ΔΥΟ ΝΕΑΙ ΜΕΘΟΔΟΙ
ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΟΥ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΥ ΩΡΙΣΜΕΝΩΝ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΩΝ
ΚΑΙ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΑ ΕΦΑΡΜΟΓΗΣ ΑΥΤΩΝ ΕΙΣ FORTRAN II

Ὑπὸ

ΚΛΕΑΝΘΟΥΣ ΒΕΝΕΤΟΠΟΥΛΟΥ

Φυσικοῦ

Παρασκευαστοῦ τοῦ Ἐργαστηρίου Ἐφηρμοσμένης Φυσικῆς

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

Σελίς

Βιβλιογραφία 373

Πρόλογος 375

1. Εἰσαγωγὴ 377
2. Ὑπολογισμὸς τοῦ ἐμβαδοῦ τῶν ζωνῶν 378
3. Μέθοδος Α′ 379
4. Παρατηρήσεις 380
5. Περὶ τῆς τιμῆς τοῦ συντελεστοῦ ρ 385
6. Μέθοδος Β′ 386
7. Παρατηρήσεις 389
8. Ὑπολογισμὸς διὰ τοῦ ἠλεκτρονικοῦ ὑπολογιστοῦ 390
9. Ἐφαρμογὴ τῆς μεθόδου Α′ 390
10. Ἀναζήτησις τῆς καλυτέρας τιμῆς τοῦ συντελεστοῦ ρ 391
11. Ἐφαρμογὴ τῆς μεθόδου Β′ 392
12. Πρόγραμμα πρὸς ὁλοκλήρωσιν περισσοτέρων συναρτήσεων 392
13. Ὁλοκλήρωσις ἀπὸ x_I ἕως ∞ 393
14. Ὑπολογισμὸς διὰ τοῦ ἠλεκτρονικοῦ ὑπολογιστοῦ 395
15. Ὁλοκλήρωσις σειρᾶς τιμῶν ἀγνώστου συναρτήσεως 396

Περίληψις εἰς τὴν ἀγγλικὴν 398

Πίνακες (I - XXI) 399

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

1. L. J. Adams, Applied Calculus, John Wiley, New York, N.Y., 1963.
2. A. A. Bennett - W. E. Milne - H. Bateman, Numerical Integration of Differential Equations, Dover Publications, New York, 1956.
3. D. R. Hartree, Numerical Analysis, Oxford Univ. Press, 1952.
4. F. B. Hildebrand, Introduction to Numerical Analysis, McGraw - Hill Book Co., New York, 1956.
5. J. Legras, Précis d'Analyse Numérique, Dunod, Paris, 1963.
6. H. Margenau - G. M. Murphy, The Mathematics of Physics and Chemistry, D. Van Nostrand Co., Princeton, N. J., 1962.
7. J. Mathews - R. L. Walker, Mathematical Methods of Physics, W. A. Benjamin, New York, 1965.
8. J. M. McCormick - M. G. Salvadori, Numerical Methods in FORTRAN, Prentice - Hall, Englewood Cliffs, N. J., 1964.
9. W. E. Milne, Numerical Calculus, Princeton Univ. Press, 1949.
10. K. L. Nielsen, Methods in Numerical Analysis, McMillan Co., New York, 1964.
11. M. G. Salvadori, Numerical Methods in Engineering, Prentice - Hall, Englewood Cliffs, N. J., 1956.
12. J. B. Scarborough, Numerical Mathematical Analysis, Oxford Univ. Press, 1955.

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Πρὸς ὑπολογισμὸν τῆς τιμῆς ἑνὸς ὡρισμένου ὁλοκληρώματος εἰς δοθὲν διάστημα καταφεύγομεν πολλάκις εἰς μίαν τῶν μεθόδων ἀριθμητικοῦ ὑπολογισμοῦ ὁλοκληρωμάτων, εἴτε διότι ἡ συνάρτησις εἶναι πολύπλοκος καὶ ἡ ὁλοκλήρωσις δὲν εἶναι δυνατή, εἴτε διότι δὲν εἶναι γνωστὴ ἡ μορφὴ τῆς συναρτήσεως, ὡς συμβαίνει εἰς τὴν περίπτωσιν καθ' ἣν ἔχομεν σειρὰν παρατηρήσεων ἑνὸς φαινομένου, χωρὶς νὰ γνωρίζωμεν καὶ τὸν νόμον τὸν ὁποῖον τοῦτο ἀκολουθεῖ.

Τοιαῦται μέθοδοι ἔχουν προταθῆ πολλαί, συνήθως δὲ ἀναφέρονται εἰς τὴν βιβλιογραφίαν ὡς πλέον εὔχρηστοι καὶ ἀκριβεῖς ἡ μέθοδος τῶν τραπεζίων, ἡ μέθοδος Simpson καὶ ἡ μέθοδος Wellde. Ἡ ὀλιγώτερον ἀκριβὴς μέθοδος τῶν τραπεζίων ἔχει σήμερον ἱστορικὴν μόνον ἀξίαν καὶ σχεδὸν δὲν χρησιμοποιεῖται. Δύναται ὅμως νὰ θεωρηθῆ ὡς ἡ βάσις ὅλων τῶν ἄλλων μεθόδων, ἐπειδὴ ὑποδεικνύει τὸν χωρισμὸν τοῦ διαστήματος ὁλοκληρώσεως εἰς ζώνας ἴσου πλάτους, ἐπὶ τοῦ χωρισμοῦ δὲ αὐτοῦ στηρίζονται καὶ αἱ λοιπαὶ μέθοδοι ἀριθμητικῆς ὁλοκληρώσεως.

Ἡ μέθοδος Simpson δίδει ἀρκετὰ ἀκριβῆ ἀποτελέσματα, ἔχει ὅμως τὸ μειονέκτημα ὅτι ἀπαιτεῖ χωρισμὸν τοῦ πεδίου ὁλοκληρώσεως εἰς ἄρτιον ἀριθμὸν ζωνῶν, ἤτοι τὴν γνῶσιν περιττοῦ ἀριθμοῦ τιμῶν τῆς συναρτήσεως (ἢ τοῦ φαινομένου), πρᾶγμα τὸ ὁποῖον δὲν εἶναι πάντοτε δυνατόν. Ἐξ ἄλλου, ἡ μέθοδος Wellde, ἂν καὶ δίδῃ πολλάκις μεγαλυτέραν προσέγγισιν τῆς πραγματικῆς τιμῆς, ἀπαιτεῖ τὸν χωρισμὸν τοῦ πεδίου εἰς $n = 6k$ *ζώνας* $(k = 1, 2, 3, \ldots)$, *δηλαδὴ αἱ ζῶναι πρέπει νὰ εἶναι 6 ἢ 12 ἢ 18 . . . . καὶ τὸ πλῆθος τῶν γνωστῶν τιμῶν τῆς συναρτήσεως νὰ εἶναι 7 ἢ 13 ἢ 19 . . .*

Αἱ προτεινόμεναι δύο νέαι μέθοδοι δίδουν ἀκριβῆ ἀποτελέσματα, πολλάκις ὑπερβαίνουσαι εἰς ἀκρίβειαν καὶ τὰς μεθόδους Simpson καὶ Wellde, — ἰδίως ἡ δευτέρα μέθοδος, ἡ ὁποία εἶναι καὶ ἡ περισσότερον ἀκριβὴς — χωρὶς νὰ θέτουν τοὺς ἀνωτέρω περιορισμοὺς ὡς πρὸς τὸν χωρισμὸν τοῦ διαστήματος ὁλοκληρώσεως εἰς ζώνας. Τὰ μειονεκτήματα τῶν ἡμετέρων μεθόδων εἶναι ὅτι ἡ μὲν πρώτη ἀπαιτεῖ τὴν γνῶσιν δύο τιμῶν τῆς συναρτήσεως ἐκτὸς τοῦ διαστήματος ὁλοκληρώσεως καὶ παρὰ τὰ ὅρια αὐτοῦ, διὰ δὲ τὴν δευτέραν εἶναι ἀπαραίτητος καὶ ἡ γνῶσις τῆς πρώτης παραγώγου τῆς συναρτήσεως.

Αἱ δοκιμαὶ τῶν προγραμμάτων καὶ οἱ διάφοροι ὑπολογισμοὶ ἐγένοντο

τῇ βοηθείᾳ τοῦ ἠλεκτρονικοῦ ὑπολογιστοῦ IBM 1620/II τοῦ Πανεπιστημίου Θεσσαλονίκης. Πρὸς τὴν Διεύθυνσιν τοῦ Μαθηματικοῦ Σπουδαστηρίου ἐκφράζω τὰς εὐχαριστίας μου τόσον διὰ τὴν διάθεσιν τοῦ ὑπολογιστοῦ πρὸς ἐκτέλεσιν τῶν προγραμμάτων, ὅσον καὶ διὰ τὴν ἐν γένει φιλόξενον συμπαράστασιν εἰς τὴν προσπάθειάν μου.

Ἐπιθυμῶ ἐπίσης νὰ εὐχαριστήσω θερμῶς τοὺς Καθηγητὰς κ.κ. Ἰ. Ἀναστασιάδην, Π. Ρεντζεπέρην καὶ Ν. Οἰκονομίδην, διὰ τὸ ἐπιδειχθὲν ἀμέριστον ἐνδιαφέρον καθ' ὅλην τὴν πορείαν τῆς ἐργασίας καὶ διὰ ποικίλας χρησίμους συζητήσεις καὶ ὑποδείξεις αἵτινες συνέβαλον εἰς τὴν βελτίωσιν ταύτης.

Τέλος εὐχαριστῶ τὴν Βοηθὸν τοῦ Μαθηματικοῦ Σπουδαστηρίου κ. Κ. Ντοκούτση—Ἀκριτίδου διὰ τὴν βοήθειάν της εἰς τὴν χρῆσιν τοῦ ἠλεκτρονικοῦ ὑπολογιστοῦ.

1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Ἔστω ὅτι ζητεῖται ἡ ἀριθμητικὴ τιμὴ τοῦ ὡρισμένου ὁλοκληρώματος

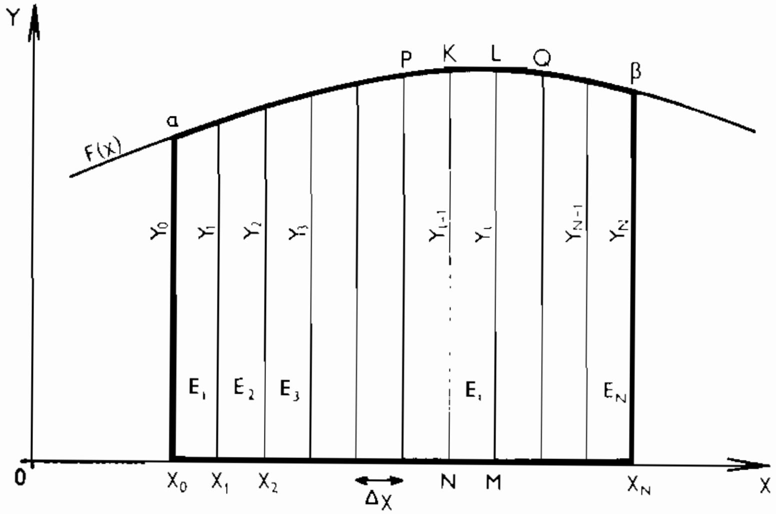
$$S_0 = \int_{x_\alpha}^{x_\beta} F(x)\,dx \qquad (1)$$

ὁριζομένου εἰς τὸ διάστημα μεταξὺ τῶν σημείων x_α καὶ $x_\beta = x_\alpha + N\cdot\Delta x$, ὅπου εἶναι N = ἀκέραιος ἀριθμὸς καὶ

$$\Delta x = \frac{x_\beta - x_\alpha}{N} \qquad (2)$$

Θέτομεν $x_\alpha = x_0$ καὶ $x_\beta = x_N$ (βλ. σχ. 1). Τότε εἶναι

$$S_0 = \int_{x_0}^{x_N} F(x)dx \qquad (3)$$



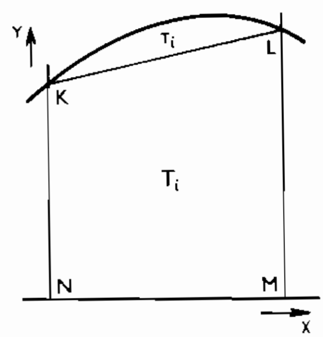
Σχ. 1

Ἡ τιμὴ τοῦ ὁλοκληρώματος S_0 ἰσοῦται πρὸς τὸ ἐμβαδὸν τὸ ὁριζόμενον ὑπὸ τῆς συναρτήσεως $Y = F(x)$, τοῦ ἄξονος τῶν x καὶ τῶν τεταγμένων εἰς τὰ σημεῖα x_0 καὶ x_N.

Διαιροῦμεν τὸ διάστημα ἀπὸ x_0 ἕως x_N εἰς N ἴσα μέρη καὶ φέρομεν τὰς τεταγμένας εἰς τὰ σημεῖα $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_N$. Χωρίζομεν οὕτω τὸ ἐμβαδὸν S_0 εἰς N ζώνας ἴσου πλάτους Δx, τὰς ὁποίας ὀνομάζομεν $E_1, E_2, E_3, \ldots, E_N$. Προφανῶς εἶναι:

$$S_0 = E_1 + E_2 + E_3 + \ldots + E_N \tag{4}$$

Ἑκάστη ζώνη E_i $(i = 1, 2, \ldots, N)$ ἀποτελεῖται ἀπὸ δύο μέρη: ἓν τραπέζιον KLMN, ἐμβαδοῦ T_i, καὶ ἓν μικρὸν τμῆμα μεταξὺ τοῦ εὐθυγράμμου τμήματος KL καὶ τῆς καμπύλης $Y = F(x)$, ἐμβαδοῦ τ_i (βλ. σχ. 2).



Σχ. 2

Ἐὰν ἡ καμπύλη εἶναι κυρτή, τότε τὰ ἐμβαδὰ T_i καὶ τ_i δέον νὰ προστεθοῦν καὶ θὰ ἔχωμεν:

$$E_i = T_i + \tau_i \tag{5}$$

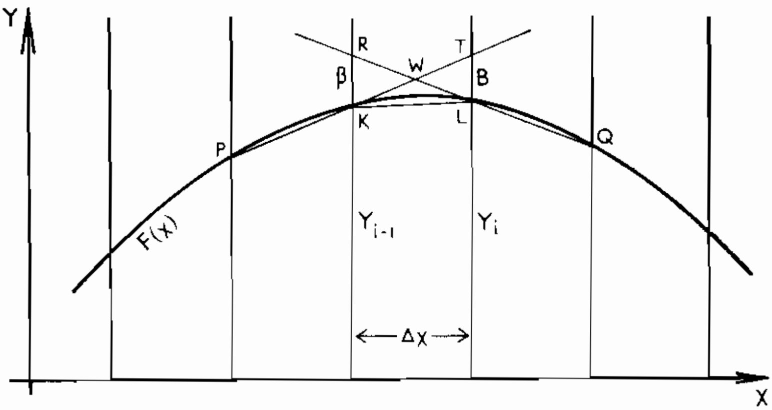
Ἐὰν ἡ καμπύλη ἔχῃ τὰ κοῖλα πρὸς τὰ ἄνω, τότε τὸ τ_i θὰ πρέπει νὰ ἀφαιρεθῇ ἀπὸ τὸ T_i. Ἀλλὰ εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν ἡ τιμὴ τοῦ τ_i θὰ προκύψῃ ἐκ τοῦ ὑπολογισμοῦ ἀρνητικὴ (βλ. § 3 καὶ 6). Συνεπῶς, ὁ τύπος (5) θὰ ἰσχύει καὶ πάλιν ὡς ἔχει.

2. ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΤΟΥ ΕΜΒΑΔΟΥ ΤΩΝ ΖΩΝΩΝ

Τὸ ἐμβαδὸν ἑκάστου τραπεζίου KLMN εἶναι:

$$T_i = \frac{Y_{i-1} + Y_i}{2} \Delta x \tag{6}$$

ἔνθα $Y_i = F(x_i)$ $(i = 1, 2, \ldots, N)$, τὸ δὲ ἐμβαδὸν τ_i εἶναι μέρος τοῦ τριγώνου, τοῦ σχηματιζομένου ὑπὸ τοῦ εὐθυγράμμου τμήματος KL καὶ τῶν προεκτάσεων τῶν PK καὶ QL (σχ. 3).



Σχ. 3

Τὸ τ_i ὑπολογίζεται εἴτε ὡς μέρος τοῦ τριγώνου KLW (μέθοδος Α'), εἴτε ἐκ τῆς καμπυλότητος τῆς καμπύλης εἰς τὴν περιοχὴν αὐτὴν (μέθοδος Β').

3. ΜΕΘΟΔΟΣ Α'

Ἔστω ε_i τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου KLW (σχ. 3), καί:

$$\tau_i = \rho_i \varepsilon_i \tag{7}$$

ὅπου ρ_i εἶναι συντελεστὴς μικρότερος τῆς μονάδος, καὶ τοῦ ὁποίου ἡ τιμὴ ὁρίζεται κατωτέρω. Τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου τούτου, ὡς ἀποδεικνύεται εὐκόλως, εἶναι:

$$\varepsilon = \frac{B \cdot \beta}{2(B + \beta)} \Delta x \tag{8}$$

ὅπου B εἶναι τὸ μῆκος τοῦ εὐθυγράμμου τμήματος LT καὶ β τὸ μῆκος τοῦ KR. Ἑπομένως:

$$\tau_i = \rho_i \frac{B_i \cdot \beta_i}{2(B_i + \beta_i)} \Delta x \tag{9}$$

Ἀλλὰ

$$B_i = 2Y_i - Y_{i-1} - Y_{i+1} \tag{10}$$

καὶ

$$\beta_i = 2Y_{i+1} - Y_i - Y_{i+2} \qquad (11)$$

ὁπότε

$$E_i = \frac{Y_i + Y_{i+1}}{2} \Delta x + \rho \frac{B_i \cdot \beta_i}{2(B_i + \beta_i)} \Delta x \qquad (12)$$

ἢ

$$E_i = \frac{\Delta x}{2} \left[Y_i + Y_{i+1} + \rho \frac{B_i \cdot \beta_i}{B_i + \beta_i} \right] \qquad (13)$$

καὶ

$$S = \frac{\Delta x}{2} \sum_{i=2}^{n+1} \left(Y_i + Y_{i+1} + \rho \frac{B_i \cdot \beta_i}{B_i + \beta_i} \right) \qquad (14)$$

4. ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

α) Ἐὰν ἡ συνάρτησις $Y = F(x)$ ἔχῃ σημεῖον καμπῆς ἐντὸς τῆς περιοχῆς ὁλοκληρώσεως, ἡ καμπύλη εἰς τὸ σημεῖον ἐκεῖνο τείνει πρὸς εὐθεῖαν καὶ τὸ ἐμβαδὸν τ_i τείνει πρὸς τὸ μηδέν, ὅταν τὸ Δx εἶναι ἀρκούντως μικρόν. Ἐπειδὴ ὅμως εἰς τὰς γειτονικὰς ζώνας αὐξάνει ἡ καμπυλότης καὶ ἡ προέκτασις τῶν προαναφερθεισῶν γραμμῶν PK καὶ QL θὰ δώσῃ B καὶ β διάφορα τοῦ μηδενὸς καὶ ἑτερόσημα, πρέπει νὰ θέσωμεν $\rho = 0$ διὰ νὰ μηδενισθῇ ὁ δεύτερος ὅρος τοῦ ἀθροίσματος (12) διὰ τὴν ζώνην τὴν περιέχουσαν τὸ σημεῖον καμπῆς. Τοῦτο εἶναι ἀπαραίτητον, ἐπειδὴ τὸ κλάσμα θὰ τείνῃ πρὸς τὸ ἄπειρον, ὅταν $|B| \rightarrow |\beta|$, δηλαδὴ ὅταν ἡ καμπύλη εἰς τὴν περιοχὴν αὐτὴν εἶναι συμμετρικὴ ὡς πρὸς τὸ σημεῖον καμπῆς.

Τὰ σημεῖα καμπῆς εὑρίσκονται ἐὰν μηδενίσωμεν τὴν δευτέραν παράγωγον τῆς $F(x)$. Ἐὰν ἐργαζώμεθα λογιστικῶς διὰ τὸν ἀριθμητικὸν ὑπολογισμὸν τῆς τιμῆς τοῦ ὁλοκληρώματος, θὰ ἔχωμεν ὅλας τὰς τιμὰς τῶν Y_i καὶ εἶναι εὔκολον νὰ εὕρωμεν ποῦ μηδενίζεται ἡ δευτέρα παράγωγος, ἐὰν λάβωμεν ἀντὶ τῶν παραγώγων τὰς διαφορὰς

$$\Delta Y_i = Y_{i+1} - Y_i$$

καὶ

$$\Delta' Y_i = \Delta Y_i - \Delta Y_{i-1}$$

Αἱ τιμαὶ τῶν ΔY καὶ $\Delta' Y$ προκύπτουν ἀναλυτικῶς ὡς ἑξῆς:

. . . .

$$
\begin{array}{lll}
Y_2 & & \\
 & Y_3 - Y_2 = \Delta Y_2 & \\
Y_3 & & \Delta Y_3 - \Delta Y_2 = \Delta' Y_3 \\
 & Y_4 - Y_3 = \Delta Y_3 & \\
Y_4 & & \Delta Y_4 - \Delta Y_3 = \Delta' Y_4 \\
 & Y_5 - Y_4 = \Delta Y_4 & \\
Y_5 & & \Delta Y_5 - \Delta Y_4 = \Delta' Y_5 \\
 & Y_6 - Y_5 = \Delta Y_5 & \\
Y_6 & &
\end{array}
$$

. . . .

. . . .

. . . .

$$
\begin{array}{lll}
Y_n & & \\
 & Y_{n+1} - Y_n = \Delta Y_n & \\
Y_{n+1} & & \Delta Y_{n+1} - \Delta Y_n = \Delta' Y_{n+1} \\
 & Y_{n+2} - Y_{n+1} = \Delta Y_{n+1} & \\
Y_{n+2} & & \\
 & (15) & (16)
\end{array}
$$

Δι' ἀντικαταστάσεως τῶν ΔY_i εἰς τὰς (16) διὰ τῶν τιμῶν των ἐκ τῶν (15), ἔχομεν:

$$\Delta' Y_i = Y_{i-1} - 2Y_i + Y_{i+1} \tag{17}$$

καὶ

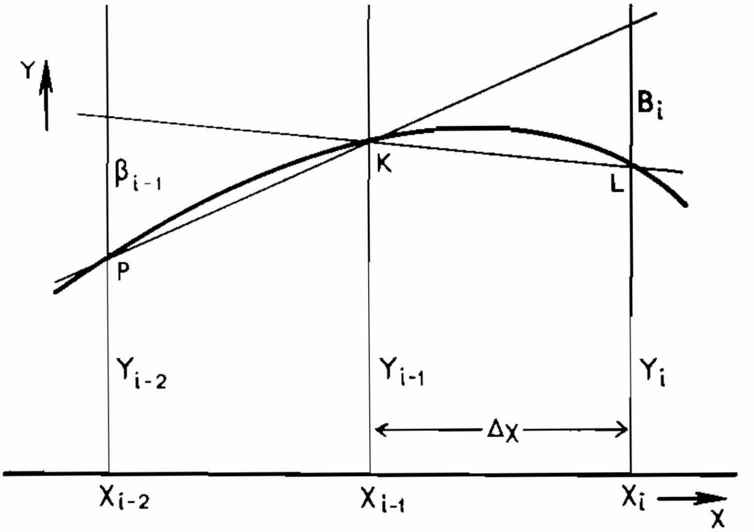
$$\Delta' Y_{i+1} = Y_i - 2Y_{i+1} + Y_{i+2} \tag{18}$$

Διὰ συγκρίσεως τῶν (17) καὶ (18) πρὸς τὰς (10) καὶ (11), παρατηροῦμεν ὅτι:

$$\Delta' Y_i = -B_i \qquad \text{καὶ} \qquad \Delta' Y_{i+1} = -\beta_i \tag{20}$$

Ὑπολογίζομεν τὰς τιμὰς ὅλων τῶν $\Delta' Y_i$ καὶ ἐλέγχομεν ἐὰν ὑπάρχῃ τιμὴ μηδενική. Ἐὰν εἶναι $\Delta' Y_i = 0$, ἡ καμπύλη ἔχει σημεῖον καμπῆς διὰ $x = x_i$. Ἐπειδὴ ὅμως εἶναι $\Delta' Y_i = -B_i$, ὁ δεύτερος ὅρος τοῦ ἀθροίσματος (12) μηδενίζεται. Ἐπίσης μηδενίζεται ὁ αὐτὸς ὅρος καὶ διὰ $x = x_{i-1}$, ἐπειδὴ εἶναι $B_i = \beta_{i-1}$. Τοῦτο προκύπτει ἀμέσως καὶ ἐκ τῆς ἰσότητος τῶν τριγώνων PKH καὶ KLT (σχ. 4).

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συνάγεται ὅτι ἔχομεν μηδενικὰς τιμὰς διὰ τὰ τ_1 ἑκατέρωθεν τοῦ σημείου καμπῆς. Εἰς τὴν πραγματικότητα, τὰ δύο ταῦτα ἐμβαδὰ εἶναι διάφορα τοῦ μηδενός, ἀλλὰ εἶναι (περίπου) ἴσα, καὶ τὸ μὲν εὑρίσκεται ἄνω τῆς γραμμῆς KL καὶ προστίθεται εἰς τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τραπεζίου, τὸ δὲ κάτωθεν τῆς ἀντιστοίχου γραμμῆς τῆς γειτονικῆς ζώνης καὶ ἀφαιρεῖται. Ἑπομένως, διὰ τοῦ μηδενισμοῦ ἀμφοτέρων, οὐδὲν λάθος προκύπτει εἰς τὸν ὑπολογισμὸν τοῦ συνολικοῦ ἐμβαδοῦ.



Σχ. 4

Ἐὰν οὐδεμία τιμὴ $\Delta' Y_i$ εἶναι μηδέν, ἔχωμεν ὅμως τιμὰς θετικὰς καὶ ἀρνητικάς, ὑπάρχει σημεῖον καμπῆς ἐντὸς τῆς ζώνης τῆς ὁριζομένης ὑπὸ δύο τεταγμένων, αἱ ὁποῖαι ἔχουν $\Delta' Y$ ἑτερόσημα. Τότε μηδενίζομεν τὸ τ_i διὰ τὴν ζώνην ἐντὸς τῆς ὁποίας εὑρίσκεται τὸ σημεῖον καμπῆς (παραλείπομεν τὸν δεύτερον ὅρον τοῦ ἀθροίσματος (12) ἢ θέτομεν $\rho = 0$).

Κατὰ τὴν χρησιμοποίησιν ἠλεκτρονικοῦ ὑπολογιστοῦ, δίδονται εἰς τὰ προγράμματα αἱ κατάλληλοι ἐντολαί, διὰ τῶν ὁποίων ἐλέγχονται αἱ τιμαὶ τῶν B_i καὶ β_i, καὶ ἀναλόγως τοῦ ἀποτελέσματος καθορίζεται ἡ περαιτέρω πορεία τοῦ προγράμματος (βλ. κατωτέρω: ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΔΙΑ ΤΟΥ ΗΛΕΚΤΡΟΝΙΚΟΥ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΟΥ).

β) Ἐὰν ἡ συνάρτησις $Y = F(x)$ γίνεται διά τινα τιμὴν τῆς x ἄπειρος, ἡ ὁλοκλήρωσις δὲν δύναται νὰ φθάσῃ μέχρι τῆς τιμῆς αὐτῆς, διότι τότε καὶ ἡ τιμὴ τοῦ ὁλοκληρώματος γίνεται ἄπειρος. Ἐπειδὴ δὲ κατὰ τὸν ὑπολογισμὸν τοῦ ἐμβαδοῦ E_{μ} μιᾶς ζώνης μεταξὺ x_i καὶ $x_i + \Delta x$ χρησιμοποιεῖται καὶ ἡ τιμὴ τῆς συναρτήσεως $Y_{i-1} = F(x_i - \Delta x)$, πρέπει νὰ λαμβάνεται πρόνοια κατὰ τὸν καθορισμὸν τοῦ πλήθους N τῶν ζωνῶν, καὶ συνεπῶς τοῦ εὔρους Δx αὐτῶν, ὥστε οὐδεμία ἐκ τῶν τιμῶν τῆς συναρτήσεως, τὰς ὁποίας πρόκειται νὰ χρησιμοποιήσωμεν, νὰ εἶναι ἄπειρος.

Τοῦτο δύναται νὰ ἐπιτευχθῇ ἐὰν δώσωμεν N ἀρκούντως μεγάλο, ὥστε τὸ Δx, τὸ ὁποῖον θὰ προκύψῃ, νὰ εἶναι μικρότερον ἀπὸ τὴν διαφορὰν $x_\alpha - x_\infty$ τῆς ἀρχῆς τῆς πρώτης ζώνης ἀπὸ τῆς τιμῆς τῆς x διὰ τὴν ὁποίαν ἡ συνάρτησις γίνεται ἄπειρος. Γενικῶς πρέπει νὰ ἰσχύῃ ἡ σχέσις:

$$\Delta x \leqslant x_\alpha - x_\infty \qquad (21)$$

Καὶ ἐπειδὴ εἶναι $\Delta x = (x_\beta - x_\alpha)/N$, ἔχομεν:

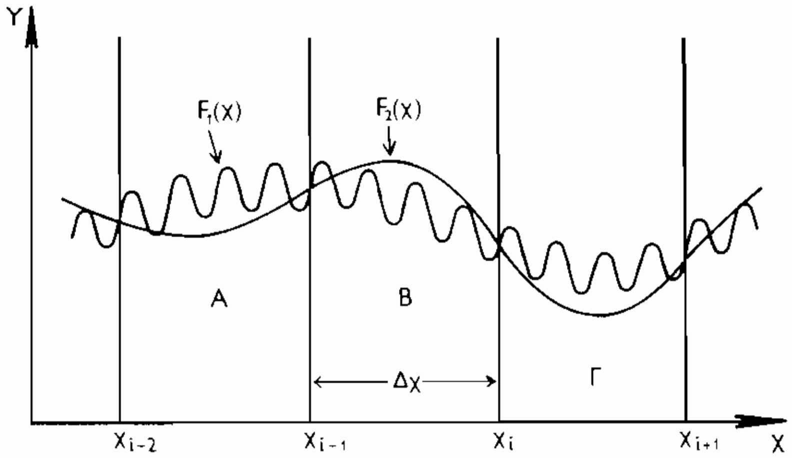
$$\frac{x_\beta - x_\alpha}{N} \leqslant \chi_\alpha - \chi_\infty \qquad (22)$$

ἢ

$$N \geqslant \frac{x_\beta - x_\alpha}{x_\alpha - x_\infty} \qquad (23)$$

Οὕτω π.χ., ἐὰν ἡ συνάρτησις γίνεται ἄπειρος διὰ $x = 0$ ($F(0) = \infty$), τότε βεβαίως δὲν δυνάμεθα νὰ ὁλοκληρώσωμεν μὲ ὅριον (κατώτερον ἢ ἀνώτερον) τὸ μηδέν. Ἀλλὰ ἀκόμη καὶ διὰ τὸ ὁλοκλήρωμα ἀπὸ 10 μέχρι 100, πρέπει τὸ N νὰ εἶναι τουλάχιστον 10, ὥστε νὰ ἔχωμεν $\Delta x = 9$. Τότε αἱ τιμαὶ τῆς συναρτήσεως, αἱ ὁποῖαι θὰ χρησιμοποιηθοῦν διὰ τὴν ὁλοκλήρωσιν, θὰ εἶναι αἱ $F(1)$, $F(10)$, $F(19)$, . . . , $F(100)$, $F(109)$. Δηλαδὴ ἡ τιμὴ $F(0) = \infty$ δὲν χρησιμοποιεῖται, ἐνῶ ἐὰν ἦτο $N = 9$, θὰ εἴχομεν $\Delta x = 10$ καὶ αἱ τιμαὶ τῆς συναρτήσεως εἰς τὰ ἄκρα τῶν ζωνῶν θὰ ἦσαν $F(0)$, $F(10)$, $F(20)$, ..., $F(100)$, $F(110)$. Ἀλλὰ ἡ σειρὰ αὕτη τῶν τιμῶν τῆς $F(x)$ δὲν δύναται νὰ χρησιμοποιηθῇ ἐπειδὴ μία ἐξ αὐτῶν, ἡ $F(0)$, εἶναι ἄπειρος.

γ) Ἐὰν ἡ συνάρτησις εἶναι τριγωνομετρική, ὑπάρχει ἕνας ἀκόμη, εἰδικός, περιορισμός. Ἐπειδὴ αἱ περιοδικαὶ συναρτήσεις παρουσιάζουν συνήθως πολλὰ μέγιστα καὶ ἐλάχιστα, καὶ ἐπειδὴ πρὸς ὑπολογισμὸν τοῦ ἐμβαδοῦ μιᾶς ζώνης χρησιμοποιοῦνται αἱ τιμαὶ τῆς συναρτήσεως εἰς τὰ ἄκρα τῆς ζώνης καὶ εἰς τὰ ἄκρα τῶν γειτονικῶν πρὸς αὐτὴν ζωνῶν, δὲν πρέπει τὸ εὖρος Δx τῆς ζώνης νὰ εἶναι πολὺ μεγάλο, διότι τότε θὰ ἔχομεν πολλὰ μέγιστα καὶ ἐλάχιστα ἐντὸς τῆς αὐτῆς ζώνης, ἀλλὰ ἡ τιμὴ τοῦ ἐμβαδοῦ αὐτῆς θὰ ἐξαρτᾶται μόνον ἀπὸ τὰς τιμὰς τῆς συναρτήσεως εἰς τὰ ἄκρα τῆς ζώνης, ἐνῷ ἡ μορφὴ τῆς καμπύλης οὐδόλως θὰ λαμβάνεται ὑπ' ὄψιν εἰς τοὺς ὑπολογισμούς. Τοῦτο φαίνεται καὶ ἐκ τοῦ σχ. 5, ὅπου ἡ ὁλοκλήρωσις τῶν δύο συναρτήσεων $F_1(x)$ καὶ $F_2(x)$, ἐντὸς τοῦ διαστήματος ἀπὸ x_i ἕως $x_i + \Delta x$, δύναται νὰ ὁδηγήσῃ εἰς τὸ αὐτὸ ἀποτέλεσμα, ὡς συμβαίνει π.χ. εἰς τὴν ζώνην B, ἐνῷ αἱ πραγματικαὶ τιμαὶ αὐτῶν εἶναι προφανῶς διάφοροι.



Σχ. 5

Πρέπει, ἐπομένως, νὰ εἶναι τὸ Δx μικρόν, ὥστε ἐντὸς μιᾶς ζώνης νὰ περιλαμβάνεται ἓν μέρος μόνον τῆς περιόδου καὶ ἐντὸς τριῶν γειτονικῶν (συνεχομένων) ζωνῶν νὰ μὴ ὑπάρχουν περισσότερα τοῦ ἑνὸς σημεῖα καμπῆς.

Διὰ συναρτήσεις μὲ ημx ἢ συνx πρέπει νὰ εἶναι $\Delta x \leq 1$. Ἐὰν ἡ συνάρτησις περιέχῃ ὅρους μὲ ημ(kx) ἢ συν(kx) ἢ ημ(x^m) ἢ συν(x^m), τότε τὸ Δx πρέπει νὰ εἶναι ἀκόμη μικρότεον. Γενικῶς δέ, ὅταν ἔχωμεν τριγωνομετρικὴν παράστασιν μιᾶς συναρτήσεως τοῦ x, ημ[f(x)] ἢ συν[f(x)], τότε, ἡ μεγίστη τιμὴ τὴν ὁποίαν δύναται νὰ λάβῃ τὸ Δx, διὰ νὰ ἔχωμεν ἱκανοποιητικὰ ἀποτελέσματα, εἶναι:

$$\Delta x = \frac{1}{f'(x)} \qquad (24)$$

Κατόπιν τούτου, λαμβανομένης ὑπ' ὄψιν καὶ τῆς σχέσεως $\Delta x = (x_\beta - x_\alpha)/N$, ὁρίζομεν τὴν ἐλαχίστην ἐπιτρεπομένην τιμὴν τοῦ N ὡς ἑξῆς:
Ἔχομεν:

$$\Delta x = \frac{x_\beta - x_\alpha}{N} \quad \text{καὶ} \quad \Delta x \leqslant \frac{1}{f'(x)} \qquad (2),(25)$$

ἄρα:

$$\frac{x_\beta - x_\alpha}{N} \leqslant \frac{1}{f'(x)} \qquad (26)$$

καὶ

$$N \geqslant (x_\beta - x_\alpha)\, f'(x) \qquad (27)$$

5. ΠΕΡΙ ΤΗΣ ΤΙΜΗΣ ΤΟΥ ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΟΥ ρ

Ὅπως φαίνεται καὶ ἐκ τοῦ σχ. 3 (σελ. 379), τὸ ἐμβαδόν τ_1 εἶναι μικρότερον τοῦ ἡμίσεως τοῦ ἐμβαδοῦ ε_1 τοῦ τριγώνου KLW. Ἡ τιμὴ ὅμως τοῦ συντελεστοῦ ρ (βλ. ἐξ. (7) καὶ ἑξ.) διαφέρει τόσον ἀπὸ καμπύλης εἰς καμπύλην, ὅσον καὶ εἰς τὰς διαφόρους ζώνας τοῦ αὐτοῦ ὁλοκληρώματος. Συνεπῶς δὲν εἶναι δυνατὸν νὰ ὁρισθῇ, εἴτε δι' ἀναλυτικῆς εἴτε διὰ γεωμετρικῆς μεθόδου, ὡς σταθερά. Ἐπειδὴ ὅμως δὲν εἶναι δυνατὸν νὰ ὁρίζωμεν τὴν τιμὴν τοῦ ρ δι' ἑκάστην περίπτωσιν, δεχόμεθα ὅτι, ἐὰν εὕρωμεν δοκιμαστικῶς διὰ μίαν σειρὰν γνωστῶν ὁλοκληρωμάτων μὲ ποίαν τιμὴν τοῦ ρ ἐπιτυγχάνομεν τὴν μεγαλυτέραν προσέγγισιν τῆς πραγματικῆς τιμῆς ἑνὸς ἑκάστου, ἡ μέση τιμὴ τῶν ρ θὰ δίδει μὲ ἱκανοποιητικὴν προσέγγισιν τὴν τιμὴν παντὸς ὁλοκληρώματος.

Ἡ καλυτέρα τιμὴ τοῦ ρ εὑρέθη τῇ βοηθείᾳ τοῦ ἠλεκτρονικοῦ διερευνητοῦ. Ἡ ὡς ἄνω περιγραφομένη μέθοδος μετετράπη εἰς πρόγραμμα ἐντολῶν εἰς γλῶσσαν FORTRAN II * καὶ ἐζητήθη ὁ ὑπολογισμὸς γνωστῶν ὁλοκληρωμάτων, ἀφοῦ ἐδόθη εἰς τὸν συντελεστὴν ρ ἡ ἀρχικὴ τιμὴ $\rho = 0$. Τὸ πρόγραμμα περιλαμβάνει δύο κυρίως ὁμάδας ἐντολῶν:

α) ἐντολὰς διὰ τὸν ὑπολογισμὸν τῆς τιμῆς δοθέντος ὡρισμένου ὁλοκληρώματος, κατὰ τὴν ἀνωτέρω μέθοδον, καὶ

β) ἐντολὰς ὁδηγούσας εἰς τὴν εὕρεσιν τῆς καλυτέρας τιμῆς τοῦ ρ.

Ἡ εὑρισκομένη ἑκάστοτε τιμὴ τοῦ ὁλοκληρώματος συγκρίνεται πρὸς τὴν πραγματικὴν τιμήν, ἡ ὁποία εἶναι ἀπὸ τὰ δεδομένα τοῦ προγράμματος, καὶ ἐπαναλαμβάνεται ὁ ὑπολογισμὸς μὲ ρ ηὐξημένον κατὰ 0.1 κ.ο.κ., μέχρις ἐπιτεύξεως τῆς μεγαλυτέρας προσεγγίσεως πρὸς τὴν πραγματικὴν τιμήν. Κατόπιν γίνονται δοκιμαὶ μὲ ρ αὐξανόμενον ἀνὰ 0.01 καὶ συνεχίζεται ἡ ἀναζήτησις τῆς καλυτέρας τιμῆς τοῦ ρ μέχρι τοῦ πέμπτου δεκαδικοῦ ψηφίου.

Διὰ τὴν ταχυτέραν ἐκτέλεσιν περισσοτέρων ὑπολογισμῶν ἐδίδοντο, μὲ κατάλληλον τροποποίησιν τοῦ προγράμματος (βλ. πίνακα I**), τρεῖς συγχρόνως συναρτήσεις πρὸς ὁλοκλήρωσιν καὶ ὁ διερευνητὴς ἐπεξειργάζετο ἑκάστην συνάρτησιν κεχωρισμένως, χρησιμοποιῶν τὰ ἀντίστοιχα ὅρια ὁλοκληρώσεως καὶ τὴν πραγματικὴν τιμὴν τοῦ ὁλοκληρώματος.

Μὲ τὸ ἀνωτέρω πρόγραμμα ἐμελετήθησαν 12 ὡρισμένα ὁλοκληρώματα (βλ. πίνακα II), ἐξ αὐτῶν δὲ τὰ ὑπ' ἀριθ. 7, 8 καὶ 9 περιλαμβάνονται εἰς τὸ πρόγραμμα - παράδειγμα τοῦ πίνακος I. Εἰς τὸν πίνακα II δίδονται αἱ μελε-

* Πρὸς εὐκολωτέραν παρακολούθησιν τῶν προγραμμάτων εἰς γλῶσσαν FORTRAN, παραθέτομεν εἰς τὸ τέλος πίνακα ἀντ'στοιχίας τῶν χρησιμοποιουμένων μεταβλητῶν πρὸς τὰ συνήθη μαθηματικὰ σύμβολα (βλ. πίνακα XXI).

** Οἱ πίνακες εἰς σελ. 399 καὶ ἑξῆς.

τηθεῖσαι 12 συναρτήσεις μὲ τὰ ἀντίστοιχα ὅρια ὁλοκληρώσεως, καθὼς καὶ αἱ εὑρεθεῖσαι καλύτεραι τιμαὶ τοῦ ρ διὰ διάφορα N.

Ἐκ τῆς ἐρεύνης διὰ τὴν εὕρεσιν τῆς καλυτέρας τιμῆς τοῦ ρ προέκυψαν τὰ ἑξῆς συμπεράσματα:

α) Ἡ τιμὴ τοῦ ρ δὲν ἐξαρτᾶται μόνον ἀπὸ τὴν συνάρτησιν, ἀλλὰ καὶ ἀπὸ τὸ πλῆθος N τῶν ζωνῶν εἰς τὰς ὁποίας χωρίζεται τὸ πεδίον ὁλοκληρώσεως.

β) Ἐὰν ἀγνοήσωμεν τὰς δύο τιμὰς τοῦ ρ τῆς πρώτης καὶ τῆς τετάρτης συναρτήσεως διὰ N πολὺ μικρὸν ($N = 5$ ἢ 6), ἐπειδὴ ἀπέχουν πολὺ ἀπὸ τὸ σύνολον τῶν ὑπολοίπων τιμῶν, ἡ τιμὴ τοῦ ρ εἰς τὴν ὁποίαν καταλήγει τὸ πρόγραμμα, κυμαίνεται γενικῶς μεταξὺ 0.32816 καὶ 0.34802.

γ) Δι' αὐξανόμενον N ἡ τιμὴ τοῦ ρ τείνει πρὸς τὴν ὁρικὴν τιμήν:

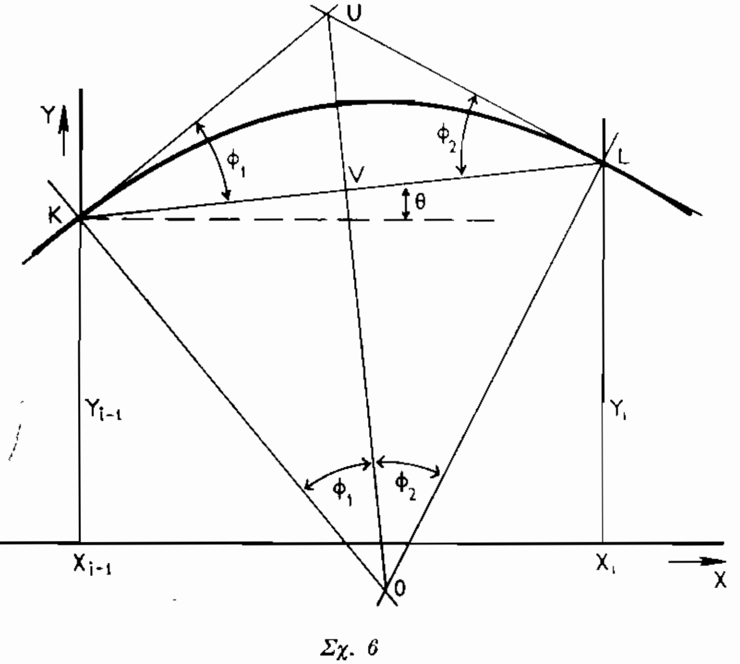
$$\rho = 0.33333...$$

Διὰ μικρὰς τιμὰς τοῦ N, εἰς τὰς περισσοτέρας περιπτώσεις, τὸ ρ εἶναι μεγαλύτερον τῆς ὁρικῆς αὐτοῦ τιμῆς.

6. ΜΕΘΟΔΟΣ Β′

Τὸ ἐμβαδὸν τ_i (βλ. σχ. 2, σελ. 378) ὑπολογίζεται καὶ ὡς ἑξῆς:

Εἰς τὸ σχ. 6 φέρομεν τὴν εὐθεῖαν KL καὶ τὰς ἐφαπτομένας τῆς συναρτήσεως $Y = F(x)$ εἰς τὰ σημεῖα K καὶ L. Σχηματίζεται οὕτω τὸ τρίγωνον



Σχ. 6

KLU. Αἱ παρὰ τὴν βάσιν γωνίαι φ_1 καὶ φ_2 εἶναι δυνατὸν νὰ εἶναι ἴσαι μεταξύ των ἢ ἄνισοι. Εἰς τὴν πρώτην περίπτωσιν ($\varphi_1 = \varphi_2$, τὸ τρίγωνον ἰσοσκελὲς) τὸ τμῆμα KL τῆς καμπύλης θὰ εἶναι τόξον κύκλου ἢ παραβολὴ συμμετρικὴ ὡς πρὸς τὴν μεσοκάθετον UV τοῦ τριγώνου KUL. Εἰς τὴν δευτέραν περίπτωσιν ($\varphi_1 = \varphi_2$) πρόκειται γενικῶς περὶ καμπύλης ἀσυμμέτρου.

Φέρομεν τὰς καθέτους ἐπὶ τὴν καμπύλην εἰς τὰ σημεῖα K καὶ L. Αὗται τέμνονται εἰς ἓν σημεῖον 0 (σχ. 6), σχηματίζουσαι μετὰ τοῦ εὐθυγράμμου τμήματος KL τὸ τρίγωνον KOL.

α) Ἐὰν τὸ τρίγωνον KLU εἶναι ἰσοσκελὲς ($\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi$) καὶ τὸ τμῆμα KL τῆς καμπύλης εἶναι τόξον κύκλου, τότε τὸ ἐμβαδὸν τ_i θὰ εἶναι ἡ διαφορὰ τῶν ἐμβαδῶν τοῦ κυκλικοῦ τομέως KOL καὶ τοῦ τριγώνου KOL.

Ἐκ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου KOV προκύπτει ὅτι:

$$\text{εφ}\,\varphi = \frac{KV}{2} = \frac{KL}{2VO} \quad \text{ἢ} \quad VO = \frac{KL}{2\,\text{εφ}\,\varphi} \qquad (28),(29)$$

καὶ

$$KV = \frac{KL}{2} = KO\,\text{ημ}\,\varphi \quad \text{ἢ} \quad KO = \frac{KL}{2\,\text{ημ}\,\varphi} \qquad (30),(31)$$

ὅπου

$$KL = \left[(Y_{i+1} - Y_i)^2 + (\Delta x)^2\right]^{1/2} \qquad (32)$$

Διὰ τὸν ὑπολογισμὸν τῆς γωνίας φ λαμβάνομεν τὴν παράγωγον Y′ τῆς συναρτήσεως εἰς τὸ σημεῖον $x = x_i$, ἡ ὁποία ἰσοῦται μὲ τὴν ἐφαπτομένην τῆς κλίσεως τῆς καμπύλης εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον, ἤτοι εἶναι:

$$Y' = \text{εφ}(\varphi + \theta) \qquad (33)$$

καὶ

$$\varphi = \text{τοξ εφ}\,Y' - \theta \qquad (34)$$

Ἡ γωνία θ εἶναι ἡ κλίσις τοῦ εὐθυγράμμου τμήματος KL ὡς πρὸς τὸν ὁριζόντιον ἄξονα τῶν x καὶ ὁρίζεται ἀπὸ τὴν σχέσιν:

$$\text{εφ}\,\theta = \frac{Y_{i+1} - Y_i}{\Delta x} \qquad (35)$$

Ἐκ τῆς ἐξ. (35) λαμβάνομεν τὴν τιμὴν τῆς γωνίας θ, τὴν ὁποίαν ἀντικαθιστῶμεν εἰς τὴν (34) καὶ ἔχομεν:

$$\varphi = \text{τοξ εφ}\,Y' - \text{τοξ εφ}\,\frac{Y_{i+1} - Y_i}{\Delta x} \qquad (36)$$

Τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου KOL εἶναι:

$$E_{\tau\rho} = \frac{KL \cdot VO}{2} \qquad (37)$$

Τὸ δὲ ἐμβαδὸν τοῦ κυκλικοῦ τομέως KOL εἶναι:

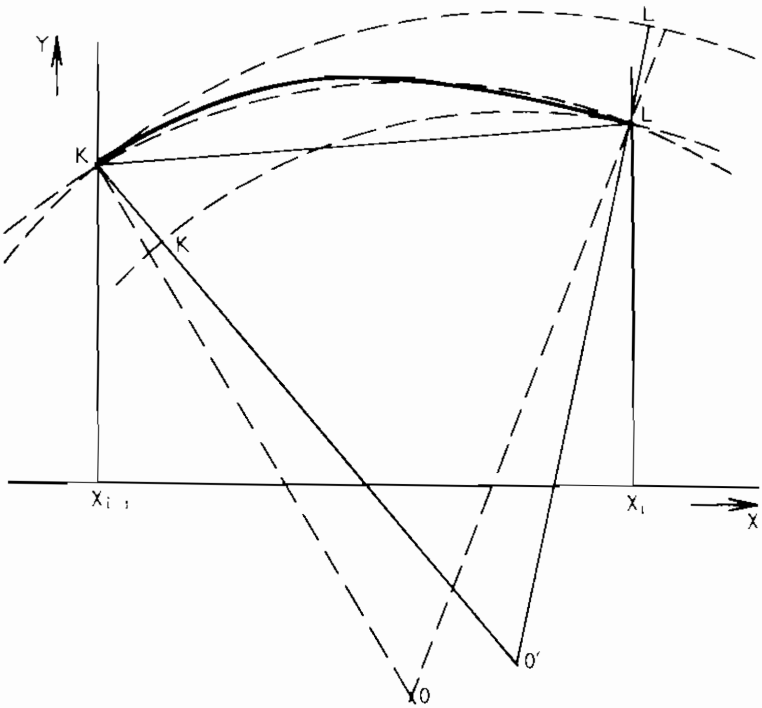
$$E_{\kappa\tau} = \frac{\pi\,(KO)^2 \cdot 2\varphi}{2\pi} = \varphi\,(KO)^2 \qquad (38)$$

Τὸ ζητούμενον ἐμβαδὸν τ εἶναι ἡ διαφορὰ τῶν $E_{\kappa\tau}$ καὶ $E_{\tau\rho}$, ἤτοι:

$$\tau = E_{\kappa\tau} - E_{\tau\rho} = \varphi\,(KO)^2 - \frac{KL \cdot VO}{2} \qquad (39)$$

Τελικῶς, διὰ συσχετίσεως τῆς ἐξ. (39) πρὸς τὰς (29), (31), (32) καὶ (36), λαμβάνομεν τὸ ἐμβαδὸν τ ὡς συνάρτησιν τῶν Y, Y' καὶ Δx.

β) Ἐὰν $\varphi_1 \neq \varphi_2$, τότε γενικῶς ἡ καμπύλη KL δὲν εἶναι τόξον κύκλου. Φέρομεν καὶ πάλιν τὰς καθέτους εἰς τὰ σημεῖα K καὶ L τῆς καμπύλης (σχ. 7) τεμνομένας εἰς τὸ σημεῖον O', καὶ σχηματίζομεν τοὺς κυκλικοὺς τομεῖς KO'L' καὶ K'O'L. Παρατηροῦμεν ὅτι τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τομέως KO'L, τὸ ὁποῖον θέλο-



Σχ. 7

μεν νὰ ὑπολογίσωμεν, εἶναι μικρότερον τοῦ ἐμβαδοῦ KO'L' καὶ μεγαλύτερον τοῦ K'O'L. Ἐπειδὴ αἱ διαφοραὶ αὐταὶ εἶναι μικραὶ ἐν σχέσει πρὸς τὸ ἐμβαδὸν τῶν τομέων, δυνάμεθα νὰ λάβωμεν:

$$E_{\kappa\tau} = \frac{E'_{\kappa\tau} + E''_{\kappa\tau}}{2} \tag{40}$$

ὅπου $E'_{\kappa\tau}$ καὶ $E''_{\kappa\tau}$ εἶναι τὰ ἐμβαδὰ τῶν κυκλικῶν τομέων K'O'L καὶ KO'L' ἀντιστοίχως, ἢ νὰ θεωρήσωμεν ὡς γωνίαν φ τὸν μέσον ὅρον τῶν φ_1 καὶ φ_2 καὶ νὰ ὑπολογίσωμεν τὸ $E_{\kappa\tau}$ βάσει τῶν τύπων (31) καὶ (38).

Ἡ γωνία φ_1, συμφώνως πρὸς τὰς σχέσεις (33) καὶ (34), θὰ εἶναι:

$$\varphi_1 = \text{τοξ εφ } Y'_i - \theta \tag{41}$$

Ἡ γωνία φ_2 ὑπολογίζεται ἀναλόγως πρὸς τὴν φ_1 ὡς ἑξῆς (βλ. σχ. 6):

$$Y'_{i+1} = \text{εφ}\left[(\pi - \varphi_2) + \theta\right] = \text{εφ}\,(\theta - \varphi_2) \tag{42}$$

καὶ

$$\varphi_2 = \theta - \text{τοξ εφ } Y'_{i+1} \tag{43}$$

Ὁ μέσος ὅρος τῶν φ_1 καὶ φ_2 θὰ εἶναι:

$$\varphi = \frac{1}{2}\,(\text{τοξ εφ } Y'_i - \text{τοξ εφ } Y'_{i+1}) \tag{44}$$

Τὴν τιμὴν ταύτην τῆς φ εἰσάγομεν καὶ πάλιν εἰς τὴν ἐξ. (39) καὶ ὑπολογίζομεν τὸ ἐμβαδὸν τ_i.

γ) Ἐὰν τὸ τρίγωνον KLU (σχ. 6) εἶναι ἰσοσκελές, ἀλλὰ ἡ καμπύλη KL δὲν εἶναι τόξον κύκλου, τότε αὕτη θὰ εἶναι παραβολὴ ἢ ἄλλης μορφῆς καμπύλη, συμμετρικὴ ὡς πρὸς τὴν εὐθεῖαν OU. Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν χωρίζομεν τὸ διάστημα ἀπὸ x_i ἕως x_{i+1} εἰς δύο ἴσα μέρη καὶ λαμβάνομεν δύο ἴσας ζώνας E_{i1} καὶ E_{i2}, πλάτους Δx/2 ἑκάστη. Ἔχομεν οὕτω δύο τμήματα τῆς καμπύλης KL, ἓν εἰς ἑκάστην ζώνην, μὴ συμμετρικὰ ὡς πρὸς τὸ μέσον αὐτῶν, καὶ ἐργαζόμεθα ὡς ἀνωτέρω (περίπτωσις β'). Ὑπολογίζομεν τὸ ἐμβαδὸν ἑκάστης ἡμιζώνης χωριστά, προσθέτομεν τὰ δύο ταῦτα ἐμβαδὰ καὶ λαμβάνομεν τὸ ὁλικὸν ἐμβαδὸν E_i τῆς ζώνης.

Ἀφοῦ ὑπολογίσωμεν τὰ ἐμβαδὰ ὅλων τῶν ζωνῶν, ἀθροίζομεν ταῦτα καὶ ἔχομεν τὴν τιμὴν τοῦ ὁλικοῦ ἐμβαδοῦ, τὸ ὁποῖον ἰσοῦται πρὸς τὴν ζητουμένην τιμὴν τοῦ ὡρισμένου ὁλοκληρώματος (ἐξ. (4), σελ. 378).

7. ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

α) Ἐὰν ἡ συνάρτησις εἶναι γραμμική, τότε βεβαίως τὰ ἐμβαδὰ τ_i δὲν ὑπάρχουν καὶ ὁ ὑπολογισμὸς τοῦ ὁλοκληρώματος εἶναι ἁπλοῦς (ὑπολογισμὸς ἐμβαδοῦ τραπεζίου). Ἀλλὰ καὶ εἰς τὴν περίπτωσιν κατὰ τὴν ὁποίαν ἡ καμπύλη τείνει πρὸς τὴν εὐθεῖαν ἐντὸς μιᾶς ζώνης, τότε αἱ γωνίαι φ_1 καὶ φ_2 τείνουν πρὸς τὸ μηδὲν καὶ περιττεύει πᾶσα περαιτέρω προσπάθεια ὑπολογισμοῦ τοῦ τ_1, ἐπειδὴ καὶ τοῦτο μηδενίζεται.

β) Ἐὰν ἡ συνάρτησις λαμβάνῃ τιμὴν ἄπειρον ἐντὸς τῆς περιοχῆς ὁλοκληρώσεως, τὸ ὁλοκλήρωμα εἶναι ἄπειρον. Ἐὰν ὅμως ἡ συνάρτησις γίνεται ἄπειρος ἐκτὸς τῆς περιοχῆς ὁλοκληρώσεως, οὐδεὶς περιορισμὸς ὑπάρχει. (πρβλ. § 4.β).

γ) Διὰ τὰς τριγωνομετρικὰς συναρτήσεις ἰσχύουν οἱ αὐτοὶ περιορισμοί, ὡς πρὸς τὸ πλάτος τῶν ζωνῶν καὶ τὴν τιμὴν τοῦ N, ὅπως καὶ εἰς τὴν μέθοδον Α′ (βλ. § 4.γ).

8. ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΔΙΑ ΤΟΥ ΗΛΕΚΤΡΟΝΙΚΟΥ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΟΥ

Ὁ ἠλεκτρονικὸς ὑπολογιστὴς δύναται νὰ χρησιμοποιηθῇ διὰ τὸν ταχὺν καὶ εὔκολον ὑπολογισμὸν τῆς ἀριθμητικῆς τιμῆς ὡρισμένου ὁλοκληρώματος διά τινος τῶν γνωστῶν μεθόδων. Αἱ προτεινόμεναι δύο νέαι μέθοδοι εἶναι λίαν κατάλληλοι διὰ τὴν δι' ἠλεκτρονικοῦ ὑπολογιστοῦ ἀριθμητικὴν ὁλοκλήρωσιν. Κατωτέρω δίδομεν περιγραφὴν τῶν σχετικῶν προγραμμάτων, ὡς καὶ τὰ ἀποτελέσματα τῆς δοκιμαστικῆς ἐφαρμογῆς των εἰς 15 γνωστὰ ὁλοκληρώματα.

9. ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΤΗΣ ΜΕΘΟΔΟΥ Α′

Πρὸς ἐφαρμογὴν τῆς α′ μεθόδου, ἐπρογραμματίσθη κατ' ἀρχὴν ἡ πορεία τῆς ἐργασίας καὶ ἔγινε τὸ «διάγραμμα ροῆς» (flow chart) τοῦ πίνακος III. Ἐπὶ τῇ βάσει τοῦ διαγράμματος τούτου, ἐγράφησαν εἰς γλῶσσαν FORTRAN II αἱ ἐντολαὶ τοῦ προγράμματος, τὸ ὁποῖον δίδομεν ὡς παράδειγμα εἰς τὸν πίνακα IV.

Διὰ τοῦ προγράμματος τούτου γίνεται ἐφαρμογὴ τοῦ τύπου (14) καὶ δίδονται αἱ ἀπαραίτητοι ἐντολαὶ διὰ τὴν ἐκτέλεσιν τῶν πράξεων, ἀφοῦ πρῶτον ὁρίζονται, ἢ δίδονται εἰς τὸ πρόγραμμα ὡς DATA διὰ τῆς ἐντολῆς READ, αἱ τιμαὶ ὡρισμένων μεταβλητῶν.

Κατ' ἀρχὴν δίδονται τὰ ὅρια ὁλοκληρώσεως, καθὼς καὶ τὸ πλῆθος N τῶν ζωνῶν, εἰς τὰς ὁποίας θέλομεν νὰ χωρισθῇ τὸ διάστημα ὁλοκληρώσεως. Ἐκ τοῦ ἀριθμοῦ N καὶ τῶν ὁρίων ὁλοκληρώσεως ὑπολογίζεται τὸ πλᾶτος DX ἑκάστης ζώνης. Κατόπιν ὑπολογίζονται αἱ τιμαὶ τῆς συναρτήσεως Υ διὰ τὰς διαφόρους τιμὰς τῆς x εἰς τὰ ὅρια μεταξὺ τῶν διαφόρων ζωνῶν.

Ἐν συνεχείᾳ ὑπολογίζονται τὰ ἐμβαδὰ τῶν ζωνῶν καὶ ἀθροίζονται, τὸ ἄθροισμα δὲ τοῦτο εἶναι ἡ ζητουμένη ἀριθμητικὴ τιμὴ τοῦ ὁλοκληρώματος, τὴν ὁποίαν ἡ μηχανή, εἰς ἐκτέλεσιν σχετικῆς ἐντολῆς (PRINT), ἐκτυπώνει ὁμοῦ μετὰ τῶν ἀρχικῶν τιμῶν (XA, XB, N) ἐκ τῶν ὁποίων προέκυψεν αὕτη.

Ἐπειδὴ ἐνδέχεται νὰ ζητήσωμεν ἐπανάληψιν τοῦ ὑπολογισμοῦ ὁλοκληρώσεως τῆς αὐτῆς συναρτήσεως μὲ μεγαλύτερον ἀριθμὸν N πρὸς ἐπίτευξιν μεγαλυτέρας ἀκριβείας, ἢ διὰ νὰ ὑπολογίσωμεν τὴ τιμὴν τοῦ ὁλοκληρώματος ἐντὸς νέων ὁρίων τῆς x, δίδομεν εἰς τὸ τέλος τὴν ἐντολὴν GO TO 110, διὰ τῆς ὁποίας ὁ ὑπολογιστὴς ἐπανέρχεται εἰς τὴν ἀρχὴν τοῦ προγράμματος καὶ ἐκτελεῖ τοῦτο μὲ νέα δεδομένα (DATA). Διὰ $N=0$ τὸ πρόγραμμα ὁδηγεῖται κατ' εὐθεῖαν εἰς τὴν ἐντολὴν STOP.

Ἐπειδὴ κατὰ τὴν ἐκτέλεσιν τοῦ προγράμματος εἶναι δυνατὸν νὰ συναντήσωμεν ζώνας, εἰς τὰς ὁποίας τὸ ἐμβαδὸν τ_i ἰσοῦται ἢ τείνει πρὸς τὸ μηδέν, γίνεται πρόβλεψις ὥστε εἰς τὰς περιπτώσεις αὐτὰς νὰ μηδενίζεται ὁ τρίτος ὅρος τοῦ ἀθροίσματος τοῦ τύπου (14). Συγκεκριμμένως, αἱ β καὶ B (εἰς τὸ πρόγραμμα BA καὶ BB) εἶναι δυνατὸν νὰ λάβουν τιμὰς θετικὰς ἢ ἀρνητικὰς ἢ μηδέν. Οἱ δυνατοὶ συνδυασμοὶ αὐτῶν καὶ τὰ προκύπτοντα γινόμενα δίδονται ἀπὸ τὸν πίνακα V.

Αἱ περιπτώσεις 1-4 τοῦ πίνακος V δίδουν συγκεκριμμένην τιμὴν τοῦ πηλίκου $\beta\cdot B/(\beta+B)$, καὶ ἡ τιμὴ αὐτὴ πρέπει νὰ ληφθῇ ὑπ' ὄψιν διὰ τὸν ὀρθὸν ὑπολογισμὸν τοῦ ἐμβαδοῦ τῆς ζώνης. Εἰς τὰς περιπτώσεις 5-8, ὅπου εἷς ἐκ τῶν παραγόντων τοῦ ἀριθμητοῦ εἶναι μηδέν, ὁλόκληρον τὸ κλάσμα μηδενίζεται. Εἰς τὰς περιπτώσεις 9-12, ὅπου τὰ β καὶ B εἶναι ἑτερόσημα, πρέπει, συμφώνως πρὸς τὰ ἀνωτέρω (σελ. 382), νὰ μηδενισθῇ τὸ κλάσμα.

Παρατηροῦμεν ὅτι τὸ γινόμενον $\beta\cdot B$ εἶναι θετικόν, ὅταν πρέπει νὰ διατηρηθῇ τὸ κλάσμα καὶ νὰ γίνῃ ὁ ὑπολογισμὸς τοῦ ἐμβαδοῦ τ_i, ἐνῶ ἐκεῖ ὅπου τὸ κλάσμα μηδενίζεται ἢ πρέπει νὰ μηδενισθῇ, τὸ γινόμενον $\beta\cdot B$ εἶναι μηδὲν ἢ ἀρνητικόν. Ἑπομένως ἡ τιμὴ τοῦ γινομένου τούτου ἀποτελεῖ κριτήριον, τὸ ὁποῖον χρησιμοποιοῦμεν μὲ μίαν ἐντολὴν ἐλέγχου εἰς κατάλληλον θέσιν τοῦ προγράμματος, καὶ ἀναλόγως τῆς τιμῆς τοῦ $\beta\cdot B$, τὸ πρόγραμμα ὑπολογίζει ἢ ἀγνοεῖ τὸν τρίτον ὅρον τοῦ ἀθροίσματος (14).

Διὰ νὰ χρησιμοποιήσωμεν τὸ πρόγραμμα πρὸς ὑπολογισμὸν καὶ ἄλλου ὁλοκληρώματος, ἀρκεῖ νὰ ἀντικαταστήσωμεν τὸ δελτίον, διὰ τοῦ ὁποίου δίδομεν τὴν συνάρτησιν, καὶ νὰ δώσωμεν τὰ κατάλληλα DATA.

10. ΑΝΑΖΗΤΗΣΙΣ ΤΗΣ ΚΑΛΥΤΕΡΑΣ ΤΙΜΗΣ ΤΟΥ ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΟΥ ρ.

Τὸ πρόγραμμα τοῦ πίνακος I, διὰ τοῦ ὁποίου ἀνεζητήθη ἡ καλυτέρα τιμὴ τοῦ συντελεστοῦ ρ, εἶναι τὸ τοῦ πίνακος IV τροποποιημένον εἰς δύο σημεῖα, ἤτοι: α) ἀντὶ μιᾶς συναρτήσεως δίδονται τρεῖς καὶ καθορίζεται ὁ τρόπος ἐπιλογῆς καὶ ὑπολογισμοῦ μιᾶς ἑκάστης μετὰ τῶν ἀντιστοίχων δεδομένων (DATA) καὶ β) ὡς τιμὴ τοῦ συντελεστοῦ ρ δίδεται ἀρχικῶς ἡ $\rho=0$ καὶ παρέχεται διὰ τῶν καταλλήλων ἐντολῶν ἡ δυνατότης ἀναζητήσεως τῆς καλυτέρας τιμῆς αὐτοῦ (μὲ προσέγγισιν πέμπτου δεκαδικοῦ), διὰ συγκρίσεως τῆς εὑρισκομένης ἑκάστοτε τιμῆς τοῦ ὁλοκληρώματος πρὸς τὴν πραγματικὴν τοιαύτην, καὶ ἐπαναλήψεως τῶν ὑπολογισμῶν μὲ ἄλλην τιμὴν τοῦ ρ, μέχρις ἐπιτεύξεως τῆς μεγαλυτέρας προσεγγίσεως.

Κατόπιν τῆς γενομένης ἐρεύνης, τὰ ἀποτελέσματα τῆς ὁποίας ἐκτίθενται εἰς τὸν πίνακα II, καὶ τῶν συμπερασμάτων, τὰ ὁποῖα ἀναφέρονται εἰς τὴν σελίδα 386, ἐδόθη εἰς τὸν συντελεστὴν ρ τοῦ κανονικοῦ προγράμματος (πίναξ IV) ἡ σταθερὰ τιμὴ $\rho = 1/3$. Διὰ τοῦ προγράμματος αὐτοῦ, τὸ ὁποῖον δύναται νὰ χρησιμοποιηθῇ διὰ τὸν ὑπολογισμὸν οἱουδήποτε ὡρισμένου ὁλοκληρώματος, ὑπελογίσθησαν δοκιμαστικῶς αἱ αὐταὶ ὡς ἄνω γνωσταὶ συναρτήσεις καὶ ἐλήφθησαν τὰ ἀποτελέσματα τοῦ πίνακος VI. Εἰς τὸν πίνακα τοῦτον παραθέτομεν καὶ τὰ ἀποτελέσματα ὑπολογισμοῦ τῶν αὐτῶν ὁλοκληρωμάτων δι' ἄλλων μεθόδων, πρὸς σύγκρισιν καὶ ἐκτίμησιν τῆς ἀκριβείας τῆς ἡμετέρας μεθόδου.

11. ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΤΗΣ ΜΕΘΟΔΟΥ Β'

Τὸ διάγραμμα ροῆς τῆς μεθόδου Β' δίδεται εἰς τὸν πίνακα VII. Εἰς τοῦτο φαίνεται ἡ πορεία τῶν ὑπολογισμῶν, καθὼς καὶ ὁ τρόπος μὲ τὸν ὁποῖον ὁ διερευνητὴς ἐξετάζει τὰς διαφόρους περιπτώσεις καὶ ἀποφασίζει ποίαν σειρὰν πρέπει νὰ ἀκολουθήσῃ (π.χ. ἐὰν εἶναι $\varphi_1 = \varphi_2$, ἢ $\varphi_1 \neq \varphi_2$, περὶ ὧν βλ. σελ. 387 καὶ 388).

Τὸ ἀντίστοιχον πρόγραμμα εἰς γλῶσσαν FORTRAN II, διὰ τοῦ ὁποίου δύναται νὰ γίνῃ ὁ ἀριθμητικὸς ὑπολογισμὸς οἱουδήποτε ὁλοκληρώματος, ἀρκεῖ νὰ εἶναι γνωστή, πλὴν τῆς συναρτήσεως, καὶ ἡ πρώτη παράγωγος αὐτῆς, δίδεται εἰς τὸν πίνακα VIII.

Ὑπελογίσθησαν 15 γνωστὰ ὁλοκληρώματα, πρὸς ἔλεγχον τῆς ἀκριβείας τῆς μεθόδου, τὰ δὲ ληφθέντα ἀποτελέσματα δίδονται εἰς τὸν πίνακα IX, εἰς τὸν ὁποῖον παρατίθενται πρὸς σύγκρισιν καὶ τὰ ἀποτελέσματα ὑπολογισμοῦ τῶν αὐτῶν ὁλοκληρωμάτων, τόσον διὰ τῆς ἡμετέρας μεθόδου Α', ὅσον καὶ διὰ τῆς μεθόδου Simpson.

12. ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΑ ΠΡΟΣ ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΙΝ ΠΕΡΙΣΣΟΤΕΡΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

Ὅταν ἔχωμεν νὰ ὑπολογίσωμεν περισσότερα ὁλοκληρώματα, πρὸς ἐξοικονόμησιν χρόνου, δυνάμεθα νὰ τροποποιήσωμεν τὸ πρόγραμμα, ὥστε νὰ λαμβάνῃ τὴν μίαν μετὰ τὴν ἄλλην τὰς συναρτήσεις καὶ νὰ τὰς ὁλοκληρώνῃ ἐντὸς τῶν ἀντιστοίχων ὁρίων, τὰ ὁποῖα τοῦ δίδομεν ὡς DATA.

Ἓν τοιοῦτον πρόγραμμα εἶναι π.χ. τὸ τοῦ πίνακος X. Τὸ πρόγραμμα τοῦτο δύναται νὰ ἐκτελέσῃ ἀριθμητικὴν ὁλοκλήρωσιν τριῶν συναρτήσεων, ἀρκεῖ νὰ διαφέρουν τὰ κατώτερα ὅρια ὁλοκληρώσεως (XA) αὐτῶν, ὥστε νὰ δύναται τὸ πρόγραμμα νὰ ἐκλέγῃ ἑκάστοτε τὴν συνάρτησιν, ἡ ὁποία ἀντιστοιχεῖ εἰς τὰ διδόμενα ὅρια ὁλοκληρώσεως, διὰ μιᾶς ἐντολῆς ἐλέγχου (IF), ἡ ὁποία τίθεται εἰς τὸ πρόγραμμα ἀμέσως μετὰ τὴν ἐντολὴν εἰσόδου τοῦ XA.

Κατ' ἄλλην τροποποίησιν τοῦ προγράμματος, δυνάμεθα νὰ δίδωμεν πρὸς ὁλοκλήρωσιν περισσοτέρας συναρτήσεις, ἄνευ περιορισμοῦ ὡς πρὸς τὸ πλῆθος. Ἡ ἐπιλογὴ τῶν συναρτήσεων γίνεται διὰ μιᾶς ἐντολῆς GO TO (computed). Ἕν τοιοῦτον πρόγραμμα δίδεται ὡς παράδειγμα εἰς τὸν πίνακα XI. Τὸ πρόγραμμα τοῦτο, ὡς ἔχει, δύναται νὰ ὑπολογίζῃ μέχρι 12 ὁλοκληρώματα, ἀρκεῖ νὰ τοποθετηθοῦν τὰ δελτία μὲ τὰς συναρτήσεις εἰς τὰς καταλλήλους θέσεις καὶ νὰ δοθοῦν, ὁμοῦ μετὰ τῶν ὁρίων ὁλοκληρώσεως (ὡς ὁρίζει ἡ ἐντολὴ 204 FORMAT), οἱ ἀντίστοιχοι ἀριθμοὶ NFUN τῶν θέσεων, εἰς τὰς ὁποίας εὑρίσκονται αἱ συναρτήσεις ἐντὸς τοῦ προγράμματος.

Διὰ περισσοτέρας συναρτήσεις, ὡς εἶναι εὐνόητον, θὰ πρέπει νὰ προστεθοῦν καὶ ἄλλοι ἀριθμοὶ εἰς τὴν παρένθεσιν τῆς ἐτολῆς GO TO (...) καὶ νὰ τοποθετηθοῦν αἱ συναρτήσεις, μὲ τὴν αὐτὴν τάξιν, μετὰ τὴν ὑπ' ἀριθ. 12 καὶ αἱ παράγωγοι αὐτῶν μετὰ τὴν ὑπ' ἀριθ. 112 ἐντολήν. Ἀναλόγως δύναται νὰ τροποποιηθῇ καὶ τὸ πρόγραμμα ὁλοκληρώσεως, τὸ ὁποῖον χρησιμοποιεῖ τὸν τύπον τῆς α' μεθόδου (πίναξ IV).

Εἰς τὸ πρόγραμμα τοῦ πίνακος XI ἔχει γίνει μία ἀκόμη τροποποίησις. Δὲν ὁρίζεται πλέον ὁ ἀριθμὸς N τῶν ζωνῶν, διὰ τοῦ ὁποίου θέλομεν νὰ διαιρεθῇ ἡ περιοχὴ ὁλοκληρώσεως, ἀλλὰ καθορίζεται ἡ προσέγγισις, μὲ τὴν ὁποίαν ζητεῖται τὸ τελικὸν ἀποτέλεσμα. Ἐπειδὴ δέ, διὰ μεγαλύτερον N ἐπιτυγχάνεται μεγαλυτέρα προσέγγισις τῆς πραγματικῆς τιμῆς, ἐπαναλαμβάνεται ἡ ὁλοκλήρωσις τῆς αὐτῆς συναρτήσεως μὲ διαρκῶς αὐξανόμενον N, μέχρις ὅτου τὸ εὑρισκόμενον ἀποτέλεσμα δὲν μεταβάλλεται περισσότερον τοῦ τεθέντος ὁρίου προσεγγίσεως. Τότε ὁ ὑπολογιστὴς ἐγκαταλείπει τὴν ὁλοκληρωθεῖσαν συνάρτησιν καὶ λαμβάνει νέα δεδομένα (DATA), διὰ τῶν ὁποίων ἐκλέγει ἄλλην συνάρτησιν, καὶ συνεχίζει ὡς ἀνωτέρω.

Διὰ KFUN=0 τὸ πρόγραμμα ὁδηγεῖται κατ' εὐθεῖαν εἰς τὴν ἐντολὴν STOP.

13. ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΙΣ ΑΠΟ ΜΙΑΣ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΗΣ ΤΙΜΗΣ ΜΕΧΡΙΣ ΑΠΕΙΡΟΥ

Αἱ περιγραφεῖσαι μέθοδοι Α' καὶ Β' δύνανται νὰ χρησιμοποιηθοῦν καὶ πρὸς ὑπολογισμὸν ὡρισμένων ὁλοκληρωμάτων ἀπὸ μιᾶς πεπερασμένης τιμῆς x_1 τῆς ἀνεξαρτήτου μεταβλητῆς x μέχρι τοῦ ἀπείρου.

Πρὸς ὑπολογισμὸν ἑνὸς τοιούτου ὁλοκληρώματος, χωρίζομεν τὸ πεδίον εἰς τμήματα καὶ ὑπολογίζομεν τὰ ἐμβαδὰ τῶν τμημάτων τούτων δι' ἐφαρμογῆς μιᾶς ἐκ τῶν ἀνωτέρω μεθόδων. Τὰ εὑρισκόμενα ἐμβαδὰ ἀθροίζομεν, καὶ ἔχομεν τὴν ζητουμένην τιμὴν τοῦ ὁλοκληρώματος.

Τὸ πλάτος τῶν τμημάτων τοῦ ὁλοκληρώματος δὲν πρέπει νὰ εἶναι σταθερόν, διότι τότε θὰ ἦτο πρακτικῶς ἀδύνατον νὰ φθάσωμεν μέχρι τοῦ ἀπείρου, ὁσονδήποτε μεγάλο καὶ ἂν ἦτο τὸ πλῆθος αὐτῶν. Διὰ τοῦτο λαμβάνομεν ἕν ἀρχικὸν τμῆμα μικροῦ πλάτους, ἐκτεινόμενον ἀπὸ τοῦ κατωτέρου ὁρίου ὁλοκληρώσεως μέχρι καὶ τοῦ δεκαπλασίου αὐτοῦ, εἰς δὲ τὸ ἑπόμενον τμῆμα, τὸ ὁποῖον ἀρχίζει ἀπὸ τοῦ τέλους τοῦ πρώτου, δίδομεν πλάτος δεκαπλάσιον, ἤτοι ορίζομεν τὰ x_α καὶ x_β τοῦ δευτέρου τμήματος δεκαπλάσια τῶν ἀντιστοίχων τοῦ πρώτου. Τὸ τρῖτον τμῆμα θὰ ἔχει πλάτος δεκαπλάσιον τοῦ δευτέρου κ.ο.κ. Θὰ εἶναι δηλαδή:

$$S = \int_{x_I}^{\infty} F(x)dx = \int_{x_I}^{10\,x_I} F(x)dx + \int_{10\,x_I}^{100\,x_I} F(x)dx + \ldots.. \qquad (45)$$

καὶ

$$S = \sum_{\varkappa=0}^{\infty} \int_{10^{\varkappa}\,x_I}^{10^{\varkappa+1}\,x_I} F(x)dx \qquad (\varkappa = 0, 1, 2, 3, \ldots.) \qquad (46)$$

Τὸ ἄθροισμα τῶν ἐμβαδῶν τούτων θὰ τείνει πρὸς τὸ ἄπειρον ἢ πρὸς μίαν πεπερασμένην τιμήν. Καὶ ἐὰν μὲν τείνῃ πρὸς τὸ ἄπειρον, δὲν χρειάζεται ὑπολογισμὸς καὶ δυνάμεθα δι' ἄλλου τρόπου νὰ τὸ πληροφορηθῶμεν. Ἐὰν ὅμως τὸ ὁλικὸν ἐμβαδὸν τείνῃ πρὸς ἄλλην τιμήν, τὴν ὁποίαν θέλομεν νὰ προσδιορίσωμεν, ἀρκεῖ συνήθως ὁ ὑπολογισμὸς ὀλίγων μόνον τμημάτων, ὡς ταῦτα ὁρίσθησαν ἀνωτέρω, ἐπειδή, δι' αὐξανομένας τιμὰς τοῦ x, τὰ μερικὰ ἐμβαδὰ ἐλαττοῦνται ταχέως, αἱ δὲ προκύπτουσαι ἐξ αὐτῶν τιμαὶ εἶναι μικρότεραι τῆςἀκριβείας μὲ τὴν ὁποίαν θέλομεν νὰ ὁρίσωμεν τὴν τιμὴν τοῦ ὁλοκληρώματος (τοῦτο φαίνεται εἰς τὸ παρατιθέμενον παράδειγμα, εἰς τὸν πίνακα XII).

Ἐὰν τὸ κατώτερον ὅριον ὁλοκληρώσεως εἶναι μηδέν, δὲν δυνάμεθα νὰ χωρίσωμεν τὸ πεδίον κατὰ τὸν ἀνωτέρω τρόπον, ἀρχίζοντες ἀπὸ τὸ μηδέν, διότι, καὶ ἐὰν ἀκόμη ὁρίσωμεν αὐθαιρέτως τὸ πλάτος τοῦ πρώτου τμήματος (0 ἕως x_β), τὸ κατώτερον ὅριον ὁλοκληρώσεως τοῦ δευτέρου τμήματος θὰ εἶναι, ὡς δεκαπλάσιον τοῦ μηδενός, μηδέν. Ὁμοίως τοῦ τρίτου καὶ ὅλων τῶν ἄλλων τμημάτων. Ἑπομένως ὅλα τὰ τμήματα θὰ ἀρχίζουν ἐκ τοῦ μηδενὸς καὶ δὲν θὰ δυνάμεθα νὰ τὰ ἀθροίσωμεν διὰ νὰ λάβωμεν τὸ ζητούμενον ὁλοκλήρωμα. Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν χωρίζομεν τὸ ὁλοκλήρωμα εἰς δύο μέρη.

$$S = \int_0^{\infty} F(x)dx = \int_0^{1} F(x)dx + \int_1^{\infty} F(x)dx \qquad (47)$$

῾Υπολογίζομεν κατ᾽ ἀρχήν, συμφώνως πρὸς τὰ ἀνωτέρω, τὸ ὁλοκλήρωμα ἀπὸ 1 ἕως ∞ καὶ ἐν συνεχείᾳ ἀπὸ 0 ἕως 1 ὡς ἑξῆς: χωρίζομεν τὸ πεδίον ὁλοκληρώσεως εἰς τμήματα κατὰ τρόπον ἀντίστροφον ἐκείνου μὲ τὸν ὁποῖον ἐχωρήσαμεν τὸ πεδίον ἀπὸ 1 ἕως∞. Τὸ πρῶτον τμῆμα θὰ ἐκτείνεται τώρα ἀπὸ 0.1 μέχρι 1, τὸ δεύτρον ἀπὸ 0.01 μέχρι 0.1, τὸ τρῖτον ἀπὸ 0.001 μέχρι 0.01 κ.ο.κ. Ἐκ τῶν τμημάτων τούτων θὰ λάβωμεν πάλιν μόνον ἐκεῖνα, τῶν ὁποίων ἡ τιμὴ δύναται νὰ μεταβάλῃ τὸ τελικὸν ἀποτέλεσμα ἐντὸς τῆς ἀπαιτουμένης προσεγγίσεως (βλ. παράδειγμα πίνακος XIII). Τὸ ἄθροισμα τῶν ληφθέντων ἐμβαδῶν εἶναι ἡ ζητουμένη τιμὴ τοῦ ὁλοκληρώματος ἀπὸ 0 μέχρι ∞.

Εἰς τὴν περίπτωσιν τριγωνομετρικῶν συναρτήσεων (ὁλοκλήρωσις ἀπὸ x_I ἕως ∞), ὁ χωρισμὸς τοῦ πεδίου ὁλοκληρώσεως δὲν δύναται νὰ γίνῃ ὅπως ἐξετέθη ἀνωτέρω, διότι ἐντὸς τοῦ διαρκῶς αὐξανομένου πλάτους τῶν ζωνῶν θὰ περιέχονται πολλὰ κύματα καὶ ἡ ὁλοκλήρωσις, συμφώνως πρὸς τὴν παρατήρησιν γ τῆς § 4, δὲν δύναται νὰ γίνῃ.

Διὰ τοῦτο ἀφίνομεν τὸ πλάτος x_α-x_β σταθερόν, δίδομεν δὲ εἰς τὸ N τὴν κατάλληλον τιμήν, ὥστε τὸ Δx νὰ εἶναι μικρότερον τῆς μεγίστης ἐπιτρεπομένης τιμῆς, ὡς αὕτη ὡρίσθη εἰς τὴν παρατήρησιν γ τῆς § 4.

Ἐὰν ἡ ὁλοκλήρωσις ἀρχίζῃ ἀπὸ τὸ 0, χωρίζομεν πάλιν τὸ πεδίον εἰς δύο μέρη. Τὸ δεύτερον ὑπολογίζεται διὰ τῆς προαναφερθείσης μεθόδου τῶν τμημάτων ἴσου πλάτους, ἐνῶ τὸ πρῶτον ὁλοκλήρωμα ὑπολογίζεται ὅπως καὶ διὰ τὰς λοιπὰς συναρτήσεις.

14. ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΔΙΑ ΤΟΥ ΗΛΕΚΤΡΟΝΙΚΟΥ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΟΥ

Διὰ τὸν ὑπολογισμὸν ὁλοκληρωμάτων ἀπὸ μιᾶς τιμῆς x_I μέχρι τοῦ ἀπείρου, διὰ τοῦ ἠλεκτρονικοῦ ὑπολογιστοῦ, ἐγράφησαν τὰ προγράμματα τῶν πινάκων XII (μὲ βάσιν τὴν μέθοδον Α′) καὶ XIII (μὲ βάσιν τὴν μέθοδον Β′). Εἰς τὰ προγράμματα ταῦτα δίδεται ἡ ἀρχικὴ τιμὴ XI τῆς ἀνεξαρτήτου μεταβλητῆς (κατώτερον ὅριον ὁλοκληρώσεως), ὁ ἀριθμὸς N, δηλ. τὸ πλῆθος τῶν ζωνῶν, εἰς τὰς ὁποίας θέλομεν νὰ χωρίζεται ἕκαστον ὁλοκλήρωμα, καὶ διὰ καταλλήλων ἐντολῶν ὁρίζεται ὁ τρόπος μὲ τὸν ὁποῖον λαμβάνεται ἑκάστοτε ἓν τμῆμα τοῦ πεδίου ὁλοκληρώσεως καὶ γίνονται οἱ ὑπολογισμοί. Τὰ εὑρισκόμενα μερικὰ ὁλοκληρώματα ἀθροίζονται καὶ δίδουν τὸ τελικὸν ἀποτέλεσμα.

Ἡ ἐκτέλεσις τοῦ προγράμματος διακόπτεται ὅταν, διὰ προσθέσεως νέων τιμῶν εἰς τὸ ἤδη εὑρεθὲν ἀποτέλεσμα, δὲν μεταβάλλεται τοῦτο, τουλάχιστον ἐντὸς τοῦ ὁρίου προσεγγίσεως, τὸ ὁποῖον ἔχομεν θέσει εἰς τὸ πρόγραμμα ὑπὸ μορφὴν μιᾶς ἐντολῆς ἐλέγχου.

Διὰ τὴν περίπτωσιν τῆς ὁλοκληρώσεως ἀπὸ 0 ἕως ∞ δίδεται εἰς τὸ πρόγραμμα μία σειρὰ ἐντολῶν, διὰ τῶν ὁποίων ὁ ὑπολογιστής, χωρίζει τὸ πεδίον ὁλοκληρώσεως εἰς δύο μέρη, 0 ἕως 1 καὶ 1 ἕως ∞ , καὶ ἀφοῦ ἐκτελέσῃ πρῶτον τὴν ὁλοκλήρωσιν τῆς περιοχῆς ἄνω τῆς μονάδος, ἐπανέρχεται εἰς τὸ 1 καὶ ὁλοκληρώνει ἐν συνεχείᾳ τὴν περιοχὴν κάτω τῆς μονάδος. Διὰ μιᾶς ἐντολῆς ἐλέγχου, ἀναλόγως τῆς τιμῆς τοῦ κατωτέρου ὁρίου ὁλοκληρώματος x_I, ἀποφασίζει ἂν θὰ ἐκτελέσῃ ὁλόκληρον τὸ πρόγραμμα (1 ἕως ∞ καὶ κατόπιν 0 ἕως 1), ἢ θὰ ὁλοκληρώσῃ μόνον ἀπὸ x_I ἕως ∞ καὶ θὰ σταματήσῃ.

Τὰ ἀνωτέρω προγράμματα εἶναι κατάλληλα διὰ τὴν ὁλοκλήρωσιν συναρτήσεων μὴ περιοδικῶν. Διὰ τὴν ὁλοκλήρωσιν τριγωνομετρικῶν συναρτήσεων χρησιμοποιοῦνται τὰ εἰδικὰ προγράμματα τῶν πινάκων XIV (μέθοδος Α′) καὶ XV (μέθοδος Β′), εἰς τὰ ὁποῖα τὸ πλάτος τῶν ζωνῶν διὰ $x>10$ παραμένει σταθερόν, ἐνῶ διὰ $0<x<10$ τὸ πλάτος τῶν ζωνῶν ὁρίζεται ὅπως καὶ εἰς τὰ γενικὰ προγράμματα.

Κατὰ τὴν σύνταξιν ἑνὸς προγράμματος πρέπει πάντοτε νὰ ἔχωμεν ὑπ' ὄψιν μας τοὺς περιορισμοὺς ὡς πρὸς τὸν ἀριθμὸν N τοῦ πλήθους τῶν ζωνῶν καὶ τὸ πλάτος Δx αὐτῶν, τοὺς ἀναφερομένους εἰς τὰς παραγράφους 4, 7 καὶ 13.

Εἰς τοὺς πίνακας XII, XIII, XIV καὶ XV δίδομεν παραδείγματα ἐφαρμογῆς τῶν προγραμμάτων πρὸς ὑπολογισμὸν διαφόρων ὁλοκληρωμάτων. Πλὴν τῶν παρατιθεμένων παραδειγμάτων, ἐδοκιμάσθησαν καὶ πολλὰ ἄλλα γνωστὰ ὁλοκληρώματα, πρὸς ἔλεγχον τῆς ἀποτελεσματικότητος τῆς μεθόδου. Τὰ ἀποτελέσματα τῶν ὑπολογισμῶν δίδονται εἰς τὸν πίνακα XXI, ὁμοῦ μετὰ τῶν πραγματικῶν τιμῶν πρὸς σύγκρισιν.

15. ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΙΣ ΣΕΙΡΑΣ ΤΙΜΩΝ ΑΓΝΩΣΤΟΥ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΣ

Πρὸς ὑπολογισμὸν τοῦ ὁλοκληρώματος μιᾶς μεταβολῆς, τῆς ὁποίας ἔχομεν τὰς τιμὰς (π.χ. ἀπὸ παρατηρήσεις) δι' ἰσαπεχούσας τιμὰς τῆς ἀνεξαρτήτου μεταβλητῆς (π.χ. τοῦ χρόνου), δὲν γνωρίζομεν ὅμως τὴν συνάρτησιν, δυνάμεθα νὰ ἐφαρμόσωμεν τὴν α′ μέθοδον, ἀρκεῖ νὰ διαθέτωμεν τὰς δύο τιμὰς τῆς $Y=F(x)$ ἑκατέρωθεν τῶν ὁρίων τῆς περιοχῆς, τὴν ὁποίαν θέλομεν νὰ ὁλοκληρώσωμεν. Εἰς τὴν περίπτωσιν χρησιμοποιήσεως ἠλεκτρονικοῦ ὑπολογιστοῦ, πρέπει νὰ τροποποιήσωμεν τὸ πρόγραμμα τοῦ πίνακος IV ἢ VIII, ὥστε, ἀντὶ νὰ ὑπολογίζῃ τὰς τιμὰς Y(I), νὰ τὰς λαμβάνῃ ὡς δεδομένας (DATA). Ἐὰν πρέπῃ ἡ ὁλοκλήρωσις νὰ περιλάβῃ ὅλας τὰς τιμάς, τὰς ὁποίας διαθέτομεν, τότε θεωροῦμεν ὅτι ἔχομεν μίαν συνάρτησιν μέχρι τρίτου βαθμοῦ καὶ ὑπολογίζομεν κατὰ προσέγγισιν τὰς γειτονικὰς τιμάς, δηλαδὴ τὴν πρὸ τῆς πρώτης καὶ τὴν μετὰ τὴν τελευταίαν, τῇ βοηθείᾳ τῶν πρώτης, δευτέρας καὶ τρίτης τάξεως διαφορῶν τῶν ληφθεισῶν μετρήσεων (extrapolation).

Ὁ ὑπολογισμὸς τοῦ ὁλοκληρώματος γίνεται διὰ τοῦ προγράμματος τοῦ πίνακος XVII. Δίδομεν κατ' ἀρχήν, μὲ τὸ πρῶτον δελτίον τῶν δεδομένων (DATA DECK), τὸ πλῆθος NM τῶν τιμῶν τὰς ὁποίας διαθέτομεν, καὶ τὸ διάστημα τῆς ἀνεξαρτήτου μεταβλητῆς, τὸ ὁποῖον ὁρίζει δύο διαδοχικὰς τιμὰς τῆς συναρτήσεως. Ἐν συνεχείᾳ δίδομεν τὰς μετρηθείσας τιμάς, τὰς ὁποίας ἡ μηχανὴ τοποθετεῖ εἰς τὴν μνήμην αὐτῆς ὡς τιμὰς τῆς μεταβλητῆς Υ(I). Αἱ τιμαὶ αὗται, τῶν ὁποίων τὸ πλῆθος εἶναι NM, χαρακτηρίζονται ὡς Υ(2), Υ(3), Υ(4), ...Υ(NM+1). Αἱ τιμαὶ τῶν Υ(1) καὶ Υ(NM+2), ἀπαραίτητοι διὰ τὴν ἐκτέλεσιν τῆς ὁλοκληρώσεως, ὑπολογίζονται, ὡς ἀνωτέρω ἐλέχθη, τῇ βοηθείᾳ τῶν γειτονικῶν πρὸς αὐτὰς γνωστῶν τιμῶν.

Διὰ τὴν ἐφαρμογὴν τῆς β′ μεθόδου, ἐπειδὴ ἀπαιτεῖται ἡ γνῶσις καὶ τῆς πρώτης παραγώγου τῆς συναρτήσεως, πρέπει νὰ τροποποιηθῇ τὸ πρόγραμμα καὶ ὡς πρὸς τὸ σημεῖον ἐκεῖνο, ὥστε νὰ ὑπολογίζῃ, κατὰ προσέγγισιν βεβαίως, τὰς τιμὰς τῆς παραγώγου ἐκ τῶν διαθεσίμων τιμῶν τῆς συναρτήσεως. Ἕν τοιοῦτον πρόγραμμα εἶναι π.χ. τὸ τοῦ πίναχος XVIII. Πρὸς δοκιμὴν τῶν προγραμμάτων XVII καὶ XVIII, ἐδόθησαν αἱ γνωσταὶ τιμαὶ τοῦ ἡμιτόνου τῶν γωνιῶν 0°, 1°, 2°, ... 90° καὶ ὑπελογίσθησαν τὰ ὁλοκληρώματα τοῦ ημx διὰ τὰς γωνίας 0-30°, 0-45°, 0-60° καὶ 0-90°. Τὰ ἀποτελέσματα δίδονται εἰς τὸν πίνακα XIX.

SUMMARY

Numerical integration of a real function $Y = F(x)$ between definite limits is very often carried out with the help of some well-known formulae, such as Simpson's, Weddle's and others. In this paper two new formulae are given for the calculation of an integral by the narrow zones method (see fig. 1 and 2).

The area of each zone is:

$$E = T + \tau$$

T being the area of a trapezoid with parallel sides Y_i and Y_{i+1} and altitude Δx, whereas τ is given either by formula (9) in method A′:

$$\tau = \rho \frac{B_i \cdot \beta_i}{2(B_i + \beta_i)} \Delta x \qquad \left(\rho = \frac{1}{3}\right)$$

or by formula (39) in method B′:

$$\tau = \varphi\ (KO)^2 - \frac{KL \cdot VO}{2}$$

The lengths B_i, β_i, KL, VO, KO and the angle φ are given by formulae (10), (11), (32), (29), (31) and (36) or (44), as functions of Y_i.

For the calculation of intergals by the new formulae, with the help of a computer, the programs of the VINT-series (see tables IV, VIII, XII, XIII XIV, XV, XVII, XVIII) were written in FORTRAN II for the IBM 1620/II.

These programs have been tested in the computation of many definite integrals, the real values of which were already known, and the results were very satisfactory. In most cases the approximation of the real value was closer than that obtained by other methods (see tables VI, IX, XVI, XIX).

Π Ι Ν Α Κ Ε Σ

ΠΙΝΑΞ I. Παράδειγμα προγράμματος διὰ τὴν ἀναζήτησιν τῆς καλυτέρας τιμῆς τοῦ συντελεστοῦ ρ. Σύγχρονος μελέτη τριῶν ὁλοκληρωμάτων.

ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ - DATA

```
*FANOK2006
C      PROGRAM VINT-A01
C      ***************
C      BY CLEANTHIS VENETOPOULOS,  THESSALONIKI 1969
C---------------------------------------------------------------------
C
C      NUMERICAL INTEGRATION, METHOD A
C
C---------------------------------------------------------------------
C
C      INVESTIGATION FOR THE BEST VALUE OF THE COEFFICIENT R
C---------------------------------------------------------------------
C
C      *FANDK2006
C
C
       DIMENSION Y(100)
   100 READ 102,XA,XB,N,RVAL
   102 FORMAT (F5.2,F5.2,I3,F16.12)
       IF (N) 382,382,111
   111 FN=N
       DX=(XB-XA)/FN
       X=XA-DX
       R=0
       DR=0.1
       M1=N+3
       M2=N+1
       IF (XA-1.) 120,130,140
C
C      ********************************
C
   120 DO 121 I=1,M1
       Y(I)=X*LOGF(1.-X)
   121 X=X+DX
       GO TO 131
   130 DO 122 I=1,M1
       Y(I)=X/SQRTF(X**2+1.)
   122 X=X+DX
       GO TO 131
   140 DO 123 I=1,M1
       Y(I)=LOGF(2.)*2.**X
   123 X=X+DX
C
C      ********************************
C
   131 SY=0
       IF (DR-0.00001) 132,133,133
   132 PRINT 104,RVAL
   104 FORMAT (/28X,30H.............. REAL VALUE =,F16.12///)
       GO TO 100
   133 DO 162 I=2,M2
       BA=-Y(I)+2.*Y(I+1)-Y(I+2)
       BB=-Y(I-1)+2.*Y(I)-Y(I+1)
       IF (BA*BB) 145,145,146
   145 SA=Y(I)+Y(I+1)
       GO TO 162
   146 SA=Y(I)+Y(I+1)+R*BA*BB/(BA+BB)
   162 SY=SY+SA
```

```
      S=DX*SY/2.
      IF (DR-0.0001) 163,164,164
  163 PRINT 103,XA,XB,N,R,S
  103 FORMAT (5X,4HXA =,F5.2,3X,4HXB =,F5.2,4X,3HN =,I3,5X,3HR =,F7.5,5X
     1,3HS =,F16.12)
  164 S1=S
      P1=ABSF(RVAL-S1)
      R=R+DR
      SY=0
      DO 262 I=2,M2
      BA=-Y(I)+2.*Y(I+1)-Y(I+2)
      BB=-Y(I-1)+2.*Y(I)-Y(I+1)
      IF (BA*BB) 245,245,246
  245 SA=Y(I)+Y(I+1)
      GO TO 262
  246 SA=Y(I)+Y(I+1)+R*BA*BB/(BA+BB)
  262 SY=SY+SA
      S=DX*SY/2.
      IF (DR-0.0001) 263,264,264
  263 PRINT 103,XA,XB,N,R,S
  264 S2=S
      P2=ABSF(RVAL-S2)
      IF (P1-P2) 374,374,301
  301 R=R+DR
      SY=0
      DO 362 I=2,M2
      BA=-Y(I)+2.*Y(I+1)-Y(I+2)
      BB=-Y(I-1)+2.*Y(I)-Y(I+1)
      IF (BA*BB) 345,345,346
  345 SA=Y(I)+Y(I+1)
      GO TO 362
  346 SA=Y(I)+Y(I+1)+R*BA*BB/(BA+BB)
  362 SY=SY+SA
      S=DX*SY/2.
      IF (DR-0.0001) 363,364,364
  363 PRINT 103,XA,XB,N,R,S
  364 S3=S
      P3=ABSF(RVAL-S3)
      IF (P2-P3) 372,373,374
  372 R=R-2.*DR
      DR=DR/10.
      GO TO 131
  373 R=R-DR
      DR=DR/10.
      GO TO 131
  374 R=R-DR
      GO TO 131
  382 STOP
      END
 0.0   0.5   5   -.052569807290
 0.0   0.5  10   -.052569807290
 0.0   0.5  20   -.052569807290
 0.0   0.5  40   -.052569807290
 1.0   2.0   5   0.821854415128
 1.0   2.0  10   0.821854415128
 1.0   2.0  20   0.821854415128
 1.0   2.0  40   0.821854415128
 2.0   3.0   5   4.000000000000
 2.0   3.0  10   4.000000000000
 2.0   3.0  20   4.000000000000
 2.0   3.0  40   4.000000000000
0000000000000000000000000000
```

ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

'Εκ τῆς πρώτης συναρτήσεως

XA = 0.00	XB = .50	N = 5	R = .33200	S = -.052570117528
XA = 0.00	XB = .50	N = 5	R = .33201	S = -.052570075109
XA = 0.00	XB = .50	N = 5	R = .33202	S = -.052570032690
XA = 0.00	XB = .50	N = 5	R = .33201	S = -.052570075109
XA = 0.00	XB = .50	N = 5	R = .33202	S = -.052570032690
XA = 0.00	XB = .50	N = 5	R = .33203	S = -.052569990271
XA = 0.00	XB = .50	N = 5	R = .33202	S = -.052570032690
XA = 0.00	XB = .50	N = 5	R = .33203	S = -.052569990271
XA = 0.00	XB = .50	N = 5	R = .33204	S = -.052569947852
XA = 0.00	XB = .50	N = 5	R = .33203	S = -.052569990271
XA = 0.00	XB = .50	N = 5	R = .33204	S = -.052569947852
XA = 0.00	XB = .50	N = 5	R = .33205	S = -.052569905433
XA = 0.00	XB = .50	N = 5	R = .33204	S = -.052569947852
XA = 0.00	XB = .50	N = 5	R = .33205	S = -.052569905433
XA = 0.00	XB = .50	N = 5	R = .33206	S = -.052569863014
XA = 0.00	XB = .50	N = 5	R = .33205	S = -.052569905433
XA = 0.00	XB = .50	N = 5	R = .33206	S = -.052569863014
XA = 0.00	XB = .50	N = 5	R = .33207	S = -.052569820595
XA = 0.00	XB = .50	N = 5	R = .33206	S = -.052569863014
XA = 0.00	XB = .50	N = 5	R = .33207	S = -.052569820595
XA = 0.00	XB = .50	N = 5	R = .33208	S = -.052569778176

.... REAL VALUE = -.052569807290

XA = 0.00	XB = .50	N =10	R = .33290	S = -.052569934657
XA = 0.00	XB = .50	N =10	R = .33291	S = -.052569924069
XA = 0.00	XB = .50	N =10	R = .33292	S = -.052569913481
XA = 0.00	XB = .50	N =10	R = .33291	S = -.052569924069
XA = 0.00	XB = .50	N =10	R = .33292	S = -.052569913481
XA = 0.00	XB = .50	N =10	R = .33293	S = -.052569902894
XA = 0.00	XB = .50	N =10	R = .33292	S = -.052569913481
XA = 0.00	XB = .50	N =10	R = .33293	S = -.052569902894
XA = 0.00	XB = .50	N =10	R = .33294	S = -.052569892306

. . . .

. . . .

'Εκ τῆς τρίτης συναρτήσεως

XA = 2.00	XB = 3.00	N = 5	R = .33370	S = 4.000001153349
XA = 2.00	XB = 3.00	N = 5	R = .33371	S = 4.000000961475
XA = 2.00	XB = 3.00	N = 5	R = .33372	S = 4.000000769601
XA = 2.00	XB = 3.00	N = 5	R = .33371	S = 4.000000961475
XA = 2.00	XB = 3.00	N = 5	R = .33372	S = 4.000000769601
XA = 2.00	XB = 3.00	N = 5	R = .33373	S = 4.000000577727
XA = 2.00	XB = 3.00	N = 5	R = .33372	S = 4.000000769601
XA = 2.00	XB = 3.00	N = 5	R = .33373	S = 4.000000577727
XA = 2.00	XB = 3.00	N = 5	R = .33374	S = 4.000000385853
XA = 2.00	XB = 3.00	N = 5	R = .33373	S = 4.000000577727
XA = 2.00	XB = 3.00	N = 5	R = .33374	S = 4.000000385853
XA = 2.00	XB = 3.00	N = 5	R = .33375	S = 4.000000193979
XA = 2.00	XB = 3.00	N = 5	R = .33374	S = 4.000000385853

XA = 2.00	XB = 3.00	N = 5	R = .33375	S = 4.000000193979
XA = 2.00	XB = 3.00	N = 5	R = .33376	S = 4.000000002105
XA = 2.00	XB = 3.00	N = 5	R = .33375	S = 4.000000193979
XA = 2.00	XB = 3.00	N = 5	R = .33376	S = 4.000000002105
XA = 2.00	XB = 3.00	N = 5	R = .33377	S = 3.999999810231

.... REAL VALUE = 4.000000000000

XA = 2.00	XB = 3.00	N =10	R = .33330	S = 4.000000672760
XA = 2.00	XB = 3.00	N =10	R = .33331	S = 4.000000624734
XA = 2.00	XB = 3.00	N =10	R = .33332	S = 4.000000576708
XA = 2.00	XB = 3.00	N =10	R = .33331	S = 4.000000624734
XA = 2.00	XB = 3.00	N =10	R = .33332	S = 4.000000576708
XA = 2.00	XB = 3.00	N =10	R = .33333	S = 4.000000528682
XA = 2.00	XB = 3.00	N =10	R = .33332	S = 4.000000576708
XA = 2.00	XB = 3.00	N =10	R = .33333	S = 4.000000528682
XA = 2.00	XB = 3.00	N =10	R = .33334	S = 4.000000480656

. . . .

. . . .

. . . .

XA = 2.00	XB = 3.00	N =10	R = .33342	S = 4.000000096447
XA = 2.00	XB = 3.00	N =10	R = .33343	S = 4.000000048421
XA = 2.00	XB = 3.00	N =10	R = .33344	S = 4.000000000395
XA = 2.00	XB = 3.00	N =10	R = .33343	S = 4.000000048421
XA = 2.00	XB = 3.00	N =10	R = .33344	S = 4.000000000395
XA = 2.00	XB = 3.00	N =10	R = .33345	S = 3.999999952369

.... REAL VALUE = 4.000000000000

XA = 2.00	XB = 3.00	N =20	R = .33330	S = 4.000000072089
XA = 2.00	XB = 3.00	N =20	R = .33331	S = 4.000000060079
XA = 2.00	XB = 3.00	N =20	R = .33332	S = 4.000000048069

. . . .

. . . .

. . . .

XA = 2.00	XB = 3.00	N =20	R = .33334	S = 4.000000024049
XA = 2.00	XB = 3.00	N =20	R = .33335	S = 4.000000012038
XA = 2.00	XB = 3.00	N =20	R = .33336	S = 4.000000000028
XA = 2.00	XB = 3.00	N =20	R = .33335	S = 4.000000012038
XA = 2.00	XB = 3.00	N =20	R = .33336	S = 4.000000000028
XA = 2.00	XB = 3.00	N =20	R = .33337	S = 3.999999988018

.... REAL VALUE = 4.000000000000

XA = 2.00	XB = 3.00	N =40	R = .33320	S = 4.000000042040
XA = 2.00	XB = 3.00	N =40	R = .33321	S = 4.000000039037
XA = 2.00	XB = 3.00	N =40	R = .33322	S = 4.000000036034

. . . .

. . . .

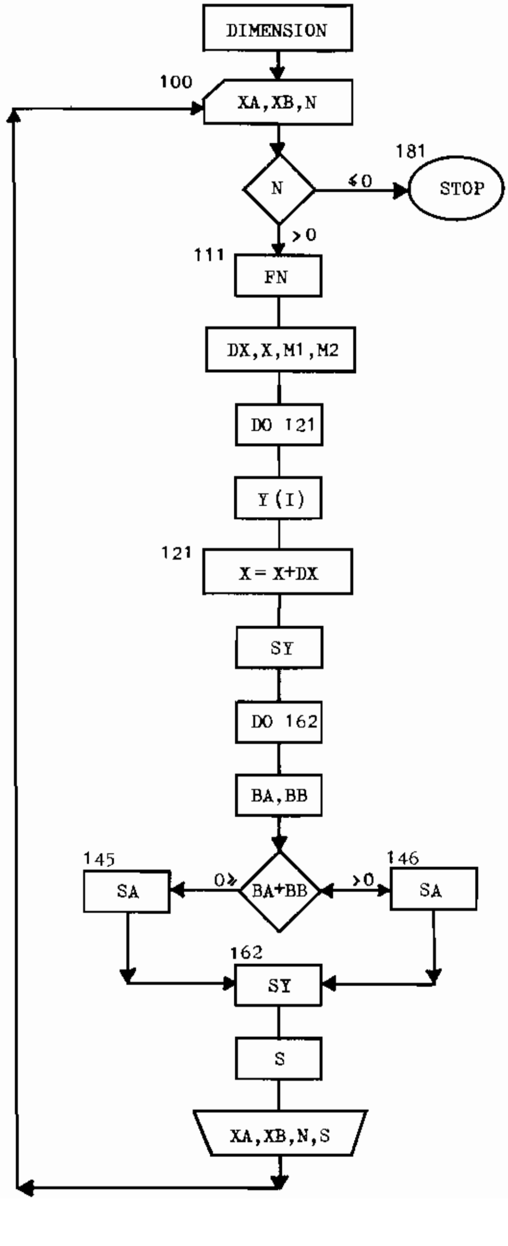
XA = 2.00	XB = 3.00	N =40	R = .33332	S = 4.000000006007
XA = 2.00	XB = 3.00	N =40	R = .33333	S = 4.000000003004
XA = 2.00	XB = 3.00	N =40	R = .33334	S = 4.000000000001
XA = 2.00	XB = 3.00	N =40	R = .33333	S = 4.000000003004
XA = 2.00	XB = 3.00	N =40	R = .33334	S = 4.000000000001
XA = 2.00	XB = 3.00	N =40	R = .33335	S = 3.999999996999

.... REAL VALUE = 4.000000000000

ΠΙΝΑΞ ΙΙ. Τὰ μελετηθέντα ὁλοκληρώματα καὶ αἱ ἐξ αὐτῶν προκύπτουσαι καλύτεραι τιμαὶ τοῦ συντελεστοῦ ρ.

Α/Α	Y = F(x)	Ὅρια ὁλοκληρώσεως		Ἡ καλυτέρα τιμὴ τοῦ συντελεστοῦ ρ			
				n = 5	n = 10	n = 20	n = 40
1	$Y = \sin x - \log x + e^x$	0.2 - 1.4		0.55491	0.32816	0.33208	0.33302
2	$Y = 1/x$	1	2	33374	33344	33336	33334
3	$Y = \log x$	4	5.2	33327	33332	33333	33333
4	$Y = 1/(x^2 + 1)$	0	1	38760	34802	33704	33424
5	$Y = x^2 + x + 1$	1	2	33333	33333	33333	33333
6	$Y = x^2 + 1$	2	3	33333	33333	33333	33333
7	$Y = x \log(1 - x)$	0	0.5	33207	33302	33326	33331
8	$Y = x / \sqrt{x^3 + 1}$	1	2	33601	33400	33350	33338
9	$Y = 2^x \log 2$	2	3	33376	33344	33336	33334
10	$Y = x \log(x + 1)$	0	1	33205	33302	33325	33331
11	$Y = x^2$	1	2	33333	33333	33333	33333
12	$Y = 1 / (x^3 + 1)$	0	1	47618	36929	34326	33609

ΠΙΝΑΞ ΙΙΙ. Διάγραμμα πορείας (flow chart) προγράμματος ὑπολογισμοῦ ὡρισμένου ὁλοκληρώματος διὰ τῆς μεθόδου Α΄



ΠΙΝΑΞ IV. Παράδειγμα προγράμματος υπολογισμού ώρισμένου όλοκληρώματος διά τῆς μεθόδου A'.

ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ

```
*FANDK2006
C      PROGRAM VINT-A11
C      ***************
C      BY CLEANTHIS VENETOPOULOS,  THESSALONIKI 1969
C-----------------------------------------------------------------------
C
C      NUMERICAL INTEGRATION, METHOD A
C
C-----------------------------------------------------------------------
C
C      THIS PROGRAM IS GOOD FOR INTEGRATION WITHIN DEFINITE LIMITS.
C-----------------------------------------------------------------------
C
C      ATTENTION.  IF, FOR X=0, IS Y(D)=INFINITE, THE LOWER LIMIT OF THE
C              INTEGRATION SHOULD NOT BE ZERO. GIVE TO N THE PROPER VALUE,
C              SO THAT XA IS GREATER THAN DX
C      IF THE FUNCTION TO BE INTEGRATED CONTAINS TRIGONOMETRIC TERMS,
C              SIN(X), COS(X) OR SIN(K*X), COS(K*X) OR SIN(FX), COS(FX)
C              K BEING A NUMBER AND FX A FUNCTION OF X,
C              DX SHOULD NOT BE GREATER THAN 1 OR 1/K OR 1/(DERIV. OF X)
C              RESPECTIVELY.
C-----------------------------------------------------------------------
C
C      *FANDK2006
C
C
       DIMENSION Y(130)
  110 READ 101,XA,XB,N
  101 FORMAT (F5.2,F5.2,I3)
       IF (N) 182,182,111
  111 FN=N
       DX=(XB-XA)/FN
       X=XA-DX
       M1=N+3
       M2=N+1
       DO 121 I=1,M1
C
C      *********************************
C
       Y(I)=X/SQRTF(X**2+1.)
C
C      *********************************
C
  121 X=X+DX
       R=1./3.
       SY=0
       DO 162 I=2,M2
       BA=-Y(1)+2.*Y(I+1)-Y(I+2)
       BB=-Y(I-1)+2.*Y(I)-Y(I+1)
       IF (BA*BB) 145,145,146
  145 SA=Y(I)+Y(I+1)
       GO TO 162
  146 SA=Y(I)+Y(I+1)+R*BA*BB/(BA+BB)
  162 SY=SY+SA
       S=DX*SY/2.
       PRINT 105,XA,XB,N,S
  105 FORMAT (5X,4HXA =,F5.2,3X,4HXB =,F5.2,4X,3HN =,I3,5X,3HS =,F16.12)
       GO TO 110
  182 STOP
       END
```

ΠΙΝΑΞ IV (συνέχεια)

DATA

```
 1.0  2.0   4
 1.0  2.0   8
 1.0  2.0  16
 1.0  2.0  32
 1.0  2.0  64
 1.0  2.0 128
0000000000000
```

ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

```
XA = 1.00   XB = 2.00   N =  4   S =   .821837408671
XA = 1.00   XB = 2.00   N =  8   S =   .821853338068
XA = 1.00   XB = 2.00   N = 16   S =   .821854347585
XA = 1.00   XB = 2.00   N = 32   S =   .821854410901
XA = 1.00   XB = 2.00   N = 64   S =   .821854414862
XA = 1.00   XB = 2.00   N =128   S =   .821854415110
```

ΠΙΝΑΞ V. Σύγκρισις τῶν β, B καὶ τοῦ γινομένου αὐτῶν β · B

Α/Α	Πρόσημον τοῦ β	Σχέσις ἀπολ. τιμῶν	Πρόσημον τοῦ B	β · B	τ_1
1	+	=	+	+βB	ΝΑΙ
2	+	≠	+	+βB	ΝΑΙ
3	—	=	—	+βB	ΝΑΙ
4	—	≠	—	+βB	ΝΑΙ
5	+		0	0	ΟΧΙ
6	0		+	0	ΟΧΙ
7	—		0	0	ΟΧΙ
8	0		—	0	ΟΧΙ
9	+	=	—	—	ΟΧΙ
10	—	=	+	—	ΟΧΙ
11	+	≠	—	—	ΟΧΙ
12	—	≠	+	—	ΟΧΙ

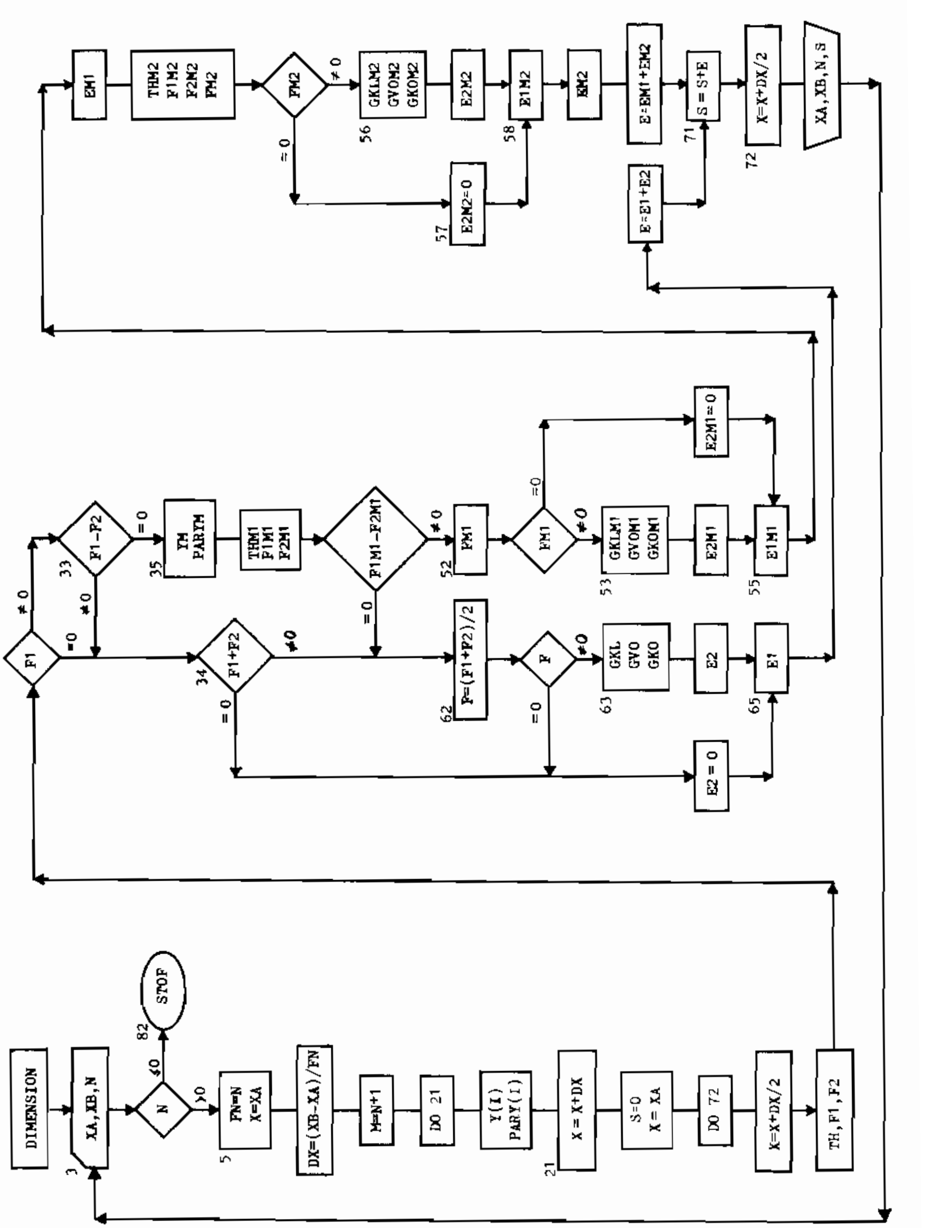
ΠΙΝΑΞ VI. 'Αποτελέσματα ὑπολογισμοῦ 15 ὁλοκληρωμάτων διὰ τῆς μεθόδου Α'.

Α/Α	Υ = F(x)	Ὅρια ὁλοκληρ.	Πραγματικὴ τιμὴ S_0	N	Ὑπολογισθεῖσα τιμὴ S — Μέθοδος Α'	Ὑπολογισθεῖσα τιμὴ S — Μέθ. Simpson
1	sinx-logx+e^x	0.2-1.4	4.050 947 929 6	8	4.050 490	4.051 404
				32	4.050 946 373	4.050 950 583
				128	4.050 947 923 823	4.050 947 940
2	1/x	1 - 2	0.693 147 180 560	8	.693 147 652	.693 154 530
				32	.693 147 182 421	.693 147 210 2
				128	.693 147 180 567	.693 147 180 676
3	logx	4 - 5.2	1.827 847 408 575	8	1.827 847 420 5	1.827 847 360
				32	1.827 847 408 621	1.827 847 408 387
				128	1.827 847 408 575	1.827 847 408 574
4	$1/(x^2+1)$	0 - 1	0.785 398 163 397	8	.785 358 1	.785 398 125 614
				32	.785 397 986	.785 398 163 388
				128	.785 398 162 649	.785 398 163 397
5	x^2+x+1	1 - 2	4.833 333 333	4	4.833 333 333 333	4.833 333 333 333
				128	»	»
6	x^2+1	2 - 3	7.333 333 333	4	7.333 333 333 333	7.333 333 333 333
				128	»	»
7	xlog(1 - x)	0 - 0.5	.052 569 807 29	8	.052 568 996	.052 571 216
				32	.052 569 804 136	.052 569 812 911
				128	.052 569 807 277	.152 569 807 312
8	x/x^2+1	1 - 2	.821 854 415 128	8	.821 853 338	.821 853 546
				32	.821 854 410 901	.821 854 411 762
				128	.821 854 415 110	.821 854 415 113
9	2^xlog2	2 - 3	4.000 000 000	4	4.000 019 966	4.000 019 966
				32	4.000 000 004 891	4.000 000 004 891
				128	4.000 000 000 019	4.000 000 000 019
10	xlog(x + 1)	0 - 1	0.250 000 000	8	.249 997 678	.250 003 321
				32	.249 999 990 970	.250 000 013 227
				128	.249 999 999 964	.250 000 000 051
11	x^2	1 - 2	2.333 333 333	4	2.333 333 333	2.333 333 333
				128	»	»
12	$1/(x^3+1)$	0 - 1	.835 648 848 265	8	.835 514	.835 652 412
				32	.835 648 117	.835 648 889 963
				128	.835 648 844 673	.835 648 848 427

ΠΙΝΑΞ VI (συνεχεια)

13	$x^2.e^{-v}$	1 - 2	.122 514 659 5	8	.122 517 672	.122 501 973
	$(v=x^3)$			32	.122 514 667 652	.122 514 611 892
				128	.122 514 659 539	.122 514 659 328
14	$\sin^2 x$	1 - 3	1.297 178 231 256	8	1.296 734	1.297 284
				32	1.297 176 181	1.297 178 635
				128	1.297 178 223 099	1.297 178 232 830
15	$1/(1+e^x)$	1 - 5	.306 546 339	8	.306 664	.306 532 631
				32	.306 546 816	.306 546 282
				128	.306 546 340 898	.306 546 338 808

ΠΙΝΑΞ VII. Διάγραμμα πορείας (flow chart) προγράμματος ἀριθμητικοῦ ὑπολογισμοῦ ὡρισμένου ὁλοκληρώματος διὰ τῆς μεθόδου Β'.



ΠΙΝΑΞ VIII. Παράδειγμα προγράμματος ὑπολογισμοῦ ὡρισμένου ὁλοκληρώματος διὰ τῆς μεθόδου Β'.

ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ - DATA

```
*FANDK2006
C      PROGRAM VINT-B11
C      ****************
C      BY CLEANTHIS VENETOPOULOS,  THESSALONIKI 1969
C-------------------------------------------------------------------
C
C      NUMERICAL INTEGRATION, METHOD B
C
C-------------------------------------------------------------------
C
C      THIS PROGRAM IS GOOD FOR INTEGRATION WITHIN DEFINITE LIMITS.
C-------------------------------------------------------------------
C
C      IF THE FUNCTION TO BE INTEGRATED CONTAINS TRIGONOMETRIC TERMS,
C             SIN(X), COS(X) OR SIN(K*X), COS(K*X) OR SIN(FX), COS(FX)
C             K BEING A NUMBER AND FX A FUNCTION OF X,
C             DX SHOULD NOT BE GREATER THAN 1 OR 1/K OR 1/(DERIV. OF X)
C             RESPECTIVELY.
C-------------------------------------------------------------------
C
C      *FANDK2006
C
C
       DIMENSION Y(130), DERY(130)
     3 READ 4,XA,XB,N
     4 FORMAT (F5.2,F5.2,I3)
       IF (N) 82,82,5
     5 FN=N
       X=XA
       DX=(XB-XA)/FN
       M=N+1
       DO 21 I=1,M
C
C      **********************************
C
       Y(I)=X/SQRTF(X**2+1.)
       DERY(I)=1./(X**2+1.)**1.5
C
C      **********************************
C
    21 X=X+DX
       S=0
       X=XA
       DO 72 I=1,N
       X=X+DX/2.
       TH=ATANF((Y(I+1)-Y(I))/DX)
       F1=ATANF(DERY(I))-TH
       F2=TH-ATANF(DERY(I+1))
       IF (F1) 33,34,33
    33 IF (F1-F2) 34,35,34
    34 IF (F1+F2) 62,64,62
    35 CONTINUE
C
C      **********************************
C
       YM=X/SQRTF(X**2+1.)
       DERYM=1./(X**2+1.)**1.5
C
C      **********************************
C
```

```
      THM1=ATANF(YM-Y(I))*2./DX
      F1M1=ATANF(DERY(I))-THM1
      F2M1=THM1-ATANF(DERYM)
      IF (F1M1-F2M1) 52,62,52
   52 FM1=(F1M1+F2M1)/2.
      IF (ABSF(FM1)-0.0000000001) 54,53,53
   53 GKLM1=SQRTF((YM-Y(I))**2+(DX/2.)**2)
      GVOM1=GKLM1*COSF(FM1)/(2.*SINF(FM1))
      GKOM1=GKLM1/(2.*SINF(FM1))
      E2M1=FM1*GKOM1**2-GKLM1*GVOM1/2.
      GO TO 55
   54 E2M1=0
   55 E1M1=(Y(I)+YM)*DX/4.
      EM1=E1M1+E2M1
      THM2=ATANF(Y(I+1)-YM)*2./DX
      F1M2=ATANF(DERYM)-THM2
      F2M2=THM2-ATANF(DERY(I+1))
      FM2=(F1M2+F2M2)/2.
      IF (ABSF(FM2)-0.0000000001) 57,56,56
   56 GKLM2=SQRTF((Y(I+1)-YM)**2+(DX/2.)**2)
      GVOM2=GKLM2*COSF(FM2)/(2.*SINF(FM2))
      GKOM2=GKLM2/(2.*SINF(FM2))
      E2M2=FM2*GKOM2**2-GKLM2*GVOM2/2.
      GO TO 58
   57 E2M2=0
   58 E1M2=(YM+Y(I+1))*DX/4.
      EM2=E1M2+E2M2
      E=EM1+EM2
      GO TO 71
   62 F=(F1+F2)/2.
      IF (ABSF(F)-0.0000000001) 64,63,63
   63 GKL=SQRTF((Y(I+1)-Y(I))**2+DX**2)
      GVO=GKL*COSF(F)/(2.*SINF(F))
      GKO=GKL/(2.*SINF(F))
      E2=F*GKO**2-GKL*GVO/2.
      GO TO 65
   64 E2=0
   65 E1=(Y(I)+Y(I+1))*DX/2.
      E=E1+E2
   71 S=S+E
   72 X=X+DX/2.
      PRINT 73,XA,XB,N,S
   73 FORMAT (2X,4HXA =,F5.2,4X,4HXB =,F5.2,4X,3HN =,I3,5X,3HS =,F16.12)
      GO TO 3
   82 STOP
      END
 1.0  2.0   4
 1.0  2.0   8
 1.0  2.0  16
 1.0  2.0  32
 1.0  2.0  64
 1.0  2.0 128
D00000000000
```

ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

```
  XA =  1.00     XB =  2.00     N =   4     S =   .821855956911
  XA =  1.00     XB =  2.00     N =   8     S =   .821854508276
  XA =  1.00     XB =  2.00     N =  16     S =   .821854420898
  XA =  1.00     XB =  2.00     N =  32     S =   .821854415486
  XA =  1.00     XB =  2.00     N =  64     S =   .821854415149
  XA =  1.00     XB =  2.00     N = 128     S =   .821854415128
```

ΠΙΝΑΞ IX. Ἀποτελέσματα ὑπολογισμοῦ 15 ὁλοκληρωμάτων διὰ τῆς μεθόδου Β′. (Πρὸς σύγκρισιν παρατίθενται καὶ τὰ ἀποτελέσματα ὑπολογισμοῦ διὰ τῆς ἡμετέρας μεθόδου Α′ ὡς καὶ τῆς μεθόδου Simpson).

1. $F(x) = \sin x - \log x + e^x$ $x_\alpha = 0.2$
Πραγμ. τιμὴ $S_o = 4.050\,947\,929\,6$ $x_\beta = 1.4$

N	Μέθοδος Α′	Μέθοδος Β′	Μέθ. Simpson
8	4.050 490	4.050 562	4.051 404
32	4.050 946 373	4.050 946 332	4.050 950 583
128	4.050 947 923 823	4.050 947 923 592	4.050 947 940 689

2. $F(x) = 1/x$ $x_\alpha = 1$
Πραγμ. τιμὴ $S_o = 0.693\,147\,180\,56$ $x_\beta = 2$

N	Μέθοδος Α′	Μέθοδος Β′	Μέθ. Simpson
8	.693 147 652	.693 147 600	.693 154 530
32	.693 147 182 421	.693 147 182 231	.693 147 210 289
128	.693 147 180 567	.693 147 180 566	.693 147 180 676

3. $F(x) = \log x$ $x_\alpha = 4$
Πραγμ. τιμὴ $S_o = 1.828\,847\,408\,575$ $x_\beta = 5.2$

N	Μέθοδος Α′	Μέθοδος Β′	Μέθ. Simpson
8	1.827 847 420 551	1.827 847 418 430	1.827 847 360
32	1.827 847 408 621	1.827 847 408 613	1.827 847 408 387
128	1.827 847 408 575	1.827 847 408 574	1.827 847 408 574

4. $F(x) = 1/(x^2 + 1)$ $x_\alpha = 0$
Πραγμ. τιμὴ $S_o = 0.785\,398\,163\,397$ $x_\beta = 1$

N	Μέθοδος Α′	Μέθοδος Β′	Μέθ. Simpson
8	.785 358 195	.785 399 223	.785 398 125 614
32	.785 397 986	.785 398 167 632	.785 398 163 388
128	.785 398 162 649	.785 398 163 414	.785 398 163 397

5. $F(x) = x^2 + x + 1$ $\qquad x_\alpha = 1$
Πραγμ. τιμή $S_o = 4.833\ 333\ 333\ 333$ $\qquad x_\beta = 2$

N	Μέθοδος A′	Μέθοδος B′	Μέθ. Simpson
4	4.833 333 333 333	4.833 296	4.833 333 333 333
128	4.833 333 333 333	4.833 333 333 297	4.833 333 333 333

6. $F(x) = x^3 + 1$ $\qquad x_\alpha = 2$
Πραγμ. τιμή $S_o = 7.333\ 333\ 333\ 333$ $\qquad x_\beta = 3$

N	Μέθοδος A′	Μέθοδος B′	Μέθ. Simpson
4	7.333 333 333 333	7.333 308 650	7.333 333 333 333
128	7.333 333 333 333	7.333 333 333 309	7.333 333 333 333

7. $F(x) = x\log(1 - x)$ $\qquad x_\alpha = 0$
Πραγμ. τιμή $S_o = -0.052\ 569\ 807\ 29$ $\qquad x_\beta = 0.5$

N	Μέθοδος A′	Μέθοδος B′	Μέθ. Simpson
8	-0.052 568 996	-0.052 569 691	-0.052 571 216
32	-0.052 569 804 136	-0.052 569 806 821	-0.052 569 812 911
128	-0.052 569 807 277	-0.052 569 807 288	-0.052 569 807 312

8. $F(x) = x/\sqrt{x^2 + 1}$ $\qquad x_\alpha = 1$
Πραγμ. τιμή $S_o = 0.821\ 854\ 415\ 128$ $\qquad x_\beta = 2$

N	Μέθοδος A′	Μέθοδος B′	Μέθ. Simpson
8	.821 853 338	.821 854 508	.821 853 546
32	.821 854 410 901	.821 854 415 486	.821 854 411 762
128	.821 854 415 110	.821 854 415 128	.821 854 415 113

9. $F(x) = 2^x \log 2$ $x_\alpha = 2$
Πραγμ. τιμή $S_o = 4.000\ 000\ 000\ 000$ $x_\beta = 3$

N	Μέθοδος A′	Μέθοδος B′	Μέθ. Simpson
4	4.000 019 966	3.999 982 082	4.000 019 966
32	4.000 000 004 891	3.999 999 995 618	4.000 000 004 891
128	4.000 000 000 019	3.999 999 999 982	4.000 000 000 019

10. $F(x) = x \log(x + 1)$ $x_\alpha = 0$
Πραγμ. τιμή $S_o = 0.25$ $x_\beta = 1$

N	Μέθοδος A′	Μέθοδος B′	Μέθ. Simpson
8	.249 997 678	.249 997 734	.250 003 321
32	.249 999 990 970	.249 999 991 249	.250 000 013 227
128	.249 999 999 964	.249 999 999 965	.250 000 000 051

11. $F(x) = x^2$ $x_\alpha = 1$
Πραγμ. τιμή $S_o = 2.333\ 333\ 333\ 333$ $x_\beta = 2$

N	Μέθοδος A′	Μέθοδος B′	Μέθ. Simpson
4	2.333 333 333 333	2.333 272	2.333 333 333 333
128	2.333 333 333 333	2.333 333 333 275	2.333 333 333 333

12. $F(x) = 1/(x^3 + 1)$ $x_\alpha = 0$
Πραγμ. τιμή $S_o = 0.835\ 648\ 848\ 265$ $x_\beta = 1$

N	Μέθοδος A′	Μέθοδος B′	Μέθ. Simpson
8	.835 514	.835 647 143	.835 659 412
32	.835 648 117	.835 648 841 744	.835 648 889 963
128	.835 648 844 673	.835 648 848 239	.835 648 848 427

ΠΙΝΑΞ IX (συνέχεια)

13. $F(x) = x^2 . e^{-v}$ $(v = x^3)$ $x_\alpha = 1$
Πραγμ. τιμή $S_o = 0.122\ 514\ 659\ 5$ $x_\beta = 2$

N	Μέθοδος Α'	Μέθοδος Β'	Μέθ. Simpson
8	.122 517 672	.122 521 740	.122 501 973
32	.122 514 667 652	.122 514 686 624	.122 514 611 892
128	.122 514 659 539	.122 514 659 620	.122 514 659 328

14. $F(x) = \sin^2 x$ $x_\alpha = 1$
Πραγμ. τιμή $S_o = 1.297\ 178\ 231\ 256$ $x_\beta = 3$

N	Μέθοδος Α'	Μέθοδος Β'	Μέθ. Simpson
8	1.296 734	1.297 162 777	1.297 284 571
32	1.297 176 181	1.297 178 183	1.297 178 635
128	1.297 178 223 099	1.297 178 231 074	1.297 178 232 830

15. $F(x) = 1/(1+e^x)$ $x_\alpha = 1$
Πραγμ. τιμή $S_o = 0.306\ 546\ 339$ $x_\beta = 5$

N	Μέθοδος Α'	Μέθοδος Β'	Μέθ. Simpson
8	.306 664	.306 550 428	.306 532 631
32	.306 546 816	.306 546 355 072	.306 546 282
128	.306 546 340 898	.306 546 339 091	.306 546 338 808

ΠΙΝΑΞ X. Πρόγραμμα ὑπολογισμοῦ τριῶν ὁλοκληρωμάτων διὰ τῆς μεθόδου B'

ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ

```
*FANDK2006
C      PROGRAM VINT-B13
C      ***************
C      BY CLEANTHIS VENETOPOULOS,  THESSALONIKI 1969
C-----------------------------------------------------------------------
C
C      NUMERICAL INTEGRATION, METHOD B
C
C-----------------------------------------------------------------------
C
C      THIS PROGRAM IS ABLE TO INTEGRATE UP TO 3 FUNCTIONS, GIVEN
C              SIMULTANEOUSLY, WITHTN DEFINITE LIMITS.
C-----------------------------------------------------------------------
C
C      IF THE FUNCTIOM TO BE INTEGRATED CONTAINS TRIGONOMETRIC TERMS,
C              SIN(X), COS(X) OR SIN(K*X), COS(K*X) OR SIN(FX), COS(FX)
C              K BEING A NUMBER AND FX A FUNCTION UF X,
C              DX SHOULD NOT BE GREATER THAN 1 OR 1/K OR 1/(DERIV. OF X)
C              RESPECTIVELY.
C-----------------------------------------------------------------------
C
C      ONE BLANC CARD AT THE END OF THE DATA DECK WILL CAUSE THE PROGRAM
C              TO STOP.
C-----------------------------------------------------------------------
C
C      *FANDK2006
C
C
       DIMENSION Y(130), DERY(130)
     3 READ 4,XA,XB,N
     4 FORMAT (F5.2,F5.2,I3)
       IF (XB-XA) 5,82,5
     5 FN=N
       X=XA
       DX=(XB-XA)/FN
       M=N+1
       IF (XA-1.) 11,12,13
C
C      *********************************
C
    11 DO 21 I=1,M
       Y(I)=X*LOGF(1.-X)
       DERY(I)=LOGF(1.-X)-X/(1.-X)
    21 X=X+DX
       GO TO 31 
    12 DO 22 I=1,M
       Y(I)=X/SQRTF(X**2+1.)
       DERY(I)=1./(X**2+1.)**1.5
    22 X=X+DX
       GO TO 31
    13 DO 23 I=1,M
       Y(I)=LOGF(2.)*2.**X
       DERY(I)=2.**X*(LOGF(2.))**2
    23 X=X+DX
C
C      *********************************
C
```

```
   31 S=0
      X=XA
      DO 72 I=1,N
      X=X+DX/2.
      TH=ATANF((Y(I+1)-Y(I))/DX)
      F1=ATANF(DERY(I))-TH
      F2=TH-ATANF(DERY(I+1))
      IF (F1) 33,34,33
   33 IF (F1-F2) 34,35,34
   34 IF (F1+F2) 62,64,62
   35 IF (XA-1.) 41,42,43
C
C     ********************************
C
   41 YM=X*LOGF(1.-X)
      DERYM=LOGF(1.-X)-X/(1.-X)
      GO TO 51
   42 YM=X/SQRTF(X**2+1.)
      DERYM=1./(X**2+1.)**1.5
      GO TO 51
   43 YM=LOGF(2.)*2.**X
      DERYM=2.**X*(LOGF(2.))**2
C
C     ********************************
C
   51 THM1=ATANF(YM-Y(I))*2./DX
      F1M1=ATANF(DERY(I))-THM1
      F2M1=THM1-ATANF(DERYM)
      IF (F1M1-F2M1) 52,62,52
   52 FM1=(F1M1+F2M1)/2.
      IF (ABSF(FM1)-0.00D0000001) 54,53,53
   53 GKLM1=SQRTF((YM-Y(I))**2+(DX/2.)**2)
      GVOM1=GKLM1*COSF(FM1)/(2.*SINF(FM1))
      GKOM1=GKLM1/(2.*SINF(FM1))
      E2M1=FM1*GKOM1**2-GKLM1*GVOM1/2.
      GO TO 55
   54 E2M1=0
   55 E1M1=(Y(I)+YM)*DX/4.
      EM1=E1M1+E2M1
      THM2=ATANF(Y(I+1)-YM)*2./DX
      F1M2=ATANF(DERYM)-THM2
      F2M2=THM2-ATANF(DERY(I+1))
      FM2=(F1M2+F2M2)/2.
      IF (ABSF(FM2)-0.00D0000001) 57,56,56
   56 GKLM2=SQRTF((Y(I+1)-YM)**2+(DX/2.)**2)
      GVOM2=GKLM2*COSF(FM2)/(2.*SINF(FM2))
      GKOM2=GKLM2/(2.*SINF(FM2))
      E2M2=FM2*GKOM2**2-GKLM2*GVOM2/2.
      GO TO 58
   57 E2M2=0
   58 E1M2=(YM+Y(I+1))*DX/4.
      EM2=E1M2+E2M2
      E=EM1+EM2
      GO TO 71
   62 F=(F1+F2)/2.
      IF (ABSF(F)-0.0000000001) 64,63,63
   63 GKL=SQRTF((Y(I+1)-Y(I))**2+DX**2)
      GVO=GKL*COSF(F)/(2.*SINF(F))
      GKO=GKL/(2.*SINF(F))
      E2=F*GKO**2-GKL*GVO/2.
      GO TO 65
   64 E2=0
   65 E1=(Y(I)+Y(I+1))*DX/2.
      E=E1+E2
```

```
71 S=S+E
72 X=X+DX/2.
   PRINT 73,XA,XB,N,S
73 FORMAT (2X,4HXA =,F5.2,4X,4HXB =,F5.2,4X,3HN =,I3,5X,3HS =,F16.12)
   GO TO 3
82 STOP
   END
```

DATA

```
 0.0  0.5   4
 0.0  0.5   8
 0.0  0.5  16
 0.0  0.5  32
 0.0  0.5  64
 1.0  2.0   4
 1.0  2.0   8
 1.0  2.0  16
 1.0  2.0  32
 1.0  2.0  64
 2.0  3.0   4
 2.0  3.0   8
 2.0  3.0  16
 2.0  3.0  32
 2.0  3.0  64
0000000000000
```

ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

Βλ. εἰς τὸν πίνακα IX

ΠΙΝΑΞ XI. Πρόγραμμα ὑπολογισμοῦ 12 ὁλοκληρωμάτων μὲ προκαθορισθεῖσαν προσέγγισιν.

ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ

```
*FANDK2006
C      PROGRAM VINT-B12
C      ****************
C      BY CLEANTHIS VENETOPOULOS,  THESSALONIKI 1969
C------------------------------------------------------------------------
C
C      NUMERICAL INTEGRATION, METHOD B
C
C------------------------------------------------------------------------
C
C      THIS PROGRAM IS ABLE TO INTEGRATE UP TO 12 FUNCTIONS GIVEN
C              SIMULTANEOUSLY, WITHIN DEFINITE LIMITS AND WITH A
C              GIVEN APPROXIMATION.
C------------------------------------------------------------------------
C
C      IF THE FUNCTION TO BE INTEGRATED CONTAINS TRIGONOMETRIC TERMS,
C              SIN(X), COS(X) OR SIN(K*X), COS(K*X) OR SIN(FX), COS(FX)
C              K BEING A NUMBER AND FX A FUNCTION OF X,
C              DX SHOULD NOT BE GREATER THAN 1 OR 1/K OR 1/(DERIV. OF X)
C              RESPECTIVELY.
C      IN THAT CASE YOU MUST CONSIDER AS NO CORRECT THE FIRST FEW RESULTS
C              GIVEN FOR A SMALL VALUE OF N.
C------------------------------------------------------------------------
C
C      ONE BLANC CARD AT THE END OF THE DATA DECK WILL CAUSE THE PROGRAM
C              TO STOP.
C------------------------------------------------------------------------
C
C      *FANDK2006
C
C
       DIMENSION Y(260), DERY(260)
   203 READ 204,KFUN,XA,XB,APPROX
   204 FORMAT (I2,F5.2,F5.2,E8.2)
       IF (KFUN) 282,282,205
   205 PRINT 206,KFUN
   206 FORMAT (///2X,72(1H-)/13X,48HRESULTS FROM THE INTEGRATION OF THE F
      1UNCTION NR.,I2/2X,72(1H-)/)
       SPR=APPROX
       N=2
   216 FN=N
       X=XA
       DX=(XB-XA)/FN
       M=N+1
       DO 221 I=1,M
C
C      ********************************
C
       GO TO (1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12),KFUN
     1 CONTINUE
       Y(I)=SINF(X)-LOGF(X)+EXPF(X)
       DERY(I)=COSF(X)-1./X+EXPF(X)
       GO TO 220
     2 CONTINUE
       Y(I)=1./X
       DERY(I)=-1./X**2
       GO TO 220
```

```
    3 CONTINUE
      Y(I)=LOGF(X)
      DERY(I)=1./X
      GO TO 220
    4 CONTINUE
      Y(I)=1./(X**2+1.)
      DERY(I)=-2.*X/(X**4+2.*X**2+1.)
      GO TO 220
    5 CONTINUE
      Y(I)=X**2+X+1.
      DERY(I)=2.*X+1.
      GO TO 220
    6 CONTINUE
      Y(I)=1.+X**2
      DERY(I)=2.*X
      GO TO 220
    7 CONTINUE
      Y(I)=X*LOGF(1.-X)
      DERY(I)=LOGF(1.-X)-X/(1.-X)
      GO TO 220
    8 CONTINUE
      Y(I)=X/SQRTF(X**2+1.)
      DERY(I)=1./(X**2+1.)**1.5
      GO TO 220
    9 CONTINUE
      Y(I)=LOGF(2.)*2.**X
      DERY(I)=2.**X*(LOGF(2.))**2
      GO TO 220
   10 CONTINUE
      Y(I)=X*LOGF(1.+X)
      DERY(I)=LOGF(1.+X)+X/(1.+X)
      GO TO 220
   11 CONTINUE
      Y(I)=X**2
      DERY(I)=2.*X
      GO TO 220
   12 CONTINUE
      Y(I)=1./(1.+X**3)
      DERY(I)=-3.*X**2/(1.+X**3)**2
  220 CONTINUE
C
C     *********************************
C
  221 X=X+DX
      S=0
      X=XA
      DO 272 I=1,N
      X=X+DX/2.
      TH=ATANF((Y(I+1)-Y(I))/DX)
      F1=ATANF(DERY(I))-TH
      F2=TH-ATANF(DERY(I+1))
      IF (F1) 233,234,233
  233 IF (F1-F2) 234,235,234
  234 IF (F1+F2) 262,264,262
  235 CONTINUE
C
C     *********************************
C
      GO TO (101,102,103,104,105,106,107,108,109,110,111,112),KFUN
  101 CONTINUE
      YM=SINF(X)-LOGF(X)+EXPF(X)
      DERYM=COSF(X)-1./X+EXPF(X)
      GO TO 251
  102 CONTINUE
```

```
      YM=1./X
      DERYM=-1./X**2
      GO TO 251
  103 CONTINUE
      YM=LOGF(X)
      DERYM=1./X
      GO TO 251
  104 CONTINUE
      YM=1./(X**2+1.)
      DERYM=-2.*X/(X**4+2.*X**2+1.)
      GO TO 251
  105 CONTINUE
      YM=X**2+X+1.
      DERYM=2.*X+1.
      GO TO 251
  106 CONTINUE
      YM=(X**2+1.)
      DERYM=2.*X
      GO TO 251
  107 CONTINUE
      YM=X*LOGF(1.-X)
      DERYM=LOGF(1.-X)-X/(1.-X)
      GO TO 251
  108 CONTINUE
      YM=X/SQRTF(X**2+1.)
      DERYM=1./(X**2+1.)**1.5
      GO TO 251
  109 CONTINUE
      YM=LOGF(2.)*2.**X
      DERYM=2.**X*(LOGF(2.))**2
      GO TO 251
  110 CONTINUE
      YM=X*LOGF(1.+X)
      DERYM=LOGF(1.+X)+X/(1.+X)
      GO TO 251
  111 CONTINUE
      YM=X**2
      DERYM=2.*X
      GO TO 251
  112 CONTINUE
      YM=1./(1.+X**3)
      DERYM=-3.*X**2/(1.+X**3)**2
  251 CONTINUE
C
C     **********************************
C
      THM1=ATANF(YM-Y(I))*2./DX
      F1M1=ATANF(DERY(I))-THM1
      F2M1=THM1-ATANF(DERYM)
      IF (F1M1-F2M1) 252,262,252
  252 FM1=(F1M1+F2M1)/2.
      IF (ABSF(FM1)-0.0000000001) 254,253,253
  253 GKLM1=SQRTF((YM-Y(T))**2+(DX/2.)**2)
      GVOM1=GKLM1*COSF(FM1)/(2.*SINF(FM1))
      GKOM1=GKLM1/(2.*SINF(FM1))
      E2M1=FM1*GKOM1**2-GKLM1*GVOM1/2.
      GO TO 255
  254 E2M1=0
  255 E1M1=(Y(I)+YM)*DX/4.
      EM1=E1M1+E2M1
      THM2=ATANF(Y(I+1)-YM)*2./DX
      F1M2=ATANF(DERYM)-THM2
      F2M2=THM2-ATANF(DERY(I+1))
      FM2=(F1M2+F2M2)/2.
```

```
      IF (ABSF(FM2)-0.0000000001) 257,256,256
  256 GKLM2=SQRTF((Y(I+1)-YM)**2+(DX/2.)**2)
      GVOM2=GKLM2*COSF(FM2)/(2.*SINF(FM2))
      GKOM2=GKLM2/(2.*SINF(FM2))
      E2M2=FM2*GKOM2**2-GKLM2*GVOM2/2.
      GO TO 258
  257 E2M2=0
  258 E1M2=(YM+Y(I+1))*DX/4.
      EM2=E1M2+E2M2
      E=EM1+EM2
      GO TO 271
  262 F=(F1+F2)/2.
      IF (ABSF(F)-0.0000000001) 264,263,263
  263 GKL=SQRTF((Y(I+1)-Y(I))**2+DX**2)
      GVO=GKL*COSF(F)/(2.*SINF(F))
      GKO=GKL/(2.*SINF(F))
      E2=F*GKO**2-GKL*GVO/2.
      GO TO 265
  264 E2=0
  265 E1=(Y(I)+Y(I+1))*DX/2.
      E=E1+E2
  271 S=S+E
  272 X=X+DX/2.
      PRINT 273,XA,XB,N,S,APPROX
  273 FORMAT (2X,4HXA =,F5.2,3X,4HXB =,F5.2,3X,3HN =,I3,4X,3HS =,F16.12,
     13X,8HAPPROX =,E8.2)
      ABSS=ABSF(S)
      SINDEX=ABSF(ABSS-SPR)/ABSS
      IF (SINDEX-APPROX) 203,203,274
  274 SPR=ABSS
      N=2*N
      GO TO 216
  282 STOP
      END
```

DATA

```
 1 0.2  1.4  .10E-07
 2 1.0  2.0  .10E-09
 3 4.0  5.2  .10E-10
 4 0.0  1.0  .10E-07
 5 1.0  2.0  .10E-08
 6 2.0  3.0  .10E-08
 7 0.0  0.5  .10E-07
 8 1.0  2.0  .10E-08
 9 2.0  3.0  .10E-08
10 0.0  1.0  .10E-05
11 1.0  2.0  .10E-07
12 0.0  1.0  .10E-06
```

ΠΙΝΑΞ XI (συνέχεια)

ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

RESULTS FROM THE INTEGRATION OF THE FUNCTION NR. 1

XA = 0.20	XB = 1.40	N = 2	S = 4.074115925608	APPROX = .10E-07
XA = 0.20	XB = 1.40	N = 4	S = 4.051482731579	APPROX = .10E-07
XA = 0.20	XB = 1.40	N = 8	S = 4.050562200144	APPROX = .10E-07
XA = 0.20	XB = 1.40	N = 16	S = 4.050922881403	APPROX = .10E-07
XA = 0.20	XB = 1.40	N = 32	S = 4.050946332967	APPROX = .10E-07
XA = 0.20	XB = 1.40	N = 64	S = 4.050947829567	APPROX = .10E-07
XA = 0.20	XB = 1.40	N =128	S = 4.050947923592	APPROX = .10E-07
XA = 0.20	XB = 1.40	N =256	S = 4.050947929476	APPROX = .10E-07

RESULTS FROM THE INTEGRATION OF THE FUNCTION NR. 2

XA = 1.00	XB = 2.00	N = 2	S = .693219893812	APPROX = .10E-09
XA = 1.00	XB = 2.00	N = 4	S = .693153487404	APPROX = .10E-09
XA = 1.00	XB = 2.00	N = 8	S = .693147600887	APPROX = .10E-09
XA = 1.00	XB = 2.00	N = 16	S = .693147207212	APPROX = .10E-09
XA = 1.00	XB = 2.00	N = 32	S = .693147182231	APPROX = .10E-09
XA = 1.00	XB = 2.00	N = 64	S = .693147180664	APPROX = .10E-09
XA = 1.00	XB = 2.00	N =128	S = .693147180566	APPROX = .10E-09
XA = 1.00	XB = 2.00	N =256	S = .693147180560	APPROX = .10E-09

RESULTS FROM THE INTEGRATION OF THE FUNCTION NR. 3

XA = 4.00	XB = 5.20	N = 2	S = 1.827849916173	APPROX = .10E-10
XA = 4.00	XB = 5.20	N = 4	S = 1.827847566073	APPROX = .10E-10
XA = 4.00	XB = 5.20	N = 8	S = 1.827847418430	APPROX = .10E-10
XA = 4.00	XB = 5.20	N = 16	S = 1.827847409191	APPROX = .10E-10
XA = 4.00	XB = 5.20	N = 32	S = 1.827847408613	APPROX = .10E-10
XA = 4.00	XB = 5.20	N = 64	S = 1.827847408577	APPROX = .10E-10
XA = 4.00	XB = 5.20	N =128	S = 1.827847408574	APPROX = .10E-10

RESULTS FROM THE INTEGRATION OF THE FUNCTION NR. 4

XA = 0.00	XB = 1.00	N = 2	S = .785913813349	APPROX = .10E-07
XA = 0.00	XB = 1.00	N = 4	S = .785414498220	APPROX = .10E-07
XA = 0.00	XB = 1.00	N = 8	S = .785399223726	APPROX = .10E-07
XA = 0.00	XB = 1.00	N = 16	S = .785398230861	APPROX = .10E-07
XA = 0.00	XB = 1.00	N = 32	S = .785398167632	APPROX = .10E-07
XA = 0.00	XB = 1.00	N = 64	S = .785398163662	APPROX = .10E-07

Κατὰ παρόμοιον τρόπον δίδονται καὶ τὰ ἀποτελέσματα ἐκ τῆς ὁλοκληρώσεως τῶν ὑπολοίπων συναρτήσεων ὑπ' ἀριθ. 5 - 12.

ΠΙΝΑΞ XII. Παράδειγμα προγράμματος ὁλοκληρώσεως ἀπὸ x_I ἕως ∞, διὰ πᾶσαν συνάρτησιν, πλὴν τῶν τριγωνομετρικῶν (ἐφαρμογὴ τῆς μεθόδου Α').

ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ

```
*FANDK2006
C       PROGRAM VINT-A21
C       ****************
C       BY CLEANTHIS VENETOPOULOS,  THESSALONIKI 1969
C-----------------------------------------------------------------------
C
C       NUMERICAL INTEGRATION, METHOD A
C
C-----------------------------------------------------------------------
C
C       A PROGRAM FOR INTEGRATION FROM A GIVEN POSITIVE OR ZERO VALUE OF X
C               TO THE INFINITY.
C-----------------------------------------------------------------------
C
C       ATTENTION.  IF, FOR X=0, IS Y(0)=INFINITE, TAKE CARE OF N.
C               IT MUST BE N)9 (TO GIVE A DX SMALLER THAN XA).
C       THIS PROGRAM SHOULD NOT BE USED WITH TRIGUNOMETRIC FUNCTIONS
C-----------------------------------------------------------------------
C
C       *FANDK2006
C
C
        DIMENSION Y(100)
        TYPE 210
  210 FORMAT (/2X,43HIF THE FUNCTION CONTAINS EXPONENTIAL TERMS,/2X,68HT
     1HE EXPONENT OF E MUST NOT BE GREATER THAN 228 OR SMALLER THAN -228
     2./2X,44HTURN PROGRAM SWITCH 1 ON IN ORDER TO INHIBIT/2X,48HMULTIPL
     3E PRINTING OF ER F5 IN THE RESULTS TABLE./2X,12HPRESS START.)
        PAUSE
        PRINT 201
  201 FORMAT (4X,74(1H-)/6X,1HN,8X,2HXA,13X,2HXB,17X,1HS,18X,2HST/4X,74(
     11H-))
  100 READ 202,N,XI
  202 FORMAT (I3,F7.3)
        PRINT 205
  205 FORMAT (/)
        IF (N) 105,182,105
  105 IF (XI) 182,108,109
  108 K=0
        XA=1.
        GO TO 110
  109 XA=XI
  110 G=10.
        ST=0
        FN=N
  111 XB=XA*10.
  112 DX=(XB-XA)/FN
        X=XA-DX
        M1=N+3
        M2=N+1
        DO 121 I=1,M1
C
C       *********************************
C
        Y(I)=1./X**2
C
C       *********************************
C
```

```
      IF (SENSE SWITCH 1) 11,121
   11 IF (ABSF(Y(I))-10.**95) 12,13,13
   12 IF (ABSF(Y(I))-10.**(-95)) 14,14,121
   13 TYPE 207,X
  207 FORMAT (/2X,8HFOR  X =,E10.4,31H  F(X) IS GREATER THAN 10.**99./2X
     1,26HCONTINUATION IS INHIBITED.)
      PRINT 208
  208 FORMAT (10X,10HEND OF RUN)
      GO TO 182
   14 S=0
      GO TO 164
  121 X=X+DX
      R=1./3.
      SY=0
      DO 162 I=2,M2
      BA=-Y(I)+2.*Y(I+1)-Y(I+2)
      BB=-Y(I-1)+2.*Y(I)-Y(I+1)
      IF (BA*BB) 145,145,146
  145 SA=Y(I)+Y(I+1)
      GO TO 162
  146 SA=Y(I)+Y(I+1)+R*BA*BB/(BA+BB)
  162 SY=SY+SA
      S=DX*SY/2.
  164 ST=ST+S
      PRINT 203,N,XA,XB,S,ST
  203 FORMAT (4X,I3,3X,E12.6,3X,E12.6,2X,F18.12,2X,F18.12)
      IF (ABSF(S)-0.0000000001) 171,172,172
  171 IF (XI) 182,175,100
  172 XA=XA*G
      XB=XB*G
      GO TO 112
  175 K=K+1
      PRINT 206
  206 FORMAT (1X)
      IF (K-1) 176,176,100
  176 XA=0.1
      G=0.1
      GO TO 111
  182 STOP
      END
```

DATA

```
 10  1.000
 40  1.000
 90  1.000
```

ΠΙΝΑΞ XII (συνέχεια)

ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

N	XA	XB	S	ST
10	.100000E+01	.100000E+02	.916216302617	.916216302617
10	.100000E+02	.100000E+03	.091621630261	1.007837932879
10	.100000E+03	.100000E+04	.009162163026	1.017000095905
10	.100000E+04	.100000E+05	.000916216302	1.017916312207
10	.100000E+05	.100000E+06	.000091621630	1.018007933838
10	.100000E+06	.100000E+07	.000009162163	1.018017096001
10	.100000E+07	.100000E+08	.000000916216	1.018018012217
10	.100000E+08	.100000E+09	.000000091621	1.018018103839
10	.100000E+09	.100000E+10	.000000009162	1.018018113001
10	.100000E+10	.100000E+11	.000000000916	1.018018113917
10	.100000E+11	.100000E+12	.000000000091	1.018018114009
40	.100000E+01	.100000E+02	.900082573120	.900082573120
40	.100000E+02	.100000E+03	.090008257312	.990090830432
40	.100000E+03	.100000E+04	.009000825731	.999091656163
40	.100000E+04	.100000E+05	.000900082573	.999991738736
40	.100000E+05	.100000E+06	.000090008257	1.000081746993
40	.100000E+06	.100000E+07	.000009000825	1.000090747819
40	.100000E+07	.100000E+08	.000000900082	1.000091647902
40	.100000E+08	.100000E+09	.000000090008	1.000091737910
40	.100000E+09	.100000E+10	.000000009000	1.000091746911
40	.100000E+10	.100000E+11	.000000000900	1.000091747811
40	.100000E+11	.100000E+12	.000000000090	1.000091747901
90	.100000E+01	.100000E+02	.900003309876	.900003309876
90	.100000E+02	.100000E+03	.090000330987	.990003640864
90	.100000E+03	.100000E+04	.009000033098	.999003673963
90	.100000E+04	.100000E+05	.000900003309	.999903677273
90	.100000E+05	.100000E+06	.000090000330	.999993677604
90	.100000E+06	.100000E+07	.000009000033	1.000002677637
90	.100000E+07	.100000E+08	.000000900003	1.000003577640
90	.100000E+08	.100000E+09	.000000090000	1.000003667640
90	.100000E+09	.100000E+10	.000000009000	1.000003676640
90	.100000E+10	.100000E+11	.000000000900	1.000003677540
90	.100000E+11	.100000E+12	.000000000090	1.000003677630

ΠΙΝΑΞ XIII. Παράδειγμα προγράμματος ὁλοκληρώσεως ἀπὸ x_I ἕως ∞, διὰ πᾶσαν συνάρτησιν, πλὴν τῶν τριγωνομετρικῶν (ἐφαρμογὴ τῆς μεθόδου Β').

ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ

```
*FANDK2006
C      PROGRAM VINT-B21
C      ****************
C      BY CLEANTHIS VENETOPOULOS,  THESSALONIKI 1969
C-----------------------------------------------------------------------
C
C      NUMERICAL INTEGRATION, METHOD B
C
C-----------------------------------------------------------------------
C
C      A PROGRAM FOR INTEGRATION FROM A GIVEN POSITIVE OR ZERO VALUE OF X
C              TO THE INFINITY.
C-----------------------------------------------------------------------
C
C      ATTENTION.
C      THIS PROGRAM SHOULD NOT BE USED WITH TRIGONOMETRIC FUNCTIONS
C-----------------------------------------------------------------------
C
C      *FANDK2006
C
C
       DIMENSION Y(100), DERY(100)
       TYPE 210
  210 FORMAT (/2X,43HIF THE FUNCTION CONTAINS EXPONENTIAL TERMS,/2X,68HT
     1HE EXPONENT OF E MUST NOT BE GREATER THAN 228 OR SMALLER THAN -228
     2./2X,44HTURN PROGRAM SWITCH 1 ON IN ORDER TO INHIBIT/2X,48HMULTIPL
     3E PRINTING OF ER F5 IN THE RESULTS TABLE./2X,12HPRESS START.)
       PAUSE
       PRINT 201
  201 FORMAT (4X,74(1H-)/6X,1HN,8X,2HXA,13X,2HXB,17X,1HS,18X,2HST/4X,74(
     11H-))
  100 READ 202,N,XI
  202 FORMAT (I3,F7.3)
       PRINT 205
  205 FORMAT (/)
       IF (N) 105,182,105
  105 IF (XI) 182,108,109
  108 K=0
       XA=1.
       GO TO 110
  109 XA=XI
  110 G=10.
       ST=0
       FN=N
  111 XB=XA*10.
  112 DX=(XB-XA)/FN
       X=XA
       M=N+1
       DO 21 I=1,M
C
C      ********************************
C-
       Y(I)=EXPF(-X**2)
       DERY(I)=-2.*X*EXPF(-X**2)
C
C      ********************************
C
       IF (SENSE SWITCH 1) 11,21
```

ΠΙΝΑΞ XIII (συνέχεια)

```
   11 IF (ABSF(Y(I))-10.**95) 12,13,13
   12 IF (ABSF(Y(I))-10.**(-95)) 14,14,21
   13 TYPE 207,X
  207 FORMAT (/2X,8HFOR  X =,E10.4,31H  F(X) IS GREATER THAN 10.**99./2X
     1,26HCONTINUATION IS INHIBITED.)
      PRINT 208
  208 FORMAT (10X,10HEND OF RUN)
      GO TO 182
   14 S=0
      GO TO 73
   21 X=X+DX
      S=0
      X=XA
      DO 72 I=1,N
      X=X+DX/2.
      TH=ATANF((Y(I+1)-Y(I))/DX)
      F1=ATANF(DERY(I))-TH
      F2=TH-ATANF(DERY(I+1))
      IF (F1) 33,34,33
   33 IF (F1-F2) 34,35,34
   34 IF (F1+F2) 62,64,62
   35 CONTINUE
C
C     ********************************
C
      YM=EXPF(-X**2)
      DERYM=-2.*X*EXPF(-X**2)
C
C     ********************************
C
      THM1=ATANF(YM-Y(I))*2./DX
      F1M1=ATANF(DERY(I))-THM1
      F2M1=THM1-ATANF(DERYM)
      IF (F1M1-F2M1) 52,62,52
   52 FM1=(F1M1+F2M1)/2.
      IF (ABSF(FM1)-0.00000DD001) 54,53,53
   53 GKLM1=SQRTF((YM-Y(I))**2+(DX/2.)**2)
      GVOM1=GKLM1*COSF(FM1)/(2.*SINF(FM1))
      GKOM1=GKLM1/(2.*SINF(FM1))
      E2M1=FM1*GKOM1**2-GKLM1*GVOM1/2.
      GO TO 55
   54 E2M1=0
   55 E1M1=(Y(I)+YM)*DX/4.
      EM1=E1M1+E2M1
      THM2=ATANF(Y(I+1)-YM)*2./DX
      F1M2=ATANF(DERYM)-THM2
      F2M2=THM2-ATANF(DERY(I+1))
      FM2=(F1M2+F2M2)/2.
      IF (ABSF(FM2)-0.000D000001) 57,56,56
   56 GKLM2=SQRTF((Y(I+1)-YM)**2+(DX/2.)**2)
      GVOM2=GKLM2*COSF(FM2)/(2.*SINF(FM2))
      GKOM2=GKLM2/(2.*SINF(FM2))
      E2M2=FM2*GKOM2**2-GKLM2*GVOM2/2.
      GO TO 58
   57 E2M2=0
   58 E1M2=(YM+Y(I+1))*DX/4.
      EM2=E1M2+E2M2
      E=EM1+EM2
      GO TO 71
   62 F=(F1+F2)/2.
      IF (ABSF(F)-0.0000000001) 64,63,63
   63 GKL=SQRTF((Y(I+1)-Y(I))**2+DX**2)
      GVO=GKL*COSF(F)/(2.*SINF(F))
      GKO=GKL/(2.*SINF(F))
```

```
      E2=F*GKO**2-GKL*GVO/2.
      GO TO 65
 64   E2=0
 65   E1=(Y(I)+Y(I+1))*DX/2.
      E=E1+E2
 71   S=S+E
 72   X=X+DX/2.
 73   ST=ST+S
      PRINT 203,N,XA,XB,S,ST
203   FORMAT (4X,I3,3X,E12.6,3X,E12.6,2X,F18.12,2X,F18.12)
      IF (ABSF(S)-0.0000000001) 171,172,172
171   IF (XI) 182,175,100
172   XA=XA*G
      XB=XB*G
      GO TO 112
175   K=K+1
      PRINT 206
206   FORMAT (1X)
      IF (K-1) 176,176,100
176   XA=0.1
      G=0.1
      GO TO 111
182   STOP
      END
```

DATA

```
 10  0.000
 40  0.000
 90  0.000
```

ΠΙΝΑΞ XIII (συνέχεια)

ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

N	XA	XB	S	ST
10	.100000E+01	.100000E+02	.141882750838	.141882750838
10	.100000E+02	.100000E+03	.000000000000	.141882750838
10	.100000E-00	.100000E+01	.647156999101	.789039749939
10	.100000E-01	.100000E-00	.089667997588	.878707747527
10	.100000E-02	.100000E-01	.008999667009	.887707414537
10	.100000E-03	.100000E-02	.000899999667	.888607414204
10	.100000E-04	.100000E-03	.000089999999	.888697414204
10	.100000E-05	.100000E-04	.000008999999	.888706414204
10	.100000E-06	.100000E-05	.000000899999	.888707314204
10	.100000E-07	.100000E-06	.000000089999	.888707404204
10	.100000E-08	.100000E-07	.000000008999	.888707413204
10	.100000E-09	.100000E-08	.000000000899	.888707414104
10	.100000E-10	.100000E-09	.000000000090	.888707414194
40	.100000E+01	.100000E+02	.139409050812	.139409050812
40	.100000E+02	.100000E+03	.000000000000	.139409050812
40	.100000E-00	.100000E+01	.647156470587	.786565521399
40	.100000E-01	.100000E-00	.089667997613	.876233519013
40	.100000E-02	.100000E-01	.008999667009	.885233186023
40	.100000E-03	.100000E-02	.000899999667	.886133185690
40	.100000E-04	.100000E-03	.000089999999	.886223185690
40	.100000E-05	.100000E-04	.000008999999	.886232185690
40	.100000E-06	.100000E-05	.000000899999	.886233085690
40	.100000E-07	.100000E-06	.000000089999	.886233175690
40	.100000E-08	.100000E-07	.000000008999	.886233184690
40	.100000E-09	.100000E-08	.000000000899	.886233185590
40	.100000E-10	.100000E-09	.000000000090	.886233185680
90	.100000E+01	.100000E+02	.139403034031	.139403034031
90	.100000E+02	.100000E+03	.000000000000	.139403034031
90	.100000E-00	.100000E+01	.647156468602	.786559502634
90	.100000E-01	.100000E-00	.089667997613	.876227500247
90	.100000E-02	.100000E-01	.008999667009	.885227167257
90	.100000E-03	.100000E-02	.000899999667	.886127166924
90	.100000E-04	.100000E-03	.000089999999	.886217166924
90	.100000E-05	.100000E-04	.000008999999	.886226166924
90	.100000E-06	.100000E-05	.000000899999	.886227066924
90	.100000E-07	.100000E-06	.000000089999	.886227156924
90	.100000E-08	.100000E-07	.000000008999	.886227165924
90	.100000E-09	.100000E-08	.000000000899	.886227166824
90	.100000E-10	.100000E-09	.000000000090	.886227166914

ΠΙΝΑΞ XIV. Παράδειγμα προγράμματος ὁλοκληρώσεως ἀπὸ x_1 ἕως ∞, εἰδικὸν διὰ τριγωνομετρικὰς συναρτήσεις (ἐφαρμογὴ τῆς μεθόδου Α').

ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ - DATA

```
*FANDK2006
C      PROGRAM VINT-A23
C      ****************
C      BY CLEANTHIS VENETOPOULOS,  THESSALONIKI 1969
C-------------------------------------------------------------------
C
C   -  NUMERICAL INTEGRATION, METHOO A
C
C-------------------------------------------------------------------
C
C      A PROGRAM FOR INTEGRATION FROM A GIVEN POSITIVE OR ZERO VALUE OF X
C              TO THE INFINITY.
C-------------------------------------------------------------------
C
C      THIS PROGRAM SHOULO BE USED ONLY WITH TRIGONOMETRIC FUNCTIONS
C                                  -------------------------------
C      ATTENTION. BEFORE WRITING OATA BE SURE N HAS THE PROPER VALUE.
C              XA SHOULO ALWAYS BE GREATER THAN DX.
C              A GOOO VALUE OF N WILL GIVE XI*FN GREATER THAN 10, BUT IT
C              SHOULO NEVER BE SMALLER THAN 10.
C              IF THE FUNCTION CONTAINS SIN(X) OR COS(X)
C              N SHOULO NOT BE SMALLER THAN 10
C              IF THE FUNCTION CONTAINS SIN(K*X) OR COS(K*X),
C              N SHOULD NOT BE SMALLER THAN 10*K
C              IF FX IS A FUNCTION OF X AND THE INTEGRATED FUNCTION
C              CONTAINS SIN(FX) OR CUS(FX),
C              THEN THE MINIMUM VALUE OF N SHOULD BE 10*(DERIVATIVE OF FX)
C              IF THE LOWER LIMIT OF INTEGRATION IS ZERO, N MAY BE GIVEN
C              ANY VALUE BUT NOT SMALLER THAN 10*K
C-------------------------------------------------------------------
C
C      *FANDK2006
C
C
       DIMENSION Y(100)
       TYPE 210
   210 FORMAT (/2X,43HIF THE FUNCTION CONTAINS EXPONENTIAL TERMS,/2X,68HT
      1HE EXPONENT OF E MUST NOT BE GREATER THAN 228 OR SMALLER THAN -228
      2./2X,44HTURN PROGRAM SWITCH 1 ON IN ORDER TO INHIBIT/2X,48HMULTIPL
      3E PRINTING OF ER F5 IN THE RESULTS TABLE./2X,12HPRESS START.)
       PAUSE
       PRINT 201
   201 FORMAT (4X,74(1H-)/6X,1HN,8X,2HXA,13X,2HXB,17X,1HS,18X,2HST/4X,74(
      11H-))
   100 READ 202,N,XI
   202 FORMAT (13,F7.3)
       PRINT 205
   205 FORMAT (/)
       IF (N) 105,182,105
   105 IF (XI) 182,108,109
   108 K=0
       XA=1.
       XB=10.
       GO TO 110
   109 XA=XI
       XB=XA+10.
   110 ST=0
       FN=N
```

```
      GO TO 112
  111 XB=XA+10.
  112 DX=(XB-XA)/FN
      X=XA-DX
      M1=N+3
      M2=N+1
      DO 121 I=1,M1
C
C     ********************************
C
      Y(I)=SINF(X)/X
C
C     ********************************
C
      IF (SENSE SWITCH 1) 11,121
   11 IF (ABSF(Y(I))-10.**95) 12,13,13
   12 IF (ABSF(Y(I))-10.**(-95)) 14,14,121
   13 TYPE 207,X
  207 FORMAT (/2X,8HFOR  X =,E10.4,31H  F(X) IS GREATER THAN 10.**99./2X
     1,26HCONTINUATION IS INHIBITED.)
      PRINT 208
  208 FORMAT (10X,10HEND OF RUN)
    . GO TO 182
   14 S=0
      GO TO 164
  121 X=X+DX
      R=1./3.
      SY=0
      DO 162 I=2,M2
      BA=-Y(I)+2.*Y(I+1)-Y(I+2)
      BB=-Y(I-1)+2.*Y(I)-Y(I+1)
      IF (BA*BB) 145,145,146
  145 SA=Y(I)+Y(I+1)
      GO TO 162
  146 SA=Y(I)+Y(I+1)+R*BA*BB/(BA+BB)
  162 SY=SY+SA
      S=DX*SY/2.
  164 ST=ST+S
      PRINT 203,N,XA,XB,S,ST
  203 FORMAT (4X,I3,3X,E12.6,3X,E12.6,2X,F18.12,2X,F18.12)
      IF (ABSF(S)-0.0000001) 171,170,170
  170 IF (XI) 182,172,173
  171 IF (XI) 182,175,100
  172 IF (K-1) 174,173,174
  173 XA=XB
      GO TO 111
  174 XB=XA
      XA=XA*0.1
      GO TO 112
  175 K=K+1
      PRINT 206
  206 FORMAT (1X)
      IF (K-1) 176,176,100
  176 XA=10.
      GO TO 111
  182 STOP
      END
 10  1.000
 40  1.000
```

ΠΙΝΑΞ XIV (συνέχεια)

ΑΠΟΤΕΑΕΣΜΑΤΑ

N	XA	XB	S	ST
40	.100000E+01	.110000E+02	.632240904237	.632240904237
40	.110000E+02	.210000E+02	.016583790451	.648824694689
40	.210000E+02	.310000E+02	-.053119505191	.595705189497
40	.310000E+02	.410000E+02	.053168966278	.648874155776
40	.410000E+02	.510000E+02	-.038939342155	.609934813621
40	.510000E+02	.610000E+02	.019284498047	.629219311669
40	.610000E+02	.710000E+02	-.000326364347	.628892947321
40	.710000E+02	.810000E+02	-.013651087468	.615241859852
40	.810000E+02	.910000E+02	.020398695133	.635640554986
40	.910000E+02	.101000E+03	-.019782497106	.615858057880
40	.101000E+03	.111000E+03	.013469605918	.629327663799
40	.111000E+03	.121000E+03	-.004262812268	.625064851531
40	.121000E+03	.131000E+03	-.004745243829	.620319607701
40	.131000E+03	.141000E+03	.010999947510	.631319555212
40	.141000E+03	.151000E+03	-.013081337354	.618238217857
40	.151000E+03	.161000E+03	.010940210834	.629178428692
40	.161000E+03	.171000E+03	-.005738564709	.623439863982
40	.171000E+03	.181000E+03	-.000617957525	.622821906457
40	.181000E+03	.191000E+03	.006100857776	.628922764234
40	.191000E+03	.201000E+03	-.009154104611	.619768659622
40	.201000E+03	.211000E+03	.009101406338	.628870065960
40	.211000E+03	.221000E+03	-.006255536241	.622614529719
40	.221000E+03	.231000E+03	.001733651272	.624348180991
40	.231000E+03	.241000E+03	.002940050724	.627288231716
40	.241000E+03	.251000E+03	-.006323739981	.620964491734
40	.251000E+03	.261000E+03	.007483895796	.628448387531
40	.261000E+03	.271000E+03	-.006236188892	.622212198638
40	.271000E+03	.281000E+03	.003142476094	.625354674733
40	.281000E+03	.291000E+03	.000712282849	.626066957582
40	.291000E+03	.301000E+03	-.004084562423	.621982395159
40	.301000E+03	.311000E+03	.005962440353	.627944835513
40	.311000E+03	.321000E+03	-.005861938972	.622082896540
40	.321000E+03	.331000E+03	.003937957702	.626020854243
40	.331000E+03	.341000E+03	-.000897109613	.625123744629
40	.341000E+03	.351000E+03	-.002248609140	.622875135488
40	.351000E+03	.361000E+03	.004513181914	.627388317402
40	.361000E+03	.371000E+03	-.005240063059	.622148254342
40	.371000E+03	.381000E+03	.004285999129	.626434253471
40	.381000E+03	.391000E+03	-.002036727571	.624397525900
40	.391000E+03	.401000E+03	-.000738543558	.623658982342
40	.401000E+03	.411000E+03	.003144835073	.626803817416
40	.411000E+03	.421000E+03	-.004446527574	.622357289841
40	.421000E+03	.431000E+03	.004289359815	.626646649657
40	.431000E+03	.441000E+03	-.002790173844	.623856475812
40	.441000E+03	.451000E+03	.000479368414	.624335844227
40	.451000E+03	.461000E+03	.001880939155	.626216783382

Ὁ πίναξ τῶν ἀποτελεσμάτων συνεχίζεται μέχρις ἐπιτεύξεως ἱκανοποιητικῶς μικρᾶς τιμῆς τοῦ S.

ΠΙΝΑΞ XV. Παράδειγμα προγράμματος ὁλοκληρώσεως ἀπὸ x_1 *ἕως* ∞, *εἰδικὸν διὰ τριγωνομετρικὰς συναρτήσεις (ἐφαρμογὴ τῆς μεθόδου Β').*

ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ

```
*FANOK2006
C      PROGRAM VINT-B23
C      ****************
C      BY CLEANTHIS VENETOPOULOS,  THESSALONIKI 1969
C-------------------------------------------------------------------------
C
C      NUMERICAL INTEGRATION, METHOO B
C
C-------------------------------------------------------------------------
C
C      A PROGRAM FOR INTEGRATION FROM A GIVEN POSITIVE OR ZERO VALUE OF X
C             TO THE INFINITY.
C-------------------------------------------------------------------------
C
C      THIS PROGRAM SHOULO BE USEO ONLY WITH TRIGONOMETRIC FUNCTIONS
C                              --------------------------------
C      ATTENTION. BEFORE WRITING DATA BE SURE N HAS THE PROPER VALUE.
C             IF THE FUNCTION COMTAINS SIN(X) OR COS(X)
C             N SHOULD NOT BE SMALLER THAN 10
C             IF THE FUNCTION CONTAINS SIN(K*X) OR COS(K*X),
C             N SHOULO NOT BE SMALLER THAN 10*K
C             IF FX IS A FUNCTION OF X AND THE INTEGRATEO FUNCTION
C             CONTAINS SIN(FX) OR COS(FX),
C             THEN THE MINTMUM VALUE OF N SHOULD BE 10*(OERIVATIVE OF FX)
C-------------------------------------------------------------------------
C
C      *FANOK2006
C
C
      OIMENSION Y(100), DERY(100)
      TYPE 210
  210 FORMAT (/2X,43HIF THE FUNCTION COMTAINS EXPONENTIAL TERMS,/2X,68HT
     1HE EXPONENT OF E MUST NOT BE GREATER THAN 228 OR SMALLER THAN -228
     2./2X,44HTURN PROGRAM SWITCH 1 ON IN ORDER TO IMHIBIT/2X,48HMULTIPL
     3E PRINTING OF ER F5 IN THE RESULTS TABLE./2X,12HPRESS START.)
      PAUSE
      PRINT 201
  201 FORMAT (4X,74(1H-)/6X,1HN,8X,2HXA,13X,2HXB,17X,1HS,18X,2HST/4X,74(
     11H-))
  100 READ 202,N,XI
  202 FORMAT (I3,F7.3)
      PRINT 205
  205 FORMAT (/)
      IF (N) 105,182,105
  105 IF (XI) 182,108,109
  108 K=0
      XA=1.
      X8=10.
      GO TO 110
  109 XA=XI
      XB=XA+10.
  110 ST=0
      FN=N
      GO TO 112
  111 XB=XA+10.
  112 DX=(XB-XA)/FN
      X=XA
```

```
      M=N+1
      DO 21 I=1,M
C
C     ********************************
C
      Y(I)=SINF(X)/SQRTF(X)
      DERY(I)=(COSF(X)-0.5*SINF(X)/X)/SQRTF(X)
C
C     ********************************
C
      IF (SENSE SWITCH 1) 11,21
   11 IF (ABSF(Y(I))-10.**95) 12,13,13
   12 IF (ABSF(Y(I))-10.**(-95)) 14,14,21
   13 TYPE 207,X
  207 FORMAT (/2X,8HFOR  X =,E10.4,31H  F(X) IS GREATER THAN 10.**99./2X
     1,26HCONTINUATION IS INHIBITED.)
      PRINT 208
  208 FORMAT (10X,10HEND OF RUN)
      GO TO 182
   14 S=0
      GO TO 73
   21 X=X+DX
      S=0
      X=XA
      DO 72 I=1,N
      X=X+DX/2.
      TH=ATANF((Y(I+1)-Y(I))/DX)
      F1=ATANF(DERY(I))-TH
      F2=TH-ATANF(DERY(I+1))
      IF (F1) 33,34,33
   33 IF (F1-F2) 34,35,34
   34 IF (F1+F2) 62,64,62
   35 CONTINUE
C
C     ********************************
C
      YM=SINF(X)/SQRTF(X)
      DERYM=(COSF(X)-0.5*SINF(X)/X)/SQRTF(X)
C
C     ********************************
C
      THM1=ATANF(YM-Y(I))*2./DX
      F1M1=ATANF(DERY(I))-THM1
      F2M1=THM1-ATANF(DERYM)
      IF (F1M1-F2M1) 52,62,52
   52 FM1=(F1M1+F2M1)/2.
      IF (ABSF(FM1)-0.0000000001) 54,53,53
   53 GKLM1=SQRTF((YM-Y(I))**2+(DX/2.)**2)
      GVOM1=GKLM1*COSF(FM1)/(2.*SINF(FM1))
      GKOM1=GKLM1/(2.*SINF(FM1))
      E2M1=FM1*GKOM1**2-GKLM1*GVOM1/2.
      GO TO 55
   54 E2M1=0
   55 E1M1=(Y(I)+YM)*DX/4.
      EM1=E1M1+E2M1
      THM2=ATANF(Y(I+1)-YM)*2./DX
      F1M2=ATANF(DERYM)-THM2
      F2M2=THM2-ATANF(DERY(I+1))
      FM2=(F1M2+F2M2)/2.
      IF (ABSF(FM2)-0.0000000001) 57,56,56
   56 GKLM2=SQRTF((Y(I+1)-YM)**2+(DX/2.)**2)
      GVOM2=GKLM2*COSF(FM2)/(2.*SINF(FM2))
      GKOM2=GKLM2/(2.*SINF(FM2))
      E2M2=FM2*GKOM2**2-GKLM2*GVOM2/2.
```

```
      GO TO 58
   57 E2M2=0
   58 E1M2=(YM+Y(I+1))*DX/4.
      EM2=E1M2+E2M2
      E=EM1+EM2
      GO TO 71
   62 F=(F1+F2)/2.
      IF (ABSF(F)-0.0000000001) 64,63,63
   63 GKL=SQRTF((Y(I+1)-Y(I))**2+DX**2)
      GVO=GKL*COSF(F)/(2.*SINF(F))
      GKO=GKL/(2.*SINF(F))
      E2=F*GKO**2-GKL*GVO/2.
      GO TO 65
   64 E2=0
   65 E1=(Y(I)+Y(I+1))*DX/2.
      E=E1+E2
   71 S=S+E
   72 X=X+DX/2.
   73 ST=ST+S
      PRINT 203,N,XA,XB,S,ST
  203 FORMAT (4X,I3,3X,E12.6,3X,E12.6,2X,F18.12,2X,F18.12)
      IF (ABSF(S)-0.0000001) 171,170,170
  170 IF (XI) 182,172,173
  171 IF (XI) 182,175,100
  172 IF (K-1) 174,173,174
  173 XA=XB
      GO TO 111
  174 XB=XA
      XA=XA*0.1
      GO TO 112
  175 K=K+1
      PRINT 206
  206 FORMAT (1X)
      IF (K-1) 176,176,100
  176 XA=10.
      GO TO 111
  182 STOP
      END
```

DATA

```
 10   0.000
```

ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

N	XA	XB	S	ST
10	.100000E+01	.100000E+02	.904609096545	.904609096545
10	.100000E-00	.100000E+01	.599470834898	1.504079931444
10	.100000E-01	.100000E-00	.020400133732	1.524480065176
10	.100000E-02	.100000E-01	.000645580043	1.525125645219
10	.100000E-03	.100000E-02	.000020415182	1.525146060402
10	.100000E-04	.100000E-03	.000000645584	1.525146705987
10	.100000E-05	.100000E-04	.000000020415	1.525146726402
10	.100000E+02	.200000E+02	-.367479429670	1.157667296731
10	.200000E+02	.300000E+02	.070928175184	1.228595471915
10	.300000E+02	.400000E+02	.128858143512	1.357453615428
10	.400000E+02	.500000E+02	-.239637098411	1.117816517016
10	.500000E+02	.600000E+02	.258952174052	1.376768691069
10	.600000E+02	.700000E+02	-.199324750565	1.177443940504
10	.700000E+02	.800000E+02	.089256259150	1.266700199654
10	.800000E+02	.900000E+02	.033612847636	1.300313047291
10	.900000E+02	.100000E+03	-.132480673474	1.167832373816
10	.100000E+03	.110000E+03	.180981442343	1.348813816160
10	.110000E+03	.120000E+03	-.169568691081	1.179245125078
10	.120000E+03	.130000E+03	.106916311215	1.286161436294
10	.130000E+03	.140000E+03	-.016084131448	1.270077304846
10	.140000E+03	.150000E+03	-.073210534641	1.196866770204
10	.150000E+03	.160000E+03	.133779150111	1.330645920316
10	.160000E+03	.170000E+03	-.148880473144	1.181765447171
10	.170000E+03	.180000E+03	.116623701466	1.298389148638
10	.180000E+03	.190000E+03	-.049702588543	1.248686560094
10	.190000E+03	.200000E+03	-.029249398604	1.219437161490
10	.200000E+03	.210000E+03	.095072534150	1.314509695640
10	.210000E+03	.220000E+03	-.127902217826	1.186607477814
10	.220000E+03	.230000E+03	.119026721064	1.305634198879
10	.230000E+03	.240000E+03	-.073079175155	1.232555023724
10	.240000E+03	.250000E+03	.006030205203	1.238585228927
10	.250000E+03	.260000E+03	.060233667242	1.298818896170
10	.260000E+03	.270000E+03	-.104939941695	1.193878954474
10	.270000E+03	.280000E+03	.114849574183	1.308728528657
10	.280000E+03	.290000E+03	-.088110730875	1.220617797782
10	.290000E+03	.300000E+03	.034433911079	1.255051708861
10	.300000E+03	.310000E+03	.028345922676	1.283397631538
10	.310000E+03	.320000E+03	-.080125410226	1.203272221312
10	.320000E+03	.330000E+03	.104906089238	1.308178310550
10	.330000E+03	.340000E+03	-.095688985848	1.212489324701
10	.340000E+03	.350000E+03	.056404364291	1.268893688993
10	.350000E+03	.360000E+03	-.000352729343	1.268540959650
10	.360000E+03	.370000E+03	-.054252675351	1.214288284298
10	.370000E+03	.380000E+03	.090159439068	1.304447723366
10	.380000E+03	.390000E+03	-.096488787216	1.207958936150
10	.390000E+03	.400000E+03	.072002763853	1.279961700003
10	.400000E+03	.410000E+03	-.025248308662	1.254713391340
10	.410000E+03	.420000E+03	-.028390745483	1.226322645857
10	.420000E+03	.430000E+03	.071724747040	1.298047392897

Ὁ πίναξ τῶν ἀποτελεσμάτων συνεχίζεται μέχρις ἐπιτεύξεως ἱκανοποιητικῶς μικρᾶς τιμῆς τοῦ S.

ΠΙΝΑΞ XVI. Ἀποτελέσματα ὁλοκληρώσεως 15 συναρτήσεων ἀπὸ x_I ἕως ∞, πρὸς ἔλεγχον καὶ σύγκρισιν τῶν μεθόδων Α' καὶ Β'.

Α/Α	Y = F(x)	Ὅρια ὁλοκλ.	Πραγματικὴ τιμὴ S_o	N	Ὑπολογισθεῖσα τιμὴ S — Μέθοδος Α'	Ὑπολογισθεῖσα τιμὴ S — Μέθοδος Β'
21	e^{-x}	0 - ∞	1.0	10	1.001 312	0.999 515
				45	1.000 005 940	0.999 998 635
				90	1.000 000 429	0.999 999 912
22	e^{-v} $(v = x^2)$	0 - ∞	0.886 226 9	10	0.911	0.890 068
				45	0.886 333	0.886 230 821
				90	0 886 233 768	0.886 227 166
23	xe^{-v} $(v = x^2)$	0 - ∞	0.5	10	0.449 223	0.505 513
				45	0.500 213	0.500 009 830
				90	0.500 023 440	0.500 000 615
24	x^2e^{-v} $(v = x^2)$	0 - ∞	0.443 113 5	10	0.436 229	0.449 264
				45	0.443 039	0.443 118 880
				90	0.443 108 265	0.443 113 792
25	$e^{-x}\log x$	0 - ∞	-.577 215 7	10	-.583 603	-.575 030
				45	-.577 239 664	-.577 214 176
				90	-.577 218 528	-.577 215 583
26	$e^{-x}\left(\frac{1}{1-e^{-x}} - \frac{1}{x}\right)$	0	0.577 215 7	10	0.577 785	
				45	0.577 219 303	
				90	0.577 215 941	
27	$\frac{1}{x}\left(\frac{1}{x+1} - e^{-x}\right)$	0 - ∞	0.577 215 7	10	0.578 567	
				45	0.577 215 473	
				90	0.577 215 383	
28	$\log\left(\frac{e^x+1}{e^x-1}\right)$	0 - ∞	2.467 401 1	10	2.466 180	
				45	2.467 405 859	
				90	2.467 401 515	
31	$\frac{1}{x^2}$	1 - ∞	1.0	10	1.018 018	1.006 722
				45	1.000 057 668	0.999 990 772
				90	1.000 003 677	0.999 996 799
32	$\frac{1}{x^3}$	1 - ∞	0.5	10	0.542 897	0.523 362 464
				45	0.500 191	0.499 966 212
				90	0.500 012 458	0.499 997 038

ΠΙΝΑΞ XVI (συνέχεια)

Α/Α	$Y = F(x)$	Όρια ὁλοκλ.	Πραγματικὴ τιμὴ S_o	N	Ὑπολογισθεῖσα τιμὴ S Μέθοδος Α΄	Μέθοδος Β΄
33	e^{-x}	1 - ∞	0.367 879 44	10	0.369 191	0.367 395
				45	0.367 885 381	0.367 878 098
				90	0.367 879 870	0.367 879 353
41	$\sin^2 x / x^2$	0 - ∞	1.570 796 3	10	1.583 769	1.571 026
				20	1.571 148	
42	$\sin x / x$	0 - ∞	1.253 314 1	10	1.252 . . .	1.253 3 .
				20	1.253 . . .	
43	$\sin x / x$	0 - ∞	1.570 796 3	45		1.570 8 . .
51	$\sin x / x$	1 - ∞	0.624 713 2	10	0.629 . . .	0.625 . . .
				20	0.625 0. . .	0.624 75 . .
				40	0.624 7 . . .	

ΠΙΝΑΞ XVII. Πρόγραμμα ὁλοκληρώσεως σειρᾶς τιμῶν ἀγνώστου συναρτήσεως διὰ τῆς μεθόδου Α'.

ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ

```
*FANDK2006
C      PROGRAM VINT-A31
C      ***************
C      BY CLEANTHIS VENETOPOULOS,  THESSALONIKI 1969
C-----------------------------------------------------------------
C
C      NUMERICAL INTEGRATION, METHOD A
C
C-----------------------------------------------------------------
C
C      A PROGRAM FOR INTEGRATION OF AN UNKNOWN FUNCTION,
C      WHEN A NUMBER OF MEASUREMENTS ARE GIVEN
C-----------------------------------------------------------------
C
C      *FANDK2006
C
C
       DIMENSION Y(200)
       READ 101,NM,DX
  101  FORMAT (I3,E12.6)
       NM1=NM+1
       READ 103,(Y(I),I=2,NM1)
  103  FORMAT (6E12.6)
       DY23=Y(3)-Y(2)
       DY34=Y(4)-Y(3)
       DY45=Y(5)-Y(4)
       DDY3=DY34-DY23
       DDY4=DY45-DY34
       DDDY=DDY4-DDY3
       DDY2=DDY3-DDDY
       DY12=DY23-DDY2
       Y(1)=Y(2)-DY12
       DY23T=Y(NM)-Y(NM+1)
       DY34T=Y(NM-1)-Y(NM)
       DY45T=Y(NM-2)-Y(NM-1)
       DDY3T=DY34T-DY23T
       DDY4T=DY45T-DY34T
       DDDYT=DDY4T-DDY3T
       DDY2T=DDY3T-DDDYT
       DD12T=DY23T-DDY2T
       Y(NM+2)=Y(NM+1)-DY12T
       R=1./3.
       SY=0
       DO 162 I=2,NM
       BA=-Y(I)+2.*Y(I+1)-Y(I+2)
       BB=-Y(I-1)+2.*Y(I)-Y(I+1)
       IF (BA*BB) 145,145,146
  145  SA=Y(I)+Y(I+1)
       GO TO 162
  146  SA=Y(I)+Y(I+1)+R*BA*BB/(BA+BB)
  162  SY=SY+SA
       S=DX*SY/2.
       PRINT 105,NM,S
  105  FORMAT (5X,4HNM =,I3,5X,3HS =,F16.12)
  182  STOP
       END
```

DATA

```
091 .174533E-01
 .000000E+00 .017450E+00 .034900E+00 .052340E+00 .069760E+00 .087160E+00
 .104530E+00 .121870E+00 .139170E+00 .156430E+00 .173650E+00 .190810E+00
 .207910E+00 .224950E+00 .241920E+00 .258820E+00 .275640E+00 .292370E+00
 .309020E+00 .325570E+00 .342020E+00 .358370E+00 .374610E+00 .390730E+00
 .406740E+00 .422620E+00 .438370E+00 .453990E+00 .469470E+00 .484810E+00
 .500000E+00 .515040E+00 .529920E+00 .544640E+00 .559190E+00 .573580E+00
 .587790E+00 .601200E+00 .615660E+00 .629320E+00 .642790E+00 .656060E+00
 .669130E+00 .682000E+00 .694660E+00 .707110E+00 .719340E+00 .731350E+00
 .743140E+00 .754710E+00 .766040E+00 .777150E+00 .788010E+00 .798640E+00
 .809020E+00 .819150E+00 .829040E+00 .838670E+00 .848050E+00 .857170E+00
 .866030E+00 .874620E+00 .882950E+00 .891010E+00 .898790E+00 .906310E+00
 .913550E+00 .920500E+00 .927180E+00 .933580E+00 .939690E+00 .945520E+00
 .951060E+00 .956300E+00 .961260E+00 .965930E+00 .970300E+00 .974370E+00
 .978150E+00 .981630E+00 .984810E+00 .987690E+00 .990270E+00 .992550E+00
 .994520E+00 .996190E+00 .997560E+00 .998630E+00 .999390E+00 .999850E+00
 .100000E+01
```

ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

Βλ. εἰς τὸν πίνακα XIX

ΠΙΝΑΞ XVIII. Πρόγραμμα ὁλοκληρώσεως σειρᾶς τιμῶν ἀγνώστου συναρτήσεως διὰ τῆς μεθόδου B'.

ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ

```
*FANOK2006
C      PROGRAM VINT-B31
C      ****************
C      BY CLEANTHIS VENETOPOULOS,  THESSALONIKI 1969
C-----------------------------------------------------------------------
C
C      NUMERICAL INTEGRATION, METHOD B
C
C-----------------------------------------------------------------------
C
C      A PROGRAM FOR INTEGRATION OF AN UNKNOWN FUNCTION,
C      WHEN A NUMBER OF MEASUREMENTS ARE GIVEN
C-----------------------------------------------------------------------
C
C      *FANOK2006
C
C
      DIMENSION Y(200), DERY(200)
      READ 101,NM,DX
  101 FORMAT (I3,E12.6)
      NM1=NM+1
      READ 103,(Y(I),I=2,NM1)
  103 FORMAT (6E12.6)
      DY23=Y(3)-Y(2)
      DY34=Y(4)-Y(3)
      DY45=Y(5)-Y(4)
      DDY3=DY34-DY23
      DDY4=DY45-DY34
      DDDY=DDY4-DDY3
      DDY2=DDY3-DDDY
      DY12=DY23-DDY2
      Y(1)=Y(2)-DY12
      DY23T=Y(NM)-Y(NM+1)
      DY34T=Y(NM-1)-Y(NM)
      DY45T=Y(NM-2)-Y(NM-1)
      DDY3T=DY34T-DY23T
      DDY4T=DY45T-DY34T
      DDDYT=DDY4T-DDY3T
      DDY2T=DDY3T-DDDYT
      DD12T=DY23T-DDY2T
      Y(NM+2)=Y(NM+1)-DY12T
      DO 115 I=2,NM1
      DERY(I)=(Y(I+1)-Y(I-1))/(2.*DX)
  115 CONTINUE
      S=0
      DO 71 I=2,NM
      TH=ATANF((Y(I+1)-Y(I))/DX)
      F1=ATANF(DERY(I))-TH
      F2=TH-ATANF(DERY(I+1))
      IF (F1) 33,34,33
   33 IF (F1-F2) 34,62,34
   34 IF (F1+F2) 62,64,62
   62 F=(F1+F2)/2.
      IF (ABSF(F)-0.0000000001) 64,63,63
   63 GKL=SQRTF((Y(I+1)-Y(I))**2+DX**2)
      GVO=GKL*COSF(F)/(2.*SINP(F))
      GKO=GKL/(2.*SINF(F))
      E2=F*GKO**2-GKL*GVO/2.
```

ΠΙΝΑΞ XVIII (συνέχεια)

```
      GO TO 65
   64 E2=0
   65 E1=(Y(I)+Y(I+1))*0X/2.
      E=E1+E2
   71 S=S+E
      PRINT 275,NM,S
  275 FORMAT (5X,4HNM =,I3,5X,3HS =,F16.12)
  182 STOP
      ENO
```

DATA

```
091 .174533E-01
 .000000E+00 .017450E+00 .034900E+00 .052340E+00 .069760E+00 .087160E+00
 .104530E+00 .121870E+00 .1391T0E+00 .156430E+00 .173650E+00 .190810E+00
 .207910E+00 .224950E+00 .241920E+00 .258820E+00 .275640E+00 .292370E+00
 .309020E+00 .325570E+00 .342020E+00 .358370E+00 .374610E+00 .390730E+00
 .406740E+00 .422620E+00 .438370E+00 .453990E+00 .469470E+00 .484810E+00
 .500000E+00 .515040E+00 .529920E+00 .544640E+00 .559190E+00 .573580E+00
 .587790E+00 .601200E+00 .615660E+00 .629320E+00 .642790E+00 .656060E+00
 .669130E+00 .682000E+00 .694660E+00 .707110E+00 .719340E+00 .731350E+00
 .743140E+00 .754710E+00 .766040E+00 .777150E+00 .788010E+00 .798640E+00
 .809020E+00 .819150E+00 .829040E+00 .838670E+00 .848050E+00 .857170E+00
 .866030E+00 .874620E+00 .882950E+00 .891010E+00 .898790E+00 .906310E+00
 .913550E+00 .920500E+00 .927180E+00 .933580E+00 .939690E+00 .945520E+00
 .951060E+00 .956300E+00 .961260E+00 .965930E+00 .970300E+00 .974370E+00
 .978150E+00 .981630E+00 .984810E+00 .987690E+00 .990270E+00 .992550E+00
 .994520E+00 .996190E+00 .997560E+00 .998630E+00 .999390E+00 .999850E+00
 .100000E+01
```

ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

Βλ. εἰς τὸν πίνακα XIX

ΠΙΝΑΞ XIX. Ἀποτελέσματα ὁλοκληρώσεως σειρᾶς τιμῶν τοῦ ημx

X	NM	Πραγμ. τιμή	Μέθοδος Α′		Μέθοδος Β′	
			Εὑρεθεῖσα τιμή	Σφάλμα	Εὑρεθεῖσα τιμή	Σφάλμα
0-30°	31	0.133 974 596	0.133 975 119 495	3.7×10^{-6}	0.133 988 493 669	10^{-4}
0-45°	46	0.292 893 219	0.292 883 214 549	3.5×10^{-5}	0.292 893 615 073	1.4×10^{-6}
0-60°	61	0.500 000 000	0.499 990 258 061	2×10^{-5}	0.499 997 002 141	6×10^{-6}
0-90°	91	1.000 000 000	0.999 990 791 725	10^{-5}	1.000 033 774 172	3×10^{-5}

ΠΙΝΑΞ XX. Ὁλοκληρώματα χρησιμοποιηθέντα ὡς παραδείγματα εἰς τὰ διάφορα προγράμματα.

Α/Α	F(x)	F′(x)	Ὅρια ὁλοκληρώσεως	Πραγματικὴ τιμὴ
1	$F(x)=\sin x-\log x+e^{x}$	$F'(x)=\cos x-1/x+e^{x}$	0.2 - 1.4	4.050 947 929 6
2	$F(x)=1/x$	$F'(x)=-1/x^{2}$	1 - 2	.693 147 180 560
3	$F(x)=\log x$	$F'(x)=1/x$	4 - 5.2	1.827 847 408 575
4	$F(x)=1/(x^{2}+1)$	$F'(x)=-2x/(x^{4}+2x^{2}+1)$	0 - 1	.785 398 163 397
5	$F(x)=x^{2}+x+1$	$F'(x)=2x+1$	1 - 2	4.833 333 333 333
6	$F(x)=x^{2}+1$	$F'(x)=2x$	2 - 3	7.333 333 333 333
7	$F(x)=x\log(1-x)$	$F'(x)=\log(1-x)-x/(1-x)$	0 - 0.5	.052 569 807 290
8	$F(x)=x/\sqrt{(x^{2}+1)}$	$F'(x)=1/(x^{2}+1)^{1.5}$	1 - 2	.821 854 415 128
9	$F(x)=2^{x}\log 2$	$F'(x)=2^{x}(\log 2)^{2}$	2 - 3	4.000 000 000 000
10	$F(x)=x\log(x+1)$	$F'(x)=\log(x+1)+x/(x+1)$	0 - 1	.250 000 000 000
11	$F(x)=x^{2}$	$F'(x)=2x$	1 - 2	2.333 333 333 333
12	$F(x)=1/(x^{3}+1)$	$F'(x)=-3x^{2}/(x^{3}+1)^{2}$	0 - 1	.835 648 848 265

ΠΙΝΑΞ XX (συνέχεια)

21	$F(x)=e^{-x}$	$F'(x)=-e^{-x}$	$0-\infty$	1.000 000 000 000
22	$F(x)=e^{-v} \quad (v=x^2)$	$F'(x)=-2xe^{-v} \quad (v=x^2)$	$0-\infty$	.886 226 9
23	$F(x)=xe^{-v} \quad (v=x^2)$	$F'(x)=e^{-v}(1-2v) \quad (v=x^2)$	$0-\infty$	.500 000 000 000
24	$F(x)=ve^{-v} \quad (v=x^2)$	$F'(x)=-2xe^{-v}(1-v) \quad (v=x^2)$	$0-\infty$	.443 113 5
25	$F(x)=e^{-x}\log x$	$F'(x)=e^{-x}(1/x-\log x)$	$0-\infty$	—.577 215 7
26	$F(x)=e^{-x}(1/(1-e^{-x})-1/x)$		$0-\infty$	.577 215 7
27	$F(x)=(1/(1+x)-e^{-x})/x$		$0-\infty$	.577 215 7
28	$F(x)=\log[(e^{x}+1)/(e^{x}-1)]$		$0-\infty$	2.467 401 100 272
31	$F(x)=1/x^2$	$F'(x)=-2/x^3$	$1-\infty$	1.000 000 000 000
32	$F(x)=1/x^3$	$F'(x)=-3/x^4$	$1-\infty$	.500 000 000 000
33	$F(x)=e^{-x}$	$F'(x)=-e^{-x}$	$1-\infty$	.367 879 441 2
41	$F(x)=\sin^2 x/x^2$	$F'(x)=2\sin x(x\cos x-\sin x)/x^3$	$0-\infty$	1.570 796 326 795
42	$F(x)=\sin x/\sqrt{x}$	$F'(x)=(\cos x-\sin x/2x)/\sqrt{x}$	$0-\infty$	1.253 314 1
51	$F(x)=\sin x/x$	$F'(x)=(\cos x-\sin x/x)/x$	$1-\infty$	.626 657 05

ΠΙΝΑΞ XXI

Ἀντιστοιχία τῶν χρησιμοποιηθέντων συμβόλων εἰς τὰ προγράμματα FORTRAN πρὸς τὰ συνήθη σύμβολα τῶν μαθηματικῶν ἐκφράσεων.

ΜΕΘΟΔΟΣ Α′

XA	Τὸ κατώτερον ὅριον ὁλοκληρώσεως x_α
XB	Τὸ ἀνώτερον ὅριον ὁλοκληρώσεως x_β
N	Τὸ πλῆθος n τῶν ζωνῶν
RVAL	Ἡ πραγματικὴ τιμὴ τοῦ ὁλοκληρώματος
DX	Δx (τὸ πλάτος ἑκάστης ζώνης)
X	Ἡ ἀνεξάρτητος μεταβλητὴ x
R	Ὁ συντελεστὴς ρ
DR	$\Delta\rho$ (τὸ βῆμα αὐξήσεως τοῦ ρ)
Y(I)	$Y_1 = F(x)$
SY	Βοηθητικὴ μεταβλητὴ διὰ τὸ προσωρινὸν ἄθροισμα τῶν ἐντὸς παρενθέσεως ποσοτήτων τῆς ἐξ. (13).
BA	β
BB	B
SA	Βοηθητικὴ μεταβλητὴ διὰ τὴν παρένθεσιν τῆς ἐξ. (12).
S	Ἡ τιμὴ τοῦ ὁλοκληρώματος

ΜΕΘΟΔΟΣ Β′

XA	Τὸ κατώτερον ὅριον ὁλοκληρώσεως x_α
XB	Τὸ ἀνώτερον ὅριον ὁλοκληρώσεως x_β
N	Τὸ πλῆθος n τῶν ζωνῶν
X	Ἡ ἀνεξάρτητος μεταβλητὴ x
DX	Δx (τὸ πλάτος ἑκάστης ζώνης)
Y(I)	$Y = F(x)$
DERY(I)	Ἡ πρώτη παράγωγος Y' τῆς συναρτήσεως $Y = F(x)$
SY	Βοηθητικὴ μεταβλητὴ διὰ τὸ προσωρινὸν ἄθροισμα τῶν ἐμβαδῶν τῶν ζωνῶν.
S	Ἡ τιμὴ τοῦ ὁλοκληρώματος S
TH	Ἡ γωνία θ
F_1	Ἡ γωνία φ_1
F_2	Ἡ γωνία φ_2
YM	Ἡ τιμὴ τῆς συναρτήσεως Y εἰς τὸ μέσον τῆς ζώνης
DERYM	Ἡ πρώτη παράγωγος τῆς YM
THM1	Ἡ γωνία θ εἰς τὴν πρώτην ἡμιζώνην
F1M1	Ἡ γωνία φ_1 εἰς τὴν πρώτην ἡμιζώνην
F2M1	Ἡ γωνία φ_2 εἰς τὴν πρώτην ἡμιζώνην
FM1	Ἡ γωνία φ εἰς τὴν πρώτην ἡμιζώνην
GKLM1	Ἡ εὐθεία KL εἰς τὴν πρώτην ἡμιζώνην
GVOM1	Ἡ εὐθεία VO εἰς τὴν πρώτην ἡμιζώνην
GKOM1	Ἡ εὐθεία KO εἰς τὴν πρώτην ἡμιζώνην
E2M1	Τὸ ἐμβαδὸν τ εἰς τὴν πρώτην ἡμιζώνην
E1M1	Τὸ ἐμβαδὸν T εἰς τὴν πρώτην ἡμιζώνην
EM1	Τὸ ἐμβαδὸν E εἰς τὴν πρώτην ἡμιζώνην

ΠΙΝΑΞ XXI (συνέχεια)

THM2	Ἡ γωνία θ εἰς τὴν δευτέραν ἡμιζώνην
F1M2	Ἡ ηωνία φ_1 εἰς τὴν δευτέραν ἡμιζώνην
F2M2	Ἡ γωνία φ_2 εἰς τὴν δευτέραν ἡμιζώνην
FM2	Ἡ γωνία φ εἰς τὴν δευτέραν ἡμιζώνην
GKLM2	Ἡ εὐθεία KL εἰς τὴν δευτέραν ἡμιζώνην
GVOM2	Ἡ εὐθεία VO εἰς τὴν δευτέραν ἡμιζώνην
GKOM2	Ἡ εὐθεία KO εἰς τὴν δευτέραν ἡμιζώνην
E2M2	Τὸ ἐμβαδὸν τ εἰς τὴν δευτέραν ἡμιζώνην
E1M2	Τὸ ἐμβαδὸν T εἰς τὴν δευτέραν ἡμιζώνην
EM2	Τὸ ἐμβαδὸν E εἰς τὴν δευτέραν ἡμιζώνην
E	Τὸ ἐμβαδὸν E μιᾶς ζώνης
F	Ἡ γωνία φ
GKL	Ἡ εὐθεία KL
GVO	Ἡ εὐθεία VO
GKO	Ἡ εὐθεία KO
E1	Τὸ ἐμβαδὸν T
E2	Τὸ ἐμβαδὸν τ

ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΙΣ ΑΠΟ x_I ΕΩΣ ∞.

XI	Ἡ ἀρχικὴ τιμὴ τῆς x (κατώτερον ὅριον τοῦ δοθέντος ὀλοκληρώματος)
K	Βοηθητικὴ μεταβλητὴ (ἀθροιστής)
G	Βοηθητικὴ μεταβλητὴ διὰ τὸν καθορισμὸν τοῦ εὔρους τῶν μερικῶν ὀλοκληρωμάτων
ST	Βοηθητικὴ μεταβλητὴ διὰ τὸ ἄθροισμα τῶν μέχρι στιγμῆς ὑπολογισθέντων μερῶν τοῦ ὀλοκληρώματος

ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΙΣ ΣΕΙΡΑΣ ΜΕΤΡΗΣΕΩΝ

NM	Πλῆθος δεδομένων τιμῶν τῆς $Y = F(x)$
DY	Διαφοραὶ πρώτης τάξεως τῶν Y_1
DDY	Διαφοραὶ δευτέρας τάξεως (διαφοραὶ τῶν DY)
DDDY	Διαφοραὶ τρίτης τάξεως (διαφοραὶ τῶν DDY)