Sci. Annals, Fac. Sciences, Univ. Thessaloniki, **23**, 109 (1983)

COMPARAISON RESULTATS POUR LA STABILITE PRATIQUE II

Par

THOMAS KIVENTIDIS

Département de Mathématiques, Université de Thessaloniki

Abstract : *We develop some comparison theorems that connects the solutions of two differential systems in a manner useful in the practical stability.*

1. INTRODUCTION

Nous considérons les deux systémes

$$\dot{y} = f(t,y), \quad y(t_0) = x_0 \tag{1}$$

et $$\dot{x} = F(t,x), \quad x(t_0) = x_0 \tag{2}$$

où $f, F \in C(R^+ \times B(\rho), R^n)$.

Ici R^+ désigne les nonegatives nombres, R^n euclidien n - espace, $C(R^+ \times B(\rho), R^n)$ la classe des fonctions continues de $R^+ \times B(\rho)$ dans R^n et $B(\rho) = \{x \in R^n : \| x \| < \rho\}$, où $\| . \|$ est une norme convenable.

(A) Pour le systéme (1) nous supposons que son solution $y(t;t_0,x_0)$ existe $\forall t \geq t_0$, est unique, continue par rapport aux données et est localement Lipschitzienne en x_0.

Evidemment, $\| y(t;t,x) \| = \| x \| < \rho$, $\forall t \geq t_0$ (pour un convenable $\rho > 0$ puisque la solution se définie $\forall$ $t \geq t_0$) et pour chaque $V \in C(R^+ \times B(\rho), R^+)$, $t \in (t_0, \infty)$, t constante, on définit

$$D^+V(s, y(t;s,x)) \equiv \limsup_{h \to 0^+} \frac{1}{h} [V(s+h, y(t; s+h, x+hF(s,x)) - V(s,y(t;s,x))]$$

pour $t_0 \leq s < t$ et $x \in B(\rho)$.

2. DEFINITIONS [3]

1. Le systéme (1) est pratiquement stable par rapport aux données $(\varepsilon_1,\varepsilon_2,t_0, \|\cdot\|)$, $\varepsilon_1 \leq \varepsilon_2$, si pour chaque solution $x(t)$, la condition $\| x(t_0) \| < \varepsilon_1$, entraine la relation $\| x(t) \| < \varepsilon_2$, $\forall\ t \geq t_0$.

2. Le systéme (1) est pratiquement asymptotiquement stable par rapport aux données $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, t_0, \|\cdot\|)$, $\varepsilon_2 < \varepsilon_1 \leq \varepsilon_3$, si pour chaque solution $x(t)$ la condition $\| x(t_0) \| < \varepsilon_1$, entraine:
   (i) la stabilité pratique par rapport $(\varepsilon_1, \varepsilon_3, t_0, \|\cdot\|)$,
   (ii) il existe $T > t_0$ tel que $\| x(t) \| < \varepsilon_2$, $\forall\ t \geq T$.

Si les définitions précédentes sont valables pour chaque $t_1 \in [t_0,\infty)$ au place de t_0, nous avons les stabilités pratiques uniformes.

2. THEOREME DE COMPARAISON

On va utileser le

Lemme ([1], Theorem 1.1). On suppose que

(i) l'hypothése (A) est valable,

(ii) $V \in C(R^+ \times B(\rho), R^+)$, $V(s,x)$ est localement Lipschitzienne en x et pour $t_0 \leq s < t$, $x \in B(\rho)$, on a

$$D^+V(s,y(t;s,x)) \leq g(s,V(s,y(t;s,x)))$$

(iii) $g \in C(R^+ \times R^+,R)$ et il y a une fonction continue $G(t)$, $\forall\ t \geq t_0$ telle que $| g(t,v_1) - g(t,v_2) | \leq G(t) | v_1 - v_2 |$, $\forall\ (t,v_1), (t,v_2) \in [t_0, \infty) \times R$.

Alors, si $x(t) = x(t;t_0,x_0)$ est la solution du systéme (2) et $u(t;t_0,u_0)$ est la solution du systéme

$$\dot{u} = g(t,u)\ ,\quad u(t_0) = u_0 \tag{3}$$

nous avons $V(t,x(t;t_0,x_0)) \leq u(t;t_0,u_0)$, $t_0 \leq t < \infty$ lorsque $V(t_0,y(t;t_0,x_0)) \leq u_0$.

En posant $u_0 = V(t_0,y(t;t_0,x_0))$, la derniére inequalité du lemme devient $V(t,x(t;t_0,x_0)) \leq u(t;t_0, V(t_0,y(t;t_0,x_0)))$, $t_0 \leq t < \infty$, c'est - à - dire une relation parmi des solutions des systémes (1) et (2), avec l'entremise de la solution maximale ([2]) du systéme (3).

Théoréme 1: On suppose que

(α) les hypothéses (i), (ii) et (iii) du lemme sont satisfait.

(β) le systéme (1) est (uniformement) pratiquement stable par rapport aux données $(\varepsilon_1,\varepsilon_2,t_0, \|\cdot\|)$, $\varepsilon_1 \leq \varepsilon_2$ et le systéme (3) est (uniformement) pratiquement stable par rapport aux données $(a_1,a_2,t_0, |\cdot|)$, $a_1 \leq a_2$.

(γ) $b(\|x\|) \leq V(t,x) \leq a(\|x\|)$, $\forall\ (t,x) \in [t_0, \infty) \times B(\rho)$, ou $a, b \in C([0,\rho), R^+)$ $\rho > \varepsilon_2$, sont croissantes avec $a(0) = 0$ et $a(\varepsilon_2) = a_1$.

Alors, le systéme (2) est (uniformement) pratiquement stable par rapport aux données $(\varepsilon_1,\varepsilon_2', t_0, \|\cdot\|)$, $\varepsilon_1 \leq \varepsilon_2' = b^{-1}(a_2)$.

Démonstration

Par l'hypothése nous avons que $u(t;t_0,u_0) < a_2$, $\forall\ t \geq t_0$ lorsque $u_0 < a_1$ et $\| y(t;t_0,x_0) \| < \varepsilon_2$, $\forall\ t \geq t_0$, lorsque $\| x_0 \| < \varepsilon_1$ (*).

Nous démon trerons que $\| x_0 \| < \varepsilon_1$ entraine $\| x(t; t_0,x_0) \| < \varepsilon_2' = b^{-1}(a_2)$, $\forall\ t \geq t_0$. On suppose qu'il existe $t_1 > t_0$ tel que $\| x(t_1;t_0,x_0) \| = \varepsilon_2'$ (le premier tel élement). Nous avons donc $\| x(t;t_0{}^{\prime}x_0) \| < \varepsilon_2'$, $t_0 \leq t < t_1$ et par le lemme résulte

$$V(t,x(t;t_0,x_0)) \leq u(t;t_0,V(t_0,y(t;t_0,x_0))), \quad t_0 \leq t < t_1.$$

Par conséquent, depuis les relations (*) et l'hypothése (γ), nous prenons (puisque $V(t_0,y(t_1;t_0,x_0)) \leq a(\| y(t_1;t_0,x_0) \|) < a(\varepsilon_2) = a_1$).

$$a_2 \leq b(\varepsilon_2') \leq V(t_1,x(t_1;t_0,x_0)) \leq u(t_1;t_0, V(t_0, \| y(t_1;t_0,x_0) \|)) <$$
$$< a_2 = b(\varepsilon_2')$$ qui est absurde.

Donc le systéme (2) est (uniformement) pratiquement stable par rapport aux données $(\varepsilon_1,\varepsilon_2',t_0, \|\cdot\|)$, $\varepsilon_1 \leq \varepsilon_2' = b^{-1}(a_2)$.

Théoréme 2: On suppose que les hypothéses (α), (γ) du théoréme 1 sont valables et

(β') le systéme (1) est (uniformement) pratiquement stable par rapport aux données $(\varepsilon_1,\varepsilon_2,t_0, \|\cdot\|)$, $\varepsilon_1 \leq \varepsilon_2$ et le systéme (3) est (uniformement) pratiquement asymptotiquement stable par rapport aux données $(a_1,a_2',a_2,t_0, |\cdot|)$, $a_2' < a_1 < a_2$.

Alors, le systéme (2) est (uniformemert) pratiquement asymptotiquement stable par rapport aux données

$(\varepsilon_2,\varepsilon_2'',\varepsilon_2',t_0, \|\cdot\|),\varepsilon_2'' < \varepsilon_2 \leq \varepsilon_2'$, où $\varepsilon_2'' = b^{-1}(a_2')$, $\varepsilon_2' = b^{-1}(a_2)$.

Démonstration

La (uniforme) stabilité pratique resulte par le théoréme 1.

Nous avons $b(\| x(t; t_0, x_0) \|) \leq V(t, x(t; t_0, x_0)) \leq$

$$\leq u(t;t_0,V(t_0,y(t;t_0,x_0))) \;\; \forall\, t \geq t_0, \; \| x_0 \| < \varepsilon_2.$$

Puisque

$$V(t_0,y(t;t_0,x_0)) \leq a(\| y(t;t_0,x_0) \|) < a(\varepsilon_2) = a_1$$

evidemment, il y a moment du temps $T > t_0$ tel que $\forall t \geq T$ nous ayons

$u(t;t_0,V(t_0,y(t;t_0,x_0))) < a_2'$ qui entraine

$$\| x(t;t_0,x_0) \| < b^{-1}(a_2') = \varepsilon_2'', \;\; \forall\, t \geq T\,.$$

4. EXEMPLE

On considére que $f(t,y) = A(t)y$, où $A(t)$ est une matrice continue $n \times n$. La solution $y(t,t_0,x_0)$ du systéme (1) se donne par la relation $y(t;t_0,x_0) = \Phi(t,t_0)x_0$, où $\Phi(t,t_0)$ est la resolvante du systéme $\dot{y} = A(t)y$.

L'hypothèse (A) est satisfait.

Pour t fixe et $V(t,x)$ differentiable nous avons

$$D^+V(s,y(t;s,x)) = \frac{\partial V}{\partial s} + \frac{\partial V}{\partial y}\left(\frac{\partial y}{\partial s} + \frac{\partial y}{\partial x}\,\frac{dx}{ds}\right).$$

On a [2]

$$\frac{\partial y}{\partial s} = -\,\Phi(t,s)A(s)x, \qquad \frac{\partial y}{\partial x} = \Phi(t,s)$$

donc, si $V = V(y(t;s,x)) = \| y(t;s,x) \|$,nous aurons

$$D^+V = \frac{\partial V}{\partial y}\,.\,\Phi(t, s)\,[F(s, x) - A(s)x] =$$

$$= \frac{y}{\| y \|}\,.\,\Phi(t,s)\;[F(s,x) - A(s)x]$$

pour $\| y \|^2 = yy^T$ (norme euclidienne) et $(\cdot)$ le produit intérieur.

a) On suppose que $g(t,u) \equiv 0$.

Si nous prenons $V(t, x) = \| x \|$ et si nous avons

$$y \cdot \Phi(t,s)\,[F(s,x) - A(s)x] \leq 0$$

alors, par le lemme resulte

$$\| x(t;t_0,x_0) \| \leq \| \Phi(t,t_0)x_0 \|, \quad t \geq t_0.$$

Evidement, en ce cas, le systéme (3) est uniformement pratiquement stable par rapport aux données $(\alpha, \alpha, t_0, |\cdot|)$, $\alpha > 0$.

On peut prendre $a(\| x \|) = b(\| x \|) = \| x \|$. Par conséquent, si l systéme (1) est (uniformement) pratiquement stable par rapport aux données $(\varepsilon\,\alpha, t_0, \| \cdot \|)$, $\varepsilon \leq \alpha$, alors, par le théorème 1, le systéme (2) a la même stabilité (par rapport aux mêmes données).

b) On suppose que $g(t,u) = -\lambda u$, $\lambda > 0$ constante.

Si nous prenons, aussi, $V(t,x) = \| x \|$ et si nous avons

$$y \cdot \Phi(t,s)\,[F(s,x) - A(s)x] \leq -\lambda u \, \| y \|$$

alors, par le lemme resulte

$$\| x(t;t_0,x_0) \| \leq \| \Phi(t,t_0)x_0 \| \, e^{-\lambda(t-t_0)}, \quad t \geq t_0.$$

En ce cas le systéme $\dot{u} = -\lambda u$, $u(t_0) = u_0$ (3) est uniformement pratiquement asymptotiquement stable par rapport aux données $(\alpha,\alpha',\alpha,t_0, |\cdot|)$, $\alpha' < \alpha$. On prend aussi $a(\| x \|) = b(\| x \|) = \| x \|$.

Par conséquent, si le systéme (1) est (uniformement) pratiquement stable par rapport aux données $(\varepsilon,\alpha,t_0, \| \cdot \|)$, $\varepsilon \leq \alpha$, alors, par le théorème 2, le systéme (2) est (uniformement) pratiquement asymptotiquement stable par rapport aux données

$$(\alpha, \alpha', \alpha, t_0, \| \cdot \|), \quad \alpha' < \alpha.$$

NOTE:

Si nous prendrons $F(s,x) = A(s)x + u(s,x)$ (la perturbation du systéme (1)) nous aurons

$$D^+V = \frac{y}{\| y \|} \cdot \Phi(t,s)\, u(s,x).$$

BIBLIOGRAPHIE

1. G.S. LADDE, V. LAKSHMIKANTHAM and S. LEELA: «A Technique in Perturbation Theory», Rocky Mountain Journal of Mathematics, Vol. 6, p. 133-140, 1976.
2. V. LAKSHMIKANTHAM and S. LEELA: «Differential and Integral Inequalities, Theory and Applications», Vol. I, Academic Press, New York, 1969.
3. Θ. ΚΥΒΕΝΤΙΔΗ: «Πρακτική εὐστάθεια κάτω ἀπὸ διαταράξεις», Διδακτορική Διατριβή, Θεσσαλονίκη, 1978.

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

ΣΥΓΚΡΙΤΙΚΑ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ ΓΙΑ ΤΗΝ ΠΡΑΚΤΙΚΗ ΕΥΣΤΑΘΕΙΑ

Ὑπὸ

ΘΩΜΑ ΚΥΒΕΝΤΙΔΗ

Μαθηματικό Τμήμα, Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης

Αναπτύσουμε μερικά συγκριτικά θεωρήματα τα οποία συνδέουν τις λύσεις δύο διαφορικών συστημάτων μ' έναν τρόπο που είναι χρήσιμος για την πρακτική ευστάθεια.