποῖα

$$g_{ik}\, a^{i}\, a^{k} < 0 \qquad \text{καὶ}$$

3) μηδενικῶν διανυσμάτων μὲ

$$a^{\varrho}\, a^{\varrho} - (a^{4})^{2} = 0.$$

Ἄλλη συνέπεια εἶναι ὅτι ἡ γωνία δύο 4-διανυσμάτων δὲν δύναται νὰ ὁρισθῇ γενικῶς, διότι ἐνταῦθα ἡ ἔκφρασις τοῦ συνημιτόνου τῆς γωνίας αὐτῶν

$$\text{συν}\varphi = \frac{a_{k}\, b^{k}}{(a_{k}\, a^{k})^{1/2}\, (b_{k}\, b^{k})^{1/2}}$$

δὲν ἔχει πάντοτε ἔννοιαν.

Ἡ καθετότης τῶν διανισμάτων a^{k}, b^{k} ὁρίζεται διὰ τοῦ μηδενισμοῦ τοῦ ἐσωτερικοὺ των γενομένου:

$$a_{k}\, b^{k} = a^{\varrho}\, b^{\varrho} - a^{4}\, b^{4} = 0\ (^{1})$$

Εἰς τὴν Εὐκλείδειον **Γ**εωμετρίαν ὁσωνδήποτε διαστάσεων τὸ τετράγωνον τοῦ ἐσωτερικοῦ γινομένου δύο διανυσμάτων εἶναι μικρότερον τοῦ γινομένου τῶν τετραγώνων τῶν μέτρων των ἢ ἴσον πρὸς αὐτό, ἤτοι

$$(a_{k}\, b^{k})^{2} \leqq (a_{k}\, a^{k})\ (b_{l}\, b^{l})$$

Ἐνταῦθα ὅμως παρουσιάζονται διάφοροι περιπτώσεις ἀναλόγως τοῦ τοῦ εἴδους τῶν θεωρουμένων διανυσμάτων. Οὕτω:

A) Ἂν a^{k} b^{k} εἶναι διανύσματα χρόνου, τότε

$$(a_{k}\, b^{k})^{2} \geqq (a_{k}\, a^{k})\ (b_{l}\, b^{l}) \tag{3}$$

ἢ

$$(a^{\varrho}\, b^{\varrho} - a^{4}\, b^{4})^{2} \geqq (a^{\varrho}\, a^{\varrho} - a^{4})^{2}\ (b^{\varrho}\, b^{\varrho} - b^{4})^{2},$$

ἐφ᾽ ὅσον

$$a^{\varrho}\, a^{\varrho} - (a^{4})^{2} < 0,\quad b^{\varrho}\, b^{\varrho} - (b^{4})^{2} < 0,$$

τῆς ἰσότητος ἰσχυούσης μόνον ὅταν τὰ διανύσματα εἶναι γραμμικῶς ἐξηρτημένα.

---

1) Συμφώνως πρὸς τὸν ὁρισμὸν τοῦτον πᾶν μηδεν. διάνισμα εἶναι κάθετον ἐφ᾽ ἑαυτό.

Πράγματι ἂν θέσωμεν χάριν συντομίας

$$a^{\varrho}\, a^{\varrho} = a^2 \geqq 0, \qquad b^{\varrho}\, b^{\varrho} = b^2 \geqq 0$$

$$\text{μὲ} \qquad a,\ b \geqq 0,$$

θὰ εἶναι ἐξ ὑποθέσεως

$$\left| a^4\, b^4 \right| > a\, b \quad \text{καὶ} \quad a\, b \geqq \left| a^{\varrho}\, b^{\varrho} \right|,$$

μὲ τὸ $=$ ὅταν a^{ϱ}, b^{ϱ} εἶναι γραμμικῶς ἐξηρτημένα.

Συνεπῶς:

$$| a^4\, b^4 | - | a^{\varrho}\, b^{\varrho} | \geqq | a^4\, b^4 | - ab > 0 \tag{4}$$

Ἀφ᾽ ἑτέρου ἡ ἀνισότης

$$| x - y | \geqq \big|\, | x | - | y | \,\big|$$

δίδει:

$$| a^4\, b^4 - a^{\varrho}\, b^{\varrho} | \geqq | a^4\, b^4 | - a\, b,$$

ἢ

$$(a^{\varrho}\, b^{\varrho} - a^4\, b^4)^2 \geqq (a^4\, b^4)^2 - 2\, a\, b\, | a^4 |\, | b^4 | + a^2\, b^2.$$

Ἀφ᾽ ἑτέρου

$$(a\, | b^4 | - b | a^4 |)^2 \geqq 0$$

ἢ

$$2\, a\, b\, | a^4 |\, | b^4 | \leqq a^2\, | b^4 |^2 + b^2 | a^4 |^2$$

ἑπομένως

$$(a^{\varrho}\, b^{\varrho} - a^4\, b^4)^2 \geqq (a^4\, b^4)^2 - a^2\, (b^4)^2 - b^2\, (a^4)^2 + a^2\, b^2$$

$$= (a^2 - (a^4))^2\, (b^2 - (b^4))^2.$$

Ἡ ἰσότης ἰσχύει ὅταν a^k, b^k εἶναι γραμμικῶς ἐξηρτημένα καὶ μόνον τότε, διότι ἂν π.χ. $b_k = \lambda a^k$, ἡ ἰσότης εἶναι προφανὴς καὶ ἂν

$$(a^{\varrho}\, b^{\varrho} - a^4\, b^4)^2 = (a^2 - (a^4)^2)\, (b^2 - (b^4)^2),$$

τότε ἀφοῦ

$$(a^{\varrho}\, b^{\varrho} - a^4\, b^4)^2 \geqq (| a^{\varrho}\, b^{\varrho} | - | a^4\, b^4 |)^2 \geqq$$

$$(a\, b - (a^4\, b^4))^2 \geqq (a^2 - (a^4)^2)\, (b^2 - (b^4)^2) \tag{5}$$

αἱ τέσσαρες ὡς ἄνω ἐκφράσεις εἶναι ἴσαι, δηλ.

1ον) $(a\,b - |a^4\,b^4|)^2 = (a^2 - (a^4)^2)\,(b^2 - (b^4)^2)$.

Ἐκ ταύτης ἕπεται

$$\frac{a}{|a^4|} = \frac{b}{|b^4|} = \lambda \geqq 0$$

2ον) $$|a^4\,b^4| - |a^\varrho\,b^\varrho| = |a^4\,b^4| - a\,b$$

ἢ $$|a^\varrho\,b^\varrho| = a\,b$$

ἄρα τὰ a^ϱ b^ϱ εἶναι γραμμικῶς ἐξηρτημένα π.χ. $b^\varrho = \mu\,a^\varrho$ καὶ $b = |\mu|\,a$.

Ἐπίσης $a^\varrho\,b^\varrho = \mu\,a^2$, $|b^4| = |\mu|\,|a^4|$· διὰ $\lambda \neq 0$

$$b^4 = \pm\,\mu\,a^4$$

καὶ ἡ ἰσότης τῶν ἄκρων ὅρων τῆς (5) δίδει $b^4 = \mu\,a^4$, εἶναι δὲ προφανῶς

$$b^k = \mu\,a^k, \quad \text{ἂν} \quad a = b = 0.$$

Ἐπὶ πλέον ἂν $a^4\,b^4 > 0$ ἡ ἀνισότης (4) δίδει

$$a^4\,b^4 - |a^\varrho\,b^\varrho| > 0$$

συνεπῶς

$$a_k\,b^k = a^\varrho\,b^\varrho - a^4\,b^4 < 0$$

Ἤτοι τὸ ἐσωτ. γινόμενον δύο διανυσμάτων χρόνου ἀνεξαρτήτων καὶ κατευθυνομένων ἀμφοτέρων πρὸς τὸ μέλλον (ἢ παρελθὸν) εἶναι ἀρνητικόν.

B) Ἐὰν a^k εἶναι διάνυσμα χρόνου καὶ b^k μηδενικόν, τότε $|b^4| = b \neq 0$

καὶ $$(a|b^4| - b|a^4|)^2 = b^2\,(a - |a^4|)^2 > 0$$

ἑπομένως

$$(a_k\,b^k)^2 > (a_k\,a^k)\,(b_l\,b^l) = 0$$

καὶ $$a_k\,b^k \lessgtr 0 \text{ καθ' ὅσον } a^4\,b^4 \gtrless 0$$

Γ) Ἐὰν ἀμφότερα τὰ διανύσματα εἶναι μηδενικὰ

$$a^\varrho\,a^\varrho = (a^4)^2, \quad b^\varrho\,b^\varrho = (b^4)^2,$$

καί, ἐφ' ὅσον a^ϱ, b^ϱ εἶναι ἀνεξάρτητα,

$$|a^\varrho\,b^\varrho| < (a^\varrho\,a^\varrho)^{1/2}\,(b^\varrho\,b^\varrho)^{1/2} = |a^4|\,|b^4|$$

ἑπομένως

$$(a^k b^k)^2 > 0$$

καὶ $$a_k b^k \lesssim 0 \text{ καθ' ὅσον } a^4 b^4 \gtrless 0$$

ἂν δὲ a^ϱ, b^ϱ ἐξηρτημένα

$$|a^\varrho b^\varrho| = |a^4| \, |b^4| = \pm a^4 b^4 \text{ καθ' ὅσον } a^4 b^4 \gtrless 0$$

καὶ πάλιν ἐὰν a^k, b^k ἀνεξάρτητα,

$$a_k b^k \lesssim 0 \text{ καθθ' ὅσον } a^4 b^4 \gtrless 0$$

Δ) Ἐὰν a^k εἶναι διάνυσμα χώρου καὶ b^k μηδενικὸν θὰ εἶναι

$$|a^\varrho b^\varrho| \leqq a\, b > |a^4 b^4|$$

$$\text{ἀλλὰ} \quad a_k b^k \gtreqqless 0$$

Ε) Ἂν $a_k a^k > 0$ καὶ $b_l b^l < 0$,

τότε προφανῶς

$$(a_k b^k)^2 \geqq 0 > (a_k a^k)(b_l b^l)$$

ἐπίσης δὲ $$a_k b^k \gtreqqless 0$$

Ϛ) Ἐὰν τέλος $a_k a^k > 0$· καὶ $b_k b^k > 0$

τότε δύναται νὰ εἶναι

$$(a_k b^k)^2 \gtreqqless (a_k a^k)(b_l b^l)$$

$$\text{καὶ} \quad a_k b^k \gtreqqless 0,$$

ὡς προκύπτει δι' ἐξετάσεως ἁπλῶν μερικῶν περιπτώσεων.

Ἐξ ὅλων τῶν ἀνωτέρω συνάγεται ὅτι ἂν τὸ διάνυσμα a^k εἶναι διάνυσμα χρόνου ἢ μηδενικόν, πᾶν κάθετον ἐπ' αὐτὸ (καὶ ἀνεξάρτητον αὐτοῦ) εἶναι διάνυσμα χώρου, ἐνῷ ἂν εἶναι διάνυσμα χώρου ἓν κάθετον ἐπ' αὐτὸ δύναται νὰ εἶναι οἱασδήποτε κατηγορίας

Ἡ ἀμέσως ἀνωτέρας τάξεως γραμμικὴ πολλαπλότης τοῦ διαστήματος τεσσάρων διαστάσεων εἶναι τὸ διδιάστατον ἐπίπεδον ἢ 2-ἐπίπεδον.

$$x^k = y^k + \lambda a^k + \mu b^k$$

εἶναι αἱ παραμετρικαὶ ἐξισώσεις, μὲ παραμέτρους λ, μ, τοῦ 2-ἐπιπέδου τοῦ διερχομένου διὰ τοῦ σημείου y^k καὶ περιέχοντος τὰ (ἀνεξάρτητα) διανύσματα a^k, b^k.

Τὸ σύνολον τῶν σημείων, ἢ τῶν διανυσμάτων μὲ ἀρχὴν τὴν ἀρχὴν τῶν συντεταγμένων καὶ μὲ συντεταγμένας x^k ἐπαληθευούσας τὰς σχέσεις

$$a_k x^k = 0, \quad b_k x^k = 0$$

εὑρίσκεται ἐντὸς 2-ἐπιπέδου διὰ τῆς ἀρχῆς πλήρως καθέτου ἐπὶ τὸ

$$x^k = \lambda a^k + \mu b^k \text{ (1)}$$

Τοῦτο σημαίνει ὅτι πᾶν διάνισμα c^k τῆς μορφῆς

$$c^k = \lambda a^k + \mu b^k$$

εἶναι κάθετον ἐπὶ πᾶν διάνισμα d^k διὰ τὸ ὁποῖον

$$a_k d^k = 0 \qquad b_k d^k = 0$$

ἀφοῦ
$$c_k d^k = \lambda a_k d^k + \mu b_k d^k = 0.$$

Δοθέντος ἑνὸς 2-ἐπιπέδου τὸ κάθετον ἐπ᾿ αὐτὸ εἶναι τελείως ὡρισμένον.

Ἡ ὕπαρξις τοιούτων ζευγῶν 2-ἐπιπέδων εἶναι χαρακτηριστικὴ τοῦ τετραδιαστάτου διαστήματος εὐκλειδείου καὶ ψευδοευκλειδείου, ἀλλ᾿ εἰς τὴν περίπτωσιν τοῦ τελευταίου τὰ διάφορα 2-ἐπίπεδα δὲν εἶναι ἰσοδύναμα καὶ δύνανται νὰ ταξινομηθοῦν κατὰ τρόπον ἀνάλογον πρὸς τὰ διανύσματα.

Οὕτως ὑπάρχουν:

1) 2-ἐπίπεδα περιέχοντα μόνον διανύσματα χώρου, δυνάμενα νὰ ὀνομασθοῦν 2-ἐπίπεδα χώρου.

2) 2-ἐπίπεδα περιέχοντα διανύσματα χώρου καὶ ἓν μόνον μηδενικὸν ἀνεξάρτητον (2-ἐπίπεδα μηδενικά).

3) 2-ἐπίπεδα περιέχοντα διανύσματα χώρου, χρόνου καὶ δύο ἀνεξάρτητα μηδενικὰ (2-ἐπίπεδα χρόνου).

---

1) Ἐν τοῖς ἑπομένοις θεωροῦμεν 2-ἐπίπεδα διὰ τῆς ἀρχῆς τῶν συντεταγμένων, πρᾶγμα ποὺ δὲν ἀποτελεῖ περιορισμὸν τῆς γενικότητος.

Διὰ ταῦτα ἰσχύουν αἱ ἀκόλουθοι προτάσεις :

α) Πᾶν 2-ἐπίπεδον

$$x^k = \lambda a^k + \mu b^k,$$

ὅπου

$$(a_k b^k)^2 < (a_k a^k)(b_l b^l)$$

περιέχει μόνον διανύσματα χώρου.

Πράγματι ἡ ἔκφρασις :

$$x_k x^k = \lambda^2 a_k a^k + 2 \lambda\mu a_k b^k + \mu^2 b b^k \quad (6)$$

εἶναι θετικὴ διὰ πάσας τὰς τιμὰς τῶν λ, μ μέ $|\lambda| + |\mu| \neq 0$, δυνάμει τῆς ἀνισότητος, ἡ ὁποία, συμφώνως πρὸς τὰ περὶ διανυσμάτων ἀποδειχθέντα ἔχει ὡς συνέπειαν ὅτι τὰ a^k, b^k εἶναι διανύσματα χώρου ἀνεξάρτητα ἀλλήλων.

β) Πᾶν 2-ἐπίπεδον

$$x^k = \lambda a^k + \mu b^k,$$

ὅπου

$$(a_k b^k)^2 = (a_k a^k)(b_l b^l)$$

καὶ

$$a^k, b^k \text{ ἀνεξάρτητα,}$$

περιέχει διανύσματα χώρου καὶ κατ᾽ οὐσίαν ἓν μόνον μηδενικόν.

Διότι τότε τὰ a^k b^k εἶναι ἢ ἀμφότερα διανύσματα χώρου ἢ τὸ ἓν χώρου καὶ τὸ ἄλλον μηδενικὸν καὶ ἡ ἔκφρασις (6) μηδενίζεται διὰ μίαν μόνον τιμὴν τοῦ λόγου λ/μ ἢ μ/λ.

γ) Ἂν

$$(a_k b^k)^2 > (a_k a^k)(b_l b^l)$$

ἡ ἔκφρασις (6) μηδενίζεται διὰ δύο ἀκριβῶς τιμὰς τοῦ λόγου λ/μ (μ/λ) εἰς τὰς ὁποίας ἀντιστοιχοῦν δύο ἀνεξάρτητα μηδενικὰ διανύσματα καὶ δύναται νὰ λάβῃ τιμὰς τόσον θετικὰς ὅσον καὶ ἀρνητικὰς εἰς τὰς ὁποίας ἀντιστοιχοῦν ἄπειρα ἀνεξάρτητα ἀλλήλων διανύσματα χώρου καὶ χρόνου. Συνεπῶς τὸ 2-ἐπίπεδον

$$x^k = \lambda\alpha^k + \mu\beta^k$$

εἶναι 2-ἐπίπεδον χρόνου.

δ) Ἐὰν τὸ 2-ἐπιπ.

$$x^k = \lambda a^k + \mu\beta^k$$

εἶναι χρόνου, τότε τὸ πλήρως κάθετον ἐπ᾽ αὐτὸ εἶναι χώρου καὶ ἀντιστρόφως.

Διότι τότε ἀμφότερα τὰ διανύσματα a^k b^k δύνανται νὰ ληφθοῦν ὡς διανύσματα χρόνου καὶ πᾶν κάθετον ἐπ᾽ αὐτὰ εἶναι διάνυσμα χώρου. Ἀντιστρόφως ἂν τὸ δοθὲν 2-ἐπίπεδον εἶναι χώρου, δύναται νὰ ὑποτεθῇ ὡς ὁριζόμενον ὑπὸ δύο διανυσμάτων a^k, b^k μὲ $b^4 = 0$ καὶ $a_k\, b^k = 0$ (¹). Τότε δι' ἓν διάνυσμα c^k κάθετον ἐπ' ἀμφότερα ἔχομεν

$$a^\varrho\, c^\varrho = a^4\, c^4$$
$$b^\varrho\, c^\varrho = 0$$

καὶ δύναται νὰ ληφθῇ

$$c^\varrho = a^\varrho$$

ὁπότε
$$c^4 = a^\varrho\, a^\varrho \,|\, a^4 \quad (a^4 \neq 0)\ (^2)$$

καὶ
$$c^\varrho\, c^\varrho - (c^4)^2 = a^\varrho\, a^\varrho \left(1 - \frac{a^\varrho\, a^\varrho}{(c^4)^2}\right) < 0$$

Ἂν d^k εἶναι τυχὸν *ἄλλο* διάνυσμα κάθετον ἐπὶ a^k καὶ b^k θὰ ἰσχύῃ ἡ ἀνισότης

$$(c_k\, d^k)^2 > (c_k\, c^k)\,(d_l\, d^l)$$

καὶ ἑπομένως τὸ κάθετον ἐπὶ τὸ 2-ἐπίπεδον τῶν a^k, b^k εἶναι 2-ἐπίπεδον χρόνου

ε) Ἐὰν

$$(a_k\, b^k)^2 = (a_k\, a^k)\,(b_l\, b^l)$$

τὸ θεωρούμενον 2-ἐπίπεδον περιέχει ἓν μηδεν. διάνυσμα καὶ δύναται νὰ ὑποτεθῇ

$$b_l\, b^l = 0$$

ὁπότε θὰ εἶναι καὶ

$$a_k\, b^k = 0$$

καὶ ἑπομένως τὸ κάθετον 2-ἐπίπεδον θὰ περιέχει τὸ b^k. Πᾶν διάνυσμα αὐτοῦ ἀνεξάρτητον τοῦ b^k εἶναι διάνυσμα χώρου καὶ τὸ τελευταῖον 2-ἐπίπεδον εἶναι ἐπίσης μηδενικόν.

Ἡ περίπτωσις αὕτη εἶναι ἡ μόνη καθ' ἣν ζεῦγος 2-ἐπιπέδων καθέτων ἐπ' ἄλληλα εἶναι τῆς αὐτῆς φύσεως καὶ ἔχουν κοινὴν εὐθεῖαν, τὴν

$$x^k = \lambda\, b^k.$$

Περίληψις: Ἀποδεικνύονται διάφοροι σχέσεις ἰσχύουσαι διὰ τὰ 4-διανύσματα καὶ τὰ 2-ἐπίπεδα τοῦ τετραδιαστάτου διαστήματος τῆς Εἰδικῆς Θεωρίας τῆς Σχετικότητος.

---

1) Ἐν ἀνάγκῃ δι' ἐγκαταστάσεως τῶν a^k b^k ὑπὸ καταλλήλων γραμμικῶν συνδυασμῶν αὐτῶν.

2) Εἰς τὴν περίπτωσιν $a^4 = b^4 = 0$ λαμβάνομεν $c^\varrho = 0$ $c^4 = 1$.