Sci. Annals, Fac. Phys. & Mathem., Univ. Thessaloniki, 18l (1978)

ΓΙΑ ΤΗ ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΜΟΝΟΠΑΡΑΜΕΤΡΙΚΗΣ ΟΙΚΟΓΕΝΕΙΑΣ ΠΕΡΑΤΩΜΕΝΩΝ ΣΥΝΟΛΩΝ

Ὑπὸ

ΘΩΜΑ ΚΥΒΕΝΤΙΔΗ

(Ζ' Ἕδρα Μαθηματικῆς Ἐπιστήμης Ἀριστοτελείου Πανεπιστημίου Θεσσαλονίκης)

(Received 18.10.78)

Abstract: *In this paper it is studied the continuity, with respect the Hausdorff metric, of one monoparametric family of bounded subsets* $\langle E_a \rangle$, $0 < a < 1$ *of a metric space X which can be represented as a countable union of totally bounded of its subsets.*

It is being proved that, if $E_{a_1} \subseteq E_{a_2}$, *when* $a_1 \leq a_2$, *then the family* $\langle E_a \rangle$, $0 < a < 1$, *is continuous with respect the Hausdorff metric for all the values of the parameter a except, may be, a countable number of its values.*

The present paper is a generalization of the N. V. Ščerbina's Theorem [1] where the space X is a totally bounded metric space.

1. Ἔστω ὁ μετρικὸς χῶρος (X,d) ποὺ μπορεῖ νὰ τεθεῖ σὰν ἕνωση ἀριθμήσιμου πλήθους ὁλικῶς περατωμένων ὑποσυνόλων του X_n.

Προφανῶς, μποροῦμε νὰ γράψουμε

$$X = \bigcup_{n=1}^{\infty} M_m \qquad \text{μὲ} \qquad M_m \subset M_{m+1}$$

ὅπου $M_m = X_1 \cup X_2 \cup \ldots \cup X_m$.

Ὡς γνωστὸν ἡ Hausdorff ἀπόσταση μεταξὺ δύο συνόλων E καὶ F τοῦ μετρικοῦ χώρου (X,d) δίνεται ἀπὸ τὴ σχέση

$$\rho(E,F) = \sup_{x \in E} \inf_{y \in F} d(x,y) + \sup_{y \in F} \inf_{x \in E} d(y,x)$$

Ἔστω $\langle E\alpha \rangle$, $0<\alpha<1$, μιὰ μονοπαραμετρικὴ οἰκογένεια περατωμένων ὑποσυνόλων τοῦ μετρικοῦ χώρου (X,d).

ΟΡΙΣΜΟΣ: Τὸ σημεῖο $\alpha_0 \in (0,1)$ λέμε ὅτι εἶναι σημεῖο συνέχειας τῆς οἰκογένειας $\langle E\alpha \rangle$, $0<\alpha<1$, ἐὰν $\lim_{\alpha \to \alpha_0} \rho(E\alpha, E\alpha_0) = 0$.

Σημειώνουμε μὲ $\omega(\alpha_0) = \limsup\limits_{\substack{\delta \to 0 \\ |x-\alpha_0|<\delta \\ |y-\alpha_0|<\delta}} \rho(Ex, Ey)$

τὸ μέτρο ἀσυνέχειας στὸ σημεῖο α_0.

Γιὰ τὴν ἀπόδειξη τοῦ θεωρήματος μᾶς χρειάζονται τὰ παρακάτω λήμματα (βλέπε N. V. Ščerbina [1]):

ΛΗΜΜΑ 1: Ἡ οἰκογένεια $\langle E\alpha \rangle$ εἶναι συνεχὴς στὸ α_0, ἐὰν καὶ μόνο ἐὰν $\omega(\alpha_0) = 0$.

ΛΗΜΜΑ 2: Γιὰ κάθε αὔξουσα οἰκογένεια $\langle E\alpha \rangle$ καὶ τιμὲς τῆς παραμέτρου $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, μὲ $\alpha_1 < \alpha_2 < \alpha_3$, ἔχουμε

$$\rho(E\alpha_1, E\alpha_2) \leqq \rho(E\alpha_1, E\alpha_3)$$

ΛΗΜΜΑ 3: Ἐὰν ἡ οἰκογένεια $\langle E\alpha \rangle$ εἶναι αὔξουσα καί, ἐὰν $\omega(\alpha_0) = \varepsilon > 0$, τότε, γιὰ ὅλες τὶς τιμὲς τῆς παραμέτρου α_1, α_2, μὲ $\alpha_1 < \alpha_0 < \alpha_2$, ἔχουμε

$$\rho(E\alpha_1, E\alpha_2) \geqq \varepsilon.$$

2. ΘΕΩΡΗΜΑ: Ἔστω $\langle E\alpha \rangle$, $0 < \alpha < 1$, μιὰ αὔξουσα μονοπαραμετρικὴ οἰκογένεια περατωμένων ὑποσυνόλων μετρικοῦ χώρου (X, d) ποὺ εἶναι ἀριθμήσιμη ἕνωση ὁλικῶς περατωμένων ὑποσυνόλων του. Ἡ οἰκογένεια $\langle E\alpha \rangle$ εἶναι συνεχής, μὲ τὴν Hausdorff μετρική, γιὰ ὅλες τὶς τιμὲς τῆς παραμέτρου α, ἐκτὸς ἴσως ἀπὸ ἕνα ἀριθμήσιμο πλῆθος τιμῶν της.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Σημειώνουμε μὲ D τὸ σύνολο τῶν σημείων ἀσυνέχειας τῆς οἰκογένειας $\langle E\alpha \rangle$, καὶ μὲ D_n τὸ σύνολο τῶν σημείων α_0, μὲ $\omega(\alpha_0) \geqq 1/n$.

Βάσει τοῦ λήμματος 1, τὸ σύνολο D ἰσοῦται μὲ τὴν ἕνωση ὅλων τῶν D_n.

Κατασκευάζουμε μιὰ βοηθητικὴ μονοπαραμετρικὴ οἰκογένεια $\langle \Omega\alpha \rangle$, παίρνοντας σὰν σύνολα $\Omega\alpha$ τὶς $\varepsilon_n = 1/4n$ — περιοχὲς τῶν συνόλων $E\alpha$.

Ἔστω $\alpha_0 \in D_n$, ὁπότε θὰ ὑπάρχουν $\alpha_1, \alpha_2 \in (0,1)$, μὲ $\alpha_1 < \alpha_0 < \alpha_2$.

Ἀλλὰ κάθε M_m εἶναι ὁλικῶς περατωμένο ὑποσύνολο τοῦ X, ὁπότε θὰ ὑπάρχει ἕνα ε_n - πυκνὸ πεπερασμένο σύνολο $\langle x_1, x_2, \ldots, x_\rho \rangle$.

Συμβολίζουμε μὲ y_k τὸ μεγαλύτερο κατώτερο φρᾶγμα τοῦ συνόλου τῶν τιμῶν τῆς παραμέτρου α γιὰ τὶς ὁποῖες τὸ $\Omega\alpha$ περιέχει τὸ x_k.

Ἀπὸ τὸν ὁρισμὸ τοῦ D_n ἔχουμε $\omega(\alpha_0) \geqq 1/n$, καὶ ἀπὸ τὸ λῆμμα 3 προκύπτει ὅτι $\rho(E\alpha_1\ E\alpha_2) \geqq 1/n$.

Ἑπομένως, ὑπάρχει σημεῖο $z \in E\alpha_2$ τέτοιο, ὥστε $\inf_{x \in E\alpha_1} d(z,x) \geqq 1/2n$.

Ἐπειδὴ ὅμως εἶναι $E\alpha_2 \subset \Omega\alpha_2 \subset M_m$, θὰ ὑπάρχει στοιχεῖο $x_k \in M_m$ τέτοιο, ὥστε $d(x_k,z) < 1/4n$, συνεπῶς $x_k \in \Omega\alpha_2$.

Ἀλλὰ ἔχουμε

$$\inf_{x \in E\alpha_1} d(x_k,x) \geqq \inf_{x \in E\alpha_1} d(z,x) - d(x_k,z) \geqq 1/4n$$

ἑπομένως $x_k \notin \Omega\alpha_1$ καὶ ἄρα $\alpha_1 < y_k < \alpha_2$.

Τὸ σύνολο $<y_k>$ ἔχει ρ στοιχεῖα, ποὺ ἀντιστοιχοῦν στὰ σημεῖα ποὺ ἀποτελοῦν τὸ ε_n-πυκνὸ σύνολο γιὰ τὸ M_m, καὶ ἐπὶ πλέον, ἡ τελευταία σχέση ἰσχύει γιὰ κάθε α_1', α_2', μὲ $\alpha_1 < \alpha_1' < \alpha_0 < \alpha_2' < \alpha_2$.

Ἑπομένως, ἀναγκαστικά, θὰ ἔχουμε $\alpha_0 = y_i$, γιὰ κάποιο $i \in <1,2,\ldots,\rho>$.

Ὁ ἀριθμὸς ρ ἐξαρτᾶται κάθε φορὰ ἀπὸ τὴν ἐκλογὴ τῆς παραμέτρου α_2-ἡ ὁποία καθορίζει τὸ M_m-ὁπότε τὸ D_n εἶναι τὸ πολὺ ἀριθμήσιμο.

Ἄρα τὸ $D = \bigcup_{n=1}^{\infty} D_n$ εἶναι κι αὐτὸ τὸ πολὺ ἀριθμήσιμο.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

α) Τὰ σύνολα $E\alpha$ ἔχουν ἐκλεγεῖ περατωμένα ἀλλὰ μπορεῖ τὸ $\sup \delta(E\alpha) = \infty$.

β) Ἂν ἡ οἰκογένεια $<E\alpha>$ εἶναι φθίνουσα, τότε παίρνουμε τὴν οἰκογένεια $<E_{1-\alpha}>$ ποὺ εἶναι ἡ ἴδια μὲ τὴν προηγούμενη, ἀλλὰ αὔξουσα.

γ) Τὸ Θεώρημα αὐτὸ εἶναι μιὰ γενίκευση θεωρήματος τῶν πραγματικῶν συναρτήσεων ποὺ λέει ὅτι: τὰ σημεῖα ἀσυνέχειας μιᾶς μονότονης ἀριθμητικῆς συναρτήσεως εἶναι τὸ πολὺ ἀριθμήσιμου πλήθους.

Πράγματι, ἡ πραγματικὴ εὐθεία εἶναι ἀριθμήσιμος στὸ ἄπειρο μετρικὸς χῶρος, δηλ. τοπικῶς συμπαγὴς καὶ γράφεται σὰν ἕνωση ἀριθμήσιμου πλήθους συμπαγῶν συνόλων.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

1. N. V. Sčerbina: On the continuity of one-parameter families of sets, Soviet Math. Dokl. Vol. 18 (1977), No 3, pp. 688-690.

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

ΓΙΑ ΤΗ ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΜΟΝΟΠΑΡΑΜΕΤΡΙΚΗΣ ΟΙΚΟΓΕΝΕΙΑΣ ΠΕΡΑΤΩΜΕΝΩΝ ΣΥΝΟΛΩΝ

Ὑπὸ
ΘΩΜΑ ΚΥΒΕΝΤΙΔΗ

Στὴν ἐργασία αὐτὴ μελετᾶται ἡ συνέχεια, μὲ τὴν Hausdorff μετρική, μιᾶς μονοπαραμετρικῆς οἰκογένειας περατωμένων ὑποσυνόλων <Eα>, $0 < \alpha < 1$, μετρικοῦ χώρου X ποὺ μπορεῖ νὰ παρασταθεῖ σὰν ἀριθμήσιμη ἕνωση ὁλικῶς περατωμένων ὑποσυνόλων του.

Ἀποδεικνύεται ὅτι, ἐὰν $E\alpha_1 \subset E\alpha_2$, ὅταν $\alpha_1 \leq \alpha_2$, τότε, ἡ οἰκογένεια <Eα>, $0 < \alpha < 1$, εἶναι συνεχὴς μὲ τὴν Hausdroff μετρικὴ γιὰ ὅλες τὶς τιμὲς τῆς παραμέτρου α ἐκτὸς ἀπὸ ἕνα ἀριθμήσιμο πλῆθος τιμῶν της.

Ἡ ἐργασία αὐτὴ εἶναι γενίκευση θεωρήματος τοῦ N. V. Ščerbina [1], ὅπου ὁ χῶρος X εἶναι ὁλικῶς περατωμένος μετρικὸς χῶρος.