Sci. Annals, Fac. Phys. & Mathem., Univ. Thessaloniki, 16, 129, (1976).

FONCTIONS PLURISOUSHARMONIQUES ET VALEURS DEFICIENTES DE NEVANLINNA

par

V. FRANGOU

(Institut des Sciences Mathématiques, Université de Thessaloniki)

(Introduced by Prof. J. Anastassiadis)

(Received on 26.5.76)

Abstract: *In this paper plurisubharmonic functions are studied in some Frechet spaces. It is proved that in Poisson-Jensen formula the term $N(r, f, a)$ is a plurisubharmonic function. Also it is proved that in a proper Frechet space, the entire functions having a specific defieicnt value consist a negligeable set.*

Résumé: *On étudie les fonctions plurisousharmoniques dans certains espaces de Fréchet. On démontre que dans la formule de Poisson-Jensen le terme $N(r, f, a)$ est une fonction plusisousharmonique. On demontre aussi que dans un espace de Fréchet convenable les fonctions entières qui ont une certaine valeur déficiente forment un ensemble négligeable.*

1. FORMULE DE POISSON-JENSEN

On considère une fonction méromorple $f : \Omega \to C$, où

$$\Omega = \{z \in C : |z| < R \leqslant \infty\}.$$

On applique la formule de Jensen dans Ω.
On a: [2, b p. 163].

$$(1.1) \qquad \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|f(re^{i\theta}) - a|\, d\theta + N(r, \infty) = N(r,f,a) + \log|f(0) - a|,$$

$(a \neq \infty,\ f(0) \neq \infty)$.

On considère $A(\Omega)$, espace de Fréchet des fonctions holomorphes dans Ω avec la topologie de la convergence uniforme sur tout compact. [1,c p. 29].

Si $f \in A(\Omega)$, on a $N(r, \infty) = 0$, alors:

$$(1.2) \qquad N(r,f,a) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|f(re^{i\theta}) - a|\, d\theta \qquad - \log|f(0) - a|,$$

(formule de Poisson-Jensen) [1,c p. 224].

2. FONCTIONS PLURISOUSHARMONIQUES SUR $A(\Omega)$

On rappelle que: [1,b p. 168], [1,d p. 306]

(2.1) Dédinition: Une application $x \in G \to f \in R_g$ d' un ouvert $G \subset A(\Omega)$ dans R_g, où $R_g = R \cup \{-\infty\}$, est dite plurisousharmonique si

(a) f est semi-continue supérieurement

(b) pour tout disque $\Delta_{x,y} = [Z \in A(\Omega)\,;\; Z = x + uy,\; u \in C,\; |u| \leqslant 1]$, de centre $x \in G$ et de rayon $y \in A(\Omega)$, $y \neq 0$, et contenu dans G, on a:

$$f(x) \leqslant \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x + ye^{i\theta})d\theta \qquad \text{(inégalité de la moyenne)}$$

On note P(G) la classe des fonctions plurisousharmoniques dans l'ouvert G.

On va établir

(2.2) Proposition: Si l' on considère l'ensemble $M \subset A(\Omega)$ des fonctions $f \in A(\Omega)$ qui valent c à l' origine, où $c \neq a$, alors N(r,f,a) est une fonction plurisousharmonique de f.

Démonstration: D' après la formule (1.2) il suffit de montrer que

$$F(f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log|f(re^{i\theta}) - a|\, d\theta$$

est une fonction plurisousharmonique de f, parce que log $|c-a|$ est plurisousharmonique comme constante.

L' application $f \to \log|f(z_0)|$, pour z_0 fixé, est une application de $M \subset A(\Omega)$ dans R. De plus l' application $\sigma(f) = f$ est analytique parce que $\sigma(f_1 + f_2 z) = f_1 + f_2 z$ est analytique, étant linéaire.

Alors $f \to \log|f(z_0)|$ est une fonction plurisousharmonique de $f \in M$. Donc

$$F(f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log|f(re^{i\theta}) - a|\, d\theta$$

est de la forme: [1,c p. 54]

$$\int_0^{2\pi} U(f,\theta)\, d\mu(\theta), \text{ où}$$

$U(f,\theta)$ est une application de $M\times[0,2\pi]\to R_g$ et

1° pour θ fixé $U(f,\theta)$ est une fonction plurisousharmonique de f.

2° pour f fixé $U(f,\theta)$ est μ-sommable

3° pour tout compact $K\subset M$, $U(f,\theta)$ est bornée supérieurement sur $K\times[0,2\pi]$.

Alors $F(f)$ est une fonction plurisousharmonique de f.

3. VALEURS DEFICIENTES LE NEVANLINNA ET ENSEMBLES NEGLIGEABLES

Soit $f(z)$ une fonction méromorphe pour $z\neq\infty$.

(3.1) Définition: On appelle déficience de la valeur a l' expression [2,b p. 266]:

$$\delta(a)=\underline{\lim}_{r\to\infty}\frac{m(r,a)}{T(r)}=1-\overline{\lim}_{r\to\infty}\frac{N(r,a)}{T(r)}\qquad \text{où}$$

$T(r)=N(r,\infty)+m(r,\infty)$ est la caracteristique de Nevanlinna.

On a $o\leqslant\delta(a)\leqslant 1$.

(3.2) Définition: Si $\delta(a)>0$, a est appellé valeur déficiente de f.

Si f est une fonction entière on a $N(r,\infty)=0$.

Alors

$$T(r)=m(r,\infty)=\frac{1}{2\pi}\int^{2\pi}\log^+|f(re^{i\theta})|\,d\theta\leqslant\log M(r),$$

où $M(r)=\sup\limits_{|z|\leqslant r}|f(z)|$

(3.3) Définition: On appelle ordre d' une fonction entière f l' expression [2,a p. 30]:

$$\rho=\overline{\lim}_{r=\infty}\frac{\log\log M(r)}{\log r}\qquad \text{ou}$$

$$\rho=\overline{\lim}_{r=\infty}\frac{\log T(r)}{\text{lorg}}$$

On considère l' espace de Fréchet E des fonctions entières qui ont un T(r) donné, donc un ρ donné, et pour lesquelles on a: [1, a p.11]

$$\overline{\lim}_{t=\infty}\frac{\log|f(tz)|}{t^\rho}\leqslant\Psi(z),\ \ z\in C^n,$$

où $\Psi(z)$ est une fonction plurisousharmonique positivement homogène d' ordre ρ, c' est à dire $\Psi(tz) = t^{\rho}\,\Psi(z)$ pour chaque $t \geqslant 0$.

Sur E on considère la topologie definie par les semi-normes:

$$P_q(f) = \sup |f(z)e^{-\varphi_q(z)}|$$

où $\varphi_q(z)$ est une suite décroissante des fonctions plurisousharmoniques continues, positivement homogènes d' ordre ρ avec les conditions.

1° $\varphi_q > \Psi$

2° $\varphi_{q-1}(z) - \varphi_q(z) \geqslant a_q > 0$ pour $\|z\| = 1$

3° $\lim\limits_{q=\infty} \varphi_q(z) = \Psi(z)$

On rappelle aussi que [1,a p.7],[1,ε p. 274]

(3.4) Définition: Une partie $A \subset G$ d'un onvert G de l' espace E est dite négligeable dans G s' il existe une suite $V_q(x) \in P(G)$, localement bornée supérieurement dans G, telle qu' on ait

$A \subset A' = [x \in G;\ g(x) < g^*(x)]$ où $g(x) = \sup\limits_q V_q(x)$ et $g^*(x) \in P(G)$ la régularisée supérieure de g(x), c'est à dire la fonction

$$g^*(x) = \limsup_{x' \to x} g(x')$$

On va établir

(3.5) Proposition: Soit a fixé. Alors les fonctions $f \in E$ qui valent c à l' origine $(c \neq a)$ et pour lesquelles a est une valeur déficiente, c' est à dire pour lesquelles on a:

$$\limsup_{r=\infty} \frac{N(r,f,a)}{T(r)} < 1$$

forment un ensemble négligeable.

Démonstration: Soit G un ouvert de E. Pour montrer que l' ensemble

$A = [f \in G: \limsup\limits_{r=\infty} \dfrac{N(r,f,a)}{T(r)} < 1]$ est négligeable, il suffit de montrer qu' il existe une suite $V_q(f)$ de fonctions plurisousharmoniques, localement bornée supérierement, telle que:

$$A \subset A' = [f \in G:\ g(f) < g^*(f)],$$

où $g(f)=\lim\sup V_q(f)$ et $g^*(f)$ la régularisée supérieure de $g(f)$.

Pour a fixé, on considère la suite des fonctions plurisousharmoniques

$$V_r(f) = \frac{N(r,f,a)}{T(r)}$$

On a $V_r(f) \leqslant 1$. Alors $g(f) = \lim\sup V_r(f) \leqslant 1$.

Mais, il existe $f_0 \in G$ tel que $g(f_0) = 1$, donc $g^*(f) = 1$.

Par conséquent pour $f \in A$ on a $g(f) \leqslant g^*(f)$ alors A est négligeable.

BIBLIOGRAPHIE

[1] P. Lelong -a) . Fonctions plurisousharmoniques et ensembles polaires sur une Algèbre des fonctions holomorphes. Séminaire (Analyse) 1968-1969 Springer, Lecture notes n^0 116.

b) Fonctions plurisousharmoniques dans les espaces vectoriels topologiques. Séminaire (Analyse) 1967-1968. Spirnger, Lecture notes n^0 71.

c) Fonctionnelles analytiques et fonctions entières, Cours Montréal 1967.

d) Les fonctions plusirousharmoniques, Ann. E. N. S. t. 62, p. 301-338, 1945.

e) Fonctions entières de type exponeutiel dans C^n, Ann. Inst. Fourier, Grenoble t. 16, 2 p. 269-318, 1966.

[2] R. Nevanlinna. a) Le théoreme de Picard-Borel et la théorie des fonctions méromorphes, Gauthier-Villars Paris. 1929.

b) Analytic functions, Springer-Verlag, Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften Band 162.

ΠΕΡΙΛΗΨΙΣ

ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ «PLURISOUSHARMONIQUES» ΚΑΙ ΤΙΜΕΣ «DEFICIENTES» ΤΟΥ NEVANLINNA

ὑπὸ

Β. ΦΡΑΓΚΟΥ

('Ἐκ τοῦ Μαθηματικοῦ Σπουδαστηρίου τοῦ Πανεπιστημίου Θεσσαλονίκης)

Μελετῶνται αἱ συναρτήσεις plurisousharmoniques εἰς ὡρισμένους χώρους Fréchet. Ἀποδεικνύεται ὅτι εἰς τὸν τύπον τῶν Poisson-Jensen ὁ ὅρος N(r,f,a) εἶναι μία συνάρτησις plurisousharmonique. Ἐπίσης ἀποδεικνύεται ὅτι εἰς ἕναν κατάλληλον χῶρον Fréchet, αἱ ἀκέραιαι συναρτήσεις αἱ ὁποῖαι ἔχουν μία ὡρισμένην τιμὴν «déficiente» ἀποτελοῦν σύνολον «négligeable».